

## Свободные внутренние волны в неоднородном течении с вертикальным сдвигом скорости

В линейной постановке рассмотрена двумерная задача о стационарных внутренних гравитационных волнах в течении двухслойной жидкости с вертикальным сдвигом скорости. Для трех модельных непрерывных распределений скорости течения найдены аналитические решения и условия существования внутренних волн. Показано, что внутренние волны существуют только в определенных диапазонах значений параметров течения и плотностной стратификации. При малой толщине верхнего слоя и слабой стратификации периодические внутренние волны не образуются. Волновая скорость максимальна на границе раздела слоев. Ее убывание при удалении от скачка плотности зависит от сдвигов скорости течения. Как правило, усиление сдвигов приводит к более медленному пространственному затуханию волнового поля. Длина внутренней волны существенно уменьшается с ростом относительного перепада плотности между слоями. При постоянном полном потоке изменение скорости течения по глубине приводит к увеличению длины волны в два и более раз по сравнению с течением без сдвига скорости.

**Ключевые слова:** течения с вертикальным сдвигом скорости, жидкость двухслойная, волны внутренние, волны свободные, решения аналитические, решения численные.

**Введение.** Круг задач, связанных с распространением волн в сдвиговых гидродинамических течениях, очень широк [1 – 3]. Течения с вертикальным сдвигом скорости существенно влияют на динамику внутренних волн в Мировом океане [1, 2]. Вертикальные сдвиги скорости являются источником неустойчивости течения [4], изменения условий генерации, горизонтальной и вертикальной структуры волновых полей [5 – 10].

Первая работа, показавшая существенное влияние течений на динамику внутренних волн в двухслойных потоках, выполнена Г. Гельмгольцем [11]. Во многих случаях в моделях задавались многослойные распределения плотности и линейные (постоянный сдвиг скорости) или кусочно-линейные распределения горизонтальной скорости течения по вертикали [5 – 9, 12].

Изучение динамики стратифицированной жидкости с кусочно-постоянной плотностью имеет приложение к задачам океанологии. Важной особенностью таких движений является развитие внутренних волн за счет передачи импульса от одного слоя к другому. Простейшая модель (аппроксимация) вертикальной плотностной стратификации морской среды – двухслойное распределение плотности [1, 2], которое в зависимости от глубины залегания границы раздела и перепада плотности между слоями позволяет моделировать сезонный или основной пикноклин. Задание в слоях горизонтальных сдвиговых течений приводит к простейшей модели стратифицированного

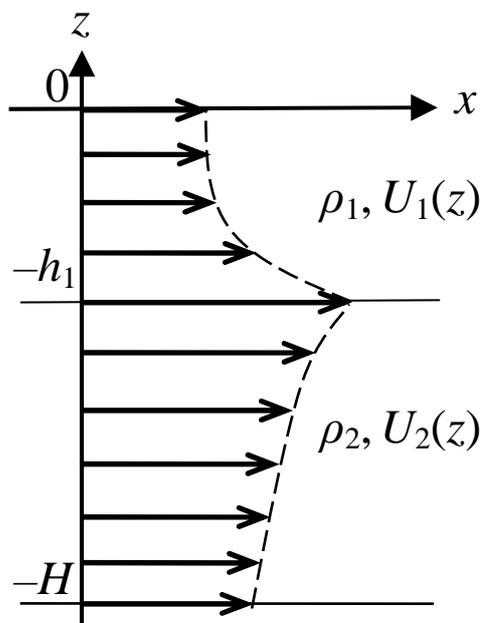
течения с вертикальным сдвигом скорости. Именно такая модель используется ниже для анализа стационарных внутренних волн в сдвиговых течениях.

В настоящей статье для трех типов вертикальных распределений скорости течения в двухслойной жидкости бесконечной глубины найдены аналитические решения задачи и на их основе рассмотрены свойства и условия существования внутренних волн, зависимости длин и вертикальной структуры внутренних волн от параметров задачи. Ранее аналогичное исследование было выполнено авторами для однородного течения с вертикальным сдвигом скорости [13].

**Математическая постановка задачи.** В вертикальной плоскости  $Oxz$ , где  $x$  – горизонтальная,  $z$  – вертикальная координата вдоль направленной вертикально вверх оси  $Oz$ , отсчитываемой от невозмущенного положения свободной поверхности, рассматривается горизонтальный поток  $(U(z), 0)$  идеальной несжимаемой двухслойной жидкости постоянной глубины  $H$  (рис. 1). Толщины слоев  $h_1$  и  $h_2$  постоянны, скорость течения

$$U = U_1(z) \quad (-h_1 \leq z \leq 0), \quad U = U_2(z) \quad (-H \leq z \leq -h_1),$$

плотность верхнего слоя равна  $\rho_1$ , нижнего –  $\rho_2$ ,  $H = h_1 + h_2$ . Вертикальное распределение скорости течения изменяется непрерывно при пересечении границы раздела слоев, то есть  $U_1(-h_1 + 0) = U_2(-h_1 - 0)$ .



Р и с. 1. Схема задачи

Будем исследовать стационарные внутренние волны в таком сдвиговом течении в рамках общей линейной теории. Кроме этого, воспользуемся приближением твердой крышки, предполагающим замену свободной поверхности горизонтальной плоскостью. Оно позволяет отфильтровать поверхностные волны.

