УДК 517.9

А. А. Бойчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЕДИНСТВЕННОГО ИНВАРИАНТНОГО ТОРА ЛИНЕЙНОГО РАСШИРЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Under the assumption that a linear homogeneous system defined on the direct product of a torus and the Euclidean space is exponentially dichotomous on semiaxes, we obtain the necessary and sufficient condition for the existence of unique invariant torus of the corresponding inhomogeneous linear system.

У припущенні, що лінійна однорідна система, визначена на прямому добутку тора та евклідового простору, є експоненціально-дихотомічною на півосях, отримано необхідну й достатню умову існування єдиного інваріантного тора відповідної неоднорідної лінійної системи.

Постановка задачи. Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

заданную в прямом произведении m-мерного тора $\mathcal{T}_m$ и евклидового пространства R^n в предположении, что $a(\varphi) \in C^1(\mathcal{T}_m)$; $P(\varphi), f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$; $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathcal{T}_m$; $x = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. Известно, что задача о существовании и построении инвариантного тора $x = u(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, системы (1) при произвольном значении $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ может быть решена с помощью функции Грина – Самойленко [1, 2]. Для единственности последней при произвольном значении $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ необходимо отсутствие вырожденных инвариантных торов у однородной системы

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x. \tag{2}$$

Это означает, что при любой $\varphi \in \mathcal{T}_m$ система

$$\frac{dx}{dt} = P\big(\varphi_t(\varphi)\big)x \tag{3}$$

экспоненциально-дихотомична (э-дихотомична) на всей действительной оси $R = (-\infty, +\infty)$, т. е. существует проектор $C(\varphi) = C^2(\varphi)$ и не зависящие от φ, τ константы $K \geq 1$, $\alpha > 0$ такие, что

$$\begin{gathered} \big\|\Omega_0^t(\varphi)C(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)\big\| \leq Ke^{-\alpha(t-\tau)}, \quad t \geq \tau, \\ \big\|\Omega_0^t(\varphi)(I - C(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi)\big\| \leq Ke^{-\alpha(\tau-t)}, \quad \tau \geq t, \end{gathered} \tag{4}$$

для любых $t, \tau \in R$; $\Omega_\tau^t(\varphi)$ $\big(\Omega_\tau^\tau(\varphi) = I_n\big)$ — $(n \times n)$-мерная фундаментальная матрица системы (3); $\varphi_t(\varphi)$– решение задачи Коши $\dot\varphi = a(\varphi)$, $\varphi_0(\varphi) = \varphi$.

Предположим, что система (3) не является э-дихотомичной на всей оси R, однако э-дихотомична на полуосях R_+ и R_- с проекторами $C_+(\varphi)$ и $C_-(\varphi)$

$(C_{