При сделанных предположениях стационарные свободные внутренние волны в сдвиговом течении в области  $-\infty < x < +\infty$ ,  $-H < z < 0$  описываются системой шести линеаризованных относительно среднего течения ( $U(z)$ , 0) уравнений с зависящими от вертикальной координаты  $z$  коэффициентами:

$$U_j \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} + \frac{dU_j}{dz} \bar{w}_j = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial x} \quad (j=1, 2), \quad (1)$$

$$U_j \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_j} \frac{\partial \bar{p}_j}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial z} = 0, \quad (3)$$

где  $\bar{u}_j(x, z)$  – малые возмущения горизонтальной скорости потока;  $\bar{w}_j(x, z)$  – вертикальная скорость в верхнем ( $j = 1$ ) и нижнем ( $j = 2$ ) слоях;  $\bar{p}_j(x, z)$  – динамические возмущения гидростатического давления жидкости в слоях.

Систему уравнений (1) – (3) необходимо дополнить граничными условиями. На поверхности  $z = 0$  и на дне бассейна  $z = -H$  при всех  $x \in (-\infty, +\infty)$  должны выполняться условия непротекания жидкости:

$$\bar{w}_1 = 0 \quad (z=0), \quad \bar{w}_2 = 0 \quad (z=-H). \quad (4)$$

На границе раздела слоев  $z = -h_1$  необходимо задать два условия согласования решений в слоях – кинематическое и динамическое. Первое условие

$$\bar{w}_1(-h_1) = \bar{w}_2(-h_1) \quad (5)$$

вытекает из пары линеаризованных кинематических соотношений

$$\bar{w}_j = U_j(-h_1) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (z = -h_1) \quad (6)$$

на границе раздела слоев, где  $\zeta(x)$  – смещения границы раздела слоев от горизонтального положения  $z = -h_1$ . Динамическое условие означает непрерывность полного давления жидкости при пересечении границы слоев  $z = -h_1$ :

$$\bar{p}_1|_{z=-h_1} - \rho_1 g \zeta = \bar{p}_2|_{z=-h_1} - \rho_2 g \zeta, \quad (7)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

**Переход к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.** В рамках задачи (1) – (5), (7) рассмотрим гармонические по  $x$  стационарные внутренние волны, имеющие вид

$$\{\bar{u}_j, \bar{p}_j, \zeta\} = \{u_j(z), p_j(z), a\} \cos kx, \quad \bar{w}_j = w_j(z) \sin kx, \quad (8)$$

где  $k$  – подлежащее нахождению волновое число;  $u_j, w_j, p_j$  – неизвестные амплитудные функции;  $a$  – константа. Подстановка выражений (8) в задачу

(1) – (5), (7) и исключение из полученных соотношений всех неизвестных функций, кроме  $w_{1,2}$ , приводит к краевой задаче на собственные значения  $k$  и соответствующие им распределения по  $z$  амплитудных функций полей вертикальной скорости в слоях:

$$w_1'' - [k^2 + \alpha_1(z)]w_1 = 0 \quad (-h_1 < z < 0), \quad (9)$$

$$w_2'' - [k^2 + \alpha_2(z)]w_2 = 0 \quad (-H < z < -h_1), \quad (10)$$

$$w_1(0) = 0, \quad (11)$$

$$w_1(-h_1) = w_2(-h_1), \quad w_2'(-h_1) - \eta w_2(-h_1) - \gamma w_1'(-h_1) = 0, \quad (12)$$

$$w_2(-H) = 0, \quad (13)$$

где штрих означает производную по переменной  $z$ ,

$$\alpha_j = \frac{U_j''(z)}{U_j(z)},$$

$$\gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \eta = \frac{\varepsilon g}{U_2^2(-h_1)} + \frac{U_2'(-h_1)}{U_2(-h_1)} - \frac{\gamma U_1'(-h_1)}{U_2(-h_1)}, \quad \varepsilon = 1 - \gamma.$$

Будем предполагать, что скорость течения не изменяет своего направления ( $U_j(z) > 0$ ) при всех  $-H \leq z \leq 0$ , а распределения горизонтальной скорости течения в слоях гладкие. Задача (9) – (13) является основной для последующего анализа внутренних волн в двухслойных сдвиговых течениях. Она представляет собой краевую задачу для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на собственные значения  $\mu = k^2$ .

Докажем, что значения  $\mu$  в задаче (9) – (13) могут быть только вещественными. Произведем с уравнениями (9) и (10) следующие операции:

$$\int_{-h_1}^0 [(9) \cdot w_1^* - (9)^* \cdot w_1] dz = 0, \quad \int_{-H}^{-h_1} [(10) \cdot w_2^* - (10)^* \cdot w_2] dz = 0,$$

где звездочка – знак комплексного сопряжения. После одного интегрирования по частям с учетом (11) и (13) приходим к равенствам

$$(w_1^* w_1 - w_1^* w_1) \Big|_{z=-h_1} + (\mu^* - \mu) \int_{-h_1}^0 |w_1|^2 dz = 0, \quad (14)$$

$$(w_2^* w_2 - w_2^* w_2) \Big|_{z=-h_1} + (\mu^* - \mu) \int_{-H}^{-h_1} |w_2|^2 dz = 0. \quad (15)$$

Исключая  $w_2(-h_1)$  и  $w_2'(-h_1)$  из (15) с использованием граничных условий (12), получим с учетом (14) равенство

$$(\mu^* - \mu) \left( \gamma \int_{-h_1}^0 |w_1|^2 dz + \int_{-H}^{-h_1} |w_2|^2 dz \right) = 0. \quad (16)$$

Из (16) следует, что  $\mu^* = \mu$ , то есть все собственные числа  $\mu = k^2$  являются вещественными. Таким образом, для стационарных волн вида (8) значения  $k$  могут быть либо вещественными ( $\mu > 0$ ), либо чисто мнимыми ( $\mu < 0$ ). Чисто мнимые значения  $k = \pm i\sqrt{|\mu|}$  соответствуют неустойчивым волновым режимам (экспоненциальный рост по  $x$  амплитуд внутренних волн). В дальнейшем будем рассматривать только вещественные значения  $k$ , соответствующие периодическим по  $x$  волнам.

**Распределения скорости течения, допускающие аналитические решения задачи.** Рассмотрим некоторые вертикальные распределения горизонтальной скорости двухслойного течения, для которых решение задачи (9) – (13) находится аналитически и выражается через элементарные функции.

Предположим, что распределения скорости сдвигового течения таковы, что  $\alpha_j = \text{const}$  для  $j = 1, 2$ . Введем величины  $k_j^2 = k^2 + \alpha_j$ . Решение задачи (9) – (13) записывается в виде

$$\begin{aligned} u_1(z) &= -A \frac{k_1}{k} \frac{\text{ch}k_1 z}{\text{sh}k_1 h_1}, & u_2(z) &= A \frac{k_2}{k} \frac{\text{ch}k_2(z+H)}{\text{sh}k_2 h_2}, \\ w_1(z) &= -A \frac{\text{sh}k_1 z}{\text{sh}k_1 h_1}, & w_2(z) &= A \frac{\text{sh}k_2(z+H)}{\text{sh}k_2 h_2}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$a = -\frac{A}{kU_2(-h_1)},$$

здесь  $A$  – произвольная константа; волновое число  $k$  должно удовлетворять трансцендентному уравнению

$$\eta - \frac{k_2}{\text{th}k_2 h_2} = \gamma \frac{k_1}{\text{th}k_1 h_1}. \quad (18)$$

В тех случаях, когда  $k_1^2 < 0$  (это возможно только при  $\alpha_1 < 0$ ) и/или  $k_2^2 < 0$  (возможно только при  $\alpha_2 < 0$ ), необходимо положить в формулах (17) и (18)  $k_1 = \pm i|k_1|$  и/или  $k_2 = \pm i|k_2|$ . Тогда соответствующие гиперболические функции можно заменить на тригонометрические. В дальнейшем рассматриваются распределения  $U_{1,2}(z)$ , для которых  $k_{1,2}^2 > 0$  при всех  $k \geq 0$ , то есть  $\alpha_j \geq 0$ .

Левая часть уравнения (18) – строго монотонно убывающая функция волнового числа  $k > 0$ , правая – строго монотонно возрастающая функция  $k$ . Следовательно, уравнение (18) может иметь только один корень, который

существует при выполнении неравенства (условие существования внутренних волн)

$$\eta - \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\operatorname{th}\sqrt{\alpha_2}h_2} > \gamma \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\operatorname{th}\sqrt{\alpha_1}h_1}. \quad (19)$$

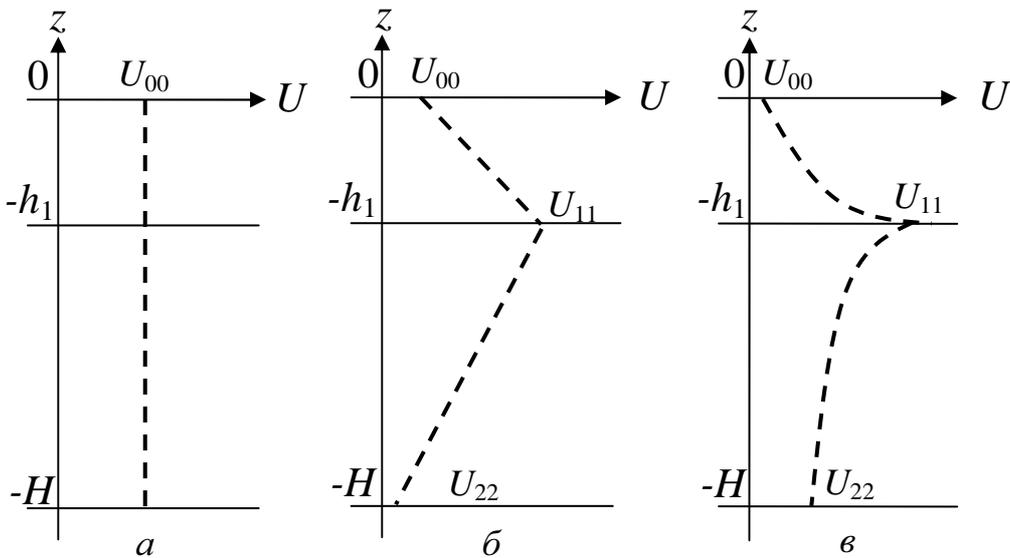
Для удобства введем обозначения:  $U_{00} = U_1(0) > 0$  – скорость течения на верхней границе потока;  $U_{11} = U_1(-h_1) > 0$  – скорость течения на границе раздела слоев;  $U_{22} = U_2(-H) > 0$  – скорость течения на дне бассейна;  $r_1 = U_{11}/U_{00}$  – отношение скоростей течения на границах верхнего слоя;  $r_2 = U_{11}/U_{22}$  – аналогичное отношение скоростей для нижнего слоя.

Течение без сдвига скорости [2]. В этом случае  $U_f(z) \equiv U_{00}$  (рис. 2, а). Решение (17) принимает вид

$$u_1(z) = -A \frac{\operatorname{ch}kz}{\operatorname{sh}kh_1}, \quad u_2(z) = A \frac{\operatorname{ch}k(z+H)}{\operatorname{sh}kh_2},$$

$$w_1(z) = -A \frac{\operatorname{sh}kz}{\operatorname{sh}kh_1}, \quad w_2(z) = A \frac{\operatorname{sh}k(z+H)}{\operatorname{sh}kh_2},$$

$$a = -\frac{A}{kU_{00}}.$$



**Р и с. 2.** Вертикальные распределения скорости течения, допускающие аналитические решения

Волновое число  $k > 0$  удовлетворяет уравнению (18), которое записывается в форме

$$\frac{\varepsilon g}{U_{00}^2} - \frac{k}{\operatorname{th}kh_2} = \frac{\gamma k}{\operatorname{th}kh_1}.$$

Условие существования волн упрощается:

$$U_{00}^2 < \frac{\varepsilon g h_1 h_2}{H - \varepsilon h_2}.$$

Приближенно  $U_{00} < C = \sqrt{\varepsilon g h_1 h_2 / H}$ , где  $C$  – скорость распространения длинных волн в двухслойной жидкости [2].

Течение с линейными распределениями скорости в слоях [2, 9, 12]. Предположим, что

$$U_1(z) = c_1 z + U_{00} \quad (-h_1 \leq z \leq 0),$$

$$U_2(z) = c_2(z + h_1) + U_{11} \quad (-H \leq z \leq -h_1),$$

где  $c_1 = (U_{00} - U_{11})/h_1$ ,  $c_2 = (U_{11} - U_{22})/h_2$ . Схематически это течение показано на рис. 2, б.

Решение (17) записывается в виде

$$u_1(z) = -A \frac{\operatorname{ch} k z}{\operatorname{sh} k h_1}, \quad u_2(z) = A \frac{\operatorname{ch} k(z + H)}{\operatorname{sh} k h_2},$$

$$w_1(z) = -A \frac{\operatorname{sh} k z}{\operatorname{sh} k h_1}, \quad w_2(z) = A \frac{\operatorname{sh} k(z + H)}{\operatorname{sh} k h_2},$$

$$a = -\frac{A}{k U_{11}}.$$

Искомое волновое число  $k > 0$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\varepsilon g}{U_{11}^2} - \frac{\gamma c_1 - c_2}{U_{11}} - \frac{k}{\operatorname{th} k h_2} = \gamma \frac{k}{\operatorname{th} k h_1}.$$

Оно имеет корень при выполнении условия

$$\frac{\gamma}{r_1 h_1} + \frac{1}{r_2 h_2} < \frac{\varepsilon g}{U_{11}^2}. \quad (20)$$

Течение с экспоненциальными распределениями скорости в слоях. Зададим распределение скорости течения

$$U_1(z) = U_{00} e^{-\delta_1 z} \quad (-h_1 \leq z \leq 0),$$

$$U_2(z) = U_{11} e^{\delta_2(z+h_1)} \quad (-H \leq z \leq -h_1),$$

где  $\delta_j = \ln r_j / h_j$  (рис. 2, в). Решение задачи имеет вид (17) с  $k_j = \sqrt{k^2 + \delta_j^2}$ .

Волновое число  $k > 0$  находится из уравнения

$$\frac{\varepsilon g}{U_{11}^2} + \gamma \delta_1 + \delta_2 - \frac{k_2}{\operatorname{th} k_2 h_2} = \gamma \frac{k_1}{\operatorname{th} k_1 h_1}, \quad (21)$$

являющегося следствием (18). Условие существования положительных корней у уравнения (21) записывается в виде

$$\frac{\gamma \ln r_1}{h_1(r_1^2 - 1)} + \frac{\ln r_2}{h_2(r_2^2 - 1)} < \frac{\varepsilon g}{2U_{11}^2}. \quad (22)$$

Неравенство (22) – это условие существования внутренних волн в течении с экспоненциальными распределениями скорости в слоях.

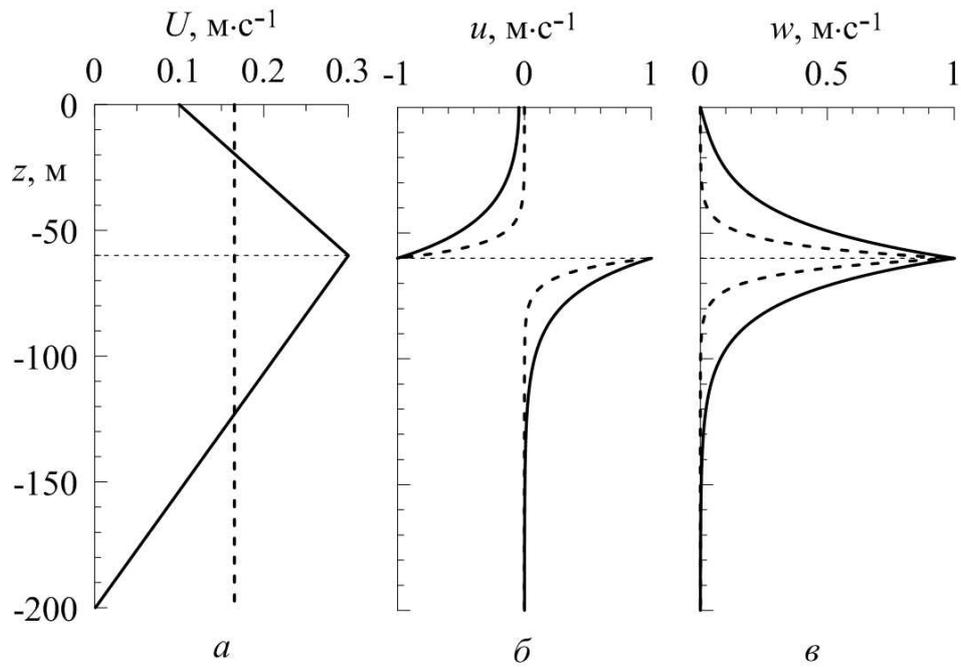
Комбинированные распределения горизонтальной скорости течения.

Аналитические решения задачи можно также найти, используя в различных слоях перечисленные выше, но не совпадающие по виду распределения скорости течения. Кроме этого, как и в потоке однородной жидкости [13], можно задать изменение  $U_j(z)$  в одном или двух слоях в виде гиперболических функций  $\text{sh } \delta(z - z_0)$  и  $\text{ch } \delta(z - z_0)$ . Для сложных распределений скорости течения необходимо численно решать краевую задачу (9) – (13) на собственные значения  $k > 0$ .

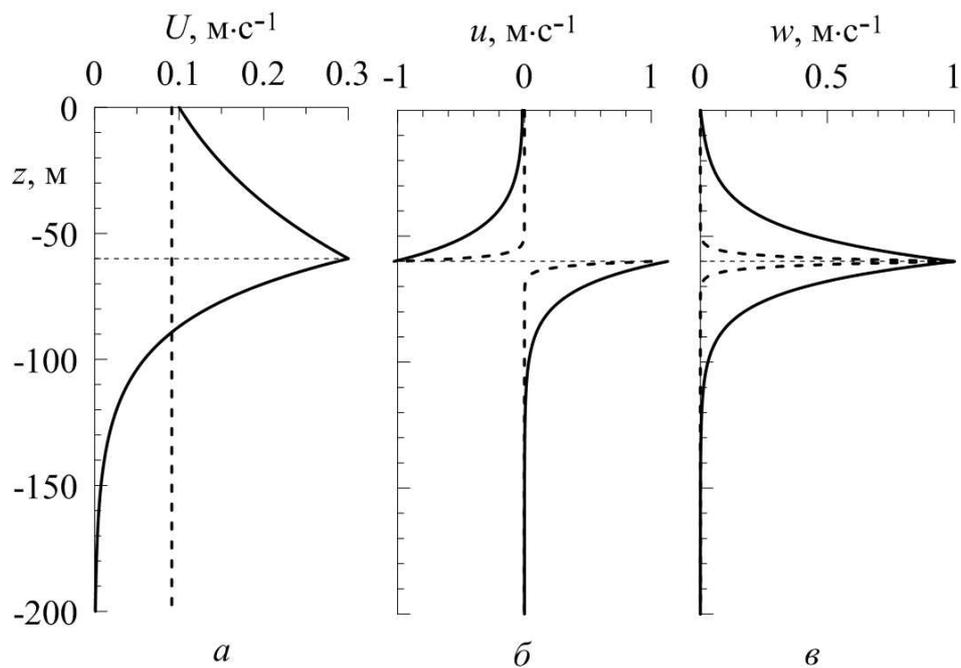
**Характеристики внутренних волн для модельных распределений скорости течения.** Поскольку рассматриваются свободные внутренние волны в двухслойном сдвиговом течении, их основными характеристиками являются условия генерации, длина волны и вертикальная структура поля бароклинных волновых скоростей.

Характерные вертикальные распределения проекций волновой скорости для внутренней волны показаны на рис. 3 и 4. Условия существования внутренних волн (20) и (22) в этих случаях выполняются. Для каждого распределения скорости течения проводится сопоставление с течением, скорость которого постоянна по глубине, а полный поток жидкости равен потоку соответствующего сдвигового течения (рис. 3 и 4).

Для всех распределений скорости течения вертикальная структура волнового поля качественно одинаковая. Горизонтальная волновая скорость (рис. 3, б и 4, б) изменяет знак на противоположный при пересечении границы раздела слоев, вертикальная скорость во внутренней волне (рис. 3, в и 4, в) имеет постоянный знак по глубине и принимает наибольшее значение на границе раздела слоев. Сдвиг скорости фонового течения при сохранении полного потока жидкости вызывает существенно более медленное затухание волнового поля при удалении от скачка плотности. На рис. 3 длины волн  $\lambda$  для течения с постоянной по глубине скоростью и сдвигового течения равны 35,04 и 98,86 м, на рис. 4 – 10,68 и 80,62 м соответственно. Сдвиг скорости течения существенно влияет на длины внутренних волн. Заметим, что в длинной внутренней волне [2] горизонтальная скорость постоянна в каждом слое, а вертикальная изменяется в слоях линейно, принимая нулевые значения на верхней и нижней границах течения.

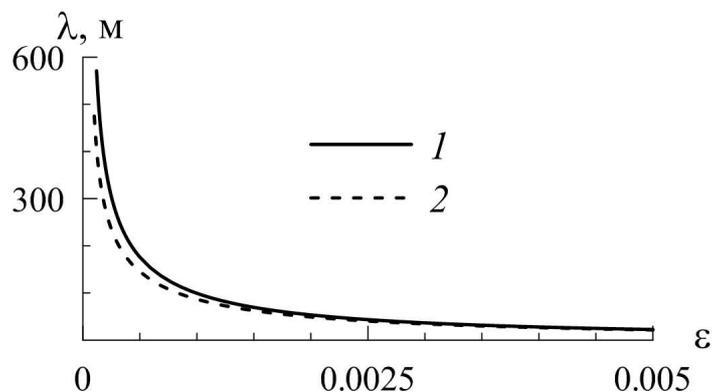


**Р и с. 3.** Вертикальные распределения скорости течения (*a*), горизонтальной (*б*) и вертикальной (*в*) скоростей во внутренней волне при  $\varepsilon = 0,001$ . Течение с линейными распределениями скорости в слоях – сплошные линии, течение без сдвига скорости – штриховые

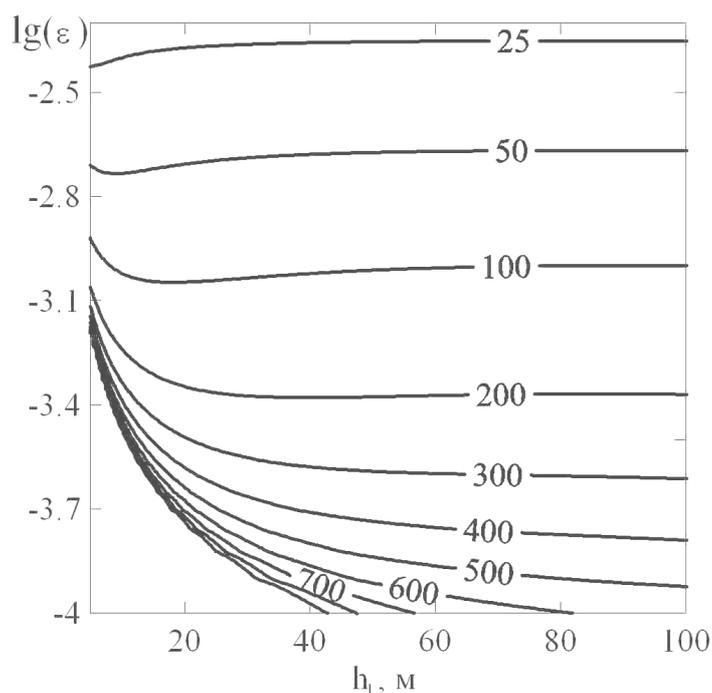


**Р и с. 4.** То же, что на рис. 3, для экспоненциальных распределений скорости течения в слоях  
 ISSN 0233-7584. Мор. гидрофиз. журн., 2012, № 1

Длина внутренней волны существенно зависит от относительного перепада плотности между слоями  $\varepsilon$ , что демонстрирует для двух типов сдвиговых течений рис. 5. Длины волн наибольшие при малых значениях  $\varepsilon$ , причем усиление кривизны вертикального профиля скорости фонового течения в слоях вызывает уменьшение длины волны при одних и тех же величинах скорости течения на верхней и нижней границах потока, а также на границе раздела слоев.



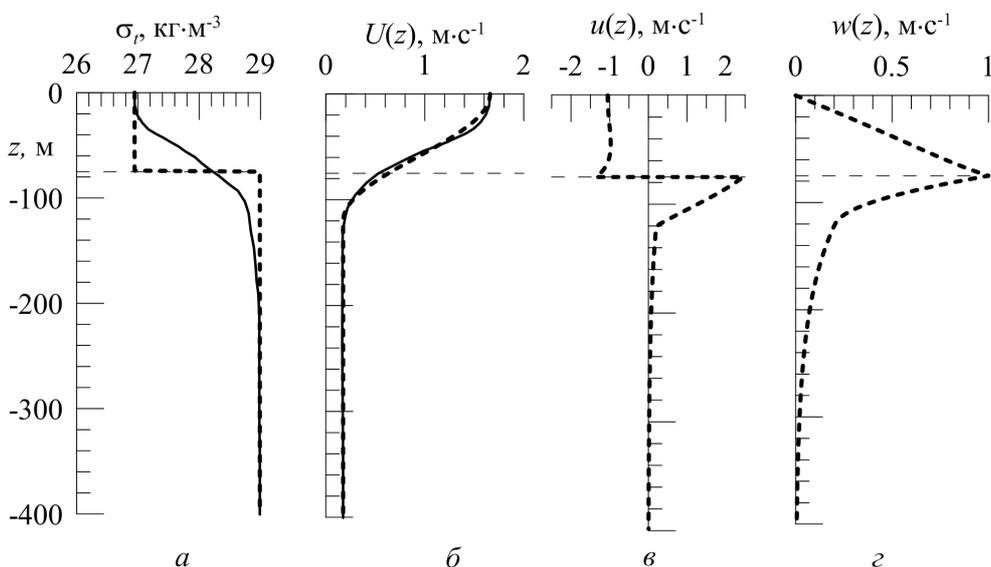
**Р и с. 5.** Зависимости длины внутренней волны от относительного перепада плотности между слоями при линейном (1) и экспоненциальном (2) распределениях скорости течения в слоях. Параметры течений:  $h_1 = 60$  м,  $H = 200$  м,  $U_{00} = 0,1$  м·с<sup>-1</sup>,  $U_{11} = 0,3$  м·с<sup>-1</sup>,  $U_{22} = 0,01$  м·с<sup>-1</sup>



**Р и с. 6.** Зависимости длины внутренней волны (в м) от глубины верхнего слоя жидкости и относительного перепада плотности при линейных распределениях скорости течения в слоях. Параметры течений:  $U_{00} = 0,1$  м·с<sup>-1</sup>,  $U_{11} = 0,3$  м·с<sup>-1</sup>,  $U_{22} = 0,001$  м·с<sup>-1</sup>

Уменьшение длины волны с ростом относительного перепада плотности между слоями  $\varepsilon$  следует также из рис. 6. Некоторое увеличение длины волны происходит при уменьшении глубины верхнего слоя. Область графика в нижнем левом углу, где кривые отсутствуют, соответствует значениям  $h_1$  и  $\varepsilon$ , для которых внутренняя волна не образуется, то есть не выполняется условие (20).

Рассмотрим применение двухслойной модели течения для оценки длин стационарных волн в реальных океанических условиях.



**Р и с. 7.** Распределения условной плотности  $\sigma_t$  (а) и средней скорости течения  $U(z)$  (б) в Гибралтарском проливе 12 апреля 1986 г. [14], а также вертикальные распределения проекций волновых скоростей во внутренней волне (в, г), рассчитанные с использованием двухслойной аппроксимации непрерывного распределения плотности (штриховая линия)

На рис. 7, а, б представлены распределения условной плотности и скорости течения в Гибралтарском проливе (сплошные кривые), измеренные 12 апреля 1986 г. при глубине в районе исследований  $H = 890$  м [14]. Подходящая двухслойная аппроксимация распределения плотности и аналитическая аппроксимация распределения скорости течения показаны на рис. 7, а, б штриховыми линиями. Параметры двухслойной плотностной стратификации таковы:  $h_1 = 75$  м,  $\rho_1 = 1026,94$  кг·м<sup>-3</sup>,  $\rho_2 = 1028,99$  кг·м<sup>-3</sup>. Аппроксимация распределения скорости течения задавалась по формулам

$$U(z) = \begin{cases} U_1(z), & -h_1 \leq z \leq 0, \\ U_2(z), & -H \leq z \leq -h_1, \end{cases}$$

$$U_1(z) = A_1 \cos\left(\frac{\pi z}{h^*}\right) + A_2, \quad U_2(z) = \begin{cases} U_1(z), & -h^* \leq z \leq -h_1, \\ U_{22}, & -H \leq z \leq -h^*, \end{cases}$$

где  $A_1 = 0,743 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ ,  $A_2 = 0,916 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ ,  $U_{22} = 0,174 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ ,  $h^* = 120 \text{ м}$  ( $U_{00} = 1,659 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$ ).

Собственные значения  $k > 0$  находились из краевой задачи (9) – (13) методом стрельбы, причем уравнения (9) и (10) решались методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности [15]. Найденная таким способом длина внутренней волны  $\lambda$  равна 489,9 м. Распределения волновых скоростей для этого случая, рассчитанные для двухслойного потока, приведены на рис. 7, в, г. Основные волновые возмущения локализуются в области границы раздела слоев.

**Заключение.** В общей линейной постановке рассмотрена плоская задача о свободных внутренних гравитационных волнах в течении двухслойной жидкости с изменяющимися по вертикали скоростями течения в слоях. Волны предполагаются стационарными, что характерно, в частности, для подветренных внутренних волн. Нахождение длины генерируемой внутренней волны и соответствующих распределений горизонтальной и вертикальной скоростей сведено к решению краевой задачи на собственные значения. Для трех модельных знакопостоянных распределений горизонтальной скорости течения в слоях найдены аналитические решения и условия существования внутренних волн.

Показано, что для рассмотренных вертикальных распределений скорости двухслойного течения внутренние волны могут существовать только в определенных диапазонах значений параметров плотностной стратификации и распределения скорости фонового течения. В частности, внутренние волны не генерируются при слабых стратификациях и относительно малых глубинах верхнего слоя жидкости.

Для всех рассмотренных распределений скорости течения вертикальная структура волнового поля качественно одинаковая: горизонтальная волновая скорость имеет разные знаки в слоях, а вертикальная скорость во внутренней волне имеет постоянный знак по глубине и принимает наибольшее значение на границе раздела слоев. Характер затухания волновых скоростей при удалении от скачка плотности зависит от сдвигов скорости течения: как правило, усиление сдвигов скорости ослабляет такое затухание волнового поля.

Длина внутренней волны существенно зависит от относительного перепада плотности между слоями. Ее значения существенно возрастают при уменьшении такого перепада плотности. Зависимость длины волны от глубины верхнего слоя течения выражена слабее. При одном и том же полном потоке сдвиг скорости фонового течения приводит к увеличению длины волны в два и более раз.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Краусс В. Внутренние волны. – Л.: Гидрометеоздат, 1968. – 272 с.
2. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 2. – М.: Мир, 1981. – 365 с.
3. Степаняц Ю.А., Фабрикант А.Л. Распространение волн в сдвиговых гидродинамических течениях // Успехи физических наук. – 1989. – 159, вып. 1. – С. 83 – 123.
4. Дикий Л.А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. – Л.: Гидрометеоздат, 1976. – 108 с.
5. Букатов А.Е., Власенко В.И., Пухтяр Л.Д. и др. Динамика поверхностных и внутренних волн. – Киев: Наук. думка, 1988. – 192 с.
6. Букатов А.Е., Власенко В.И., Стацук Н.М. и др. Поверхностные и внутренние гравитационные волны в океане. – Киев: Наук. думка, 1989. – 144 с.
7. Черкесов Л.В., Власенко В.И., Стацук Н.М. и др. Гидродинамика морских волн. – Киев: Наук. думка, 1992. – 162 с.
8. Суворов А.М., Тананаев А.Н. О влиянии вертикальной структуры течения на развитие пространственных внутренних волн // Морские гидрофизические исследования. – 1979. – № 4. – С. 63 – 68.
9. Суворов А.М. Генерация внутренних волн в потоке двухслойной жидкости со сдвигом скорости // Цунами и внутренние волны. – Севастополь: МГИ АН УССР, 1976. – С. 170 – 178.
10. Puri K.K. Waves on a shear flow // Bull. Austral. Math. Soc. – 1974. – 11. – P. 263 – 277.
11. Helmholtz H.V. Über diskontinuierliche flüssigkeitsbewegungen. – Berlin: Monatsber. der Kgl. Preuss. Akad. Wiss., 1868. – S. 215 – 228.
12. Berkofsky L. Internal gravity-vorticity lee waves over mountains // J. Geophys. Res. – 1960. – 65, № 11. – P. 3685 – 3692.
13. Билюнас М.В., Доценко С.Ф. Стационарные волны в потоке однородной жидкости с вертикальным сдвигом скорости // Морской гидрофизический журнал. – 2010. – № 4. – С. 15 – 29.
14. Watson G. Internal waves in a stratified shear flow: the Strait of Gibraltar // J. Phys. Oceanogr. – 1994. – 24, № 2. – P. 509 – 517.
15. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

Морской гидрофизический институт НАН Украины,  
Севастополь  
E-mail: sf\_dotsenko@mail.ru

Материал поступил  
в редакцию 18.11.10  
После доработки 06.12.10

АНОТАЦІЯ У лінійній постановці розглянута двовимірна задача про стаціонарні внутрішні гравітаційні хвилі у течії двошарової рідини з вертикальним зсувом швидкості. Для трьох модельних неперервних розподілів швидкості течії знайдені аналітичні рішення та умови існування внутрішніх хвиль. Показано, що внутрішні хвилі існують тільки в певних діапазонах значень параметрів течії та щільнісної стратифікації. Якщо товщина верхнього шару мала і стратифікація слабка, періодичні внутрішні хвилі не утворюються. Хвильова швидкість максимальна на межі розділу шарів. Її зменшення при віддаленні від стрибка щільності залежить від зсувів швидкості течії. Як правило, посилення зсувів призводить до більш повільного просторового загасання хвильового поля. Довжина внутрішньої хвилі суттєво зменшується із зро-

станням відносного перепаду щільності між шарами. При постійному повному потоці зміна швидкості течії з глибиною призводить до збільшення довжини хвилі в два і більше разів у порівнянні з течією без зсуву швидкості.

**Ключові слова:** течії з вертикальним зсувом швидкості, рідина двошарова, хвилі внутрішні, хвилі вільні, рішення аналітичні, рішення числові.

**ABSTRACT** Two-dimensional problem on stationary internal gravity waves in a flow of two-layer liquid with vertical shear of velocity is considered in the linear statement. The analytical solutions and the conditions providing existence of internal waves are found for three model continuous distributions of current velocity. It is shown that internal waves exist only within the specific ranges of current and density stratification parameters. If the upper layer thickness is small and stratification is weak periodic internal waves are not generated. The wave velocity is maximal on the layers' interface. Its attenuation varying with distance from the density drop depends on the current velocity shear. As a rule, growth of current shifts results in a slower decrease of the wave field. The internal wavelength significantly decreases with growth of relative density difference between the layers. At constant full flow the current velocity variation over depth leads to a wavelength increase by two and more times as compared to the case of a current without shear.

**Keywords:** flow with vertical velocity shear, two-layer fluid, internal waves, free waves, analytical solutions, numerical solutions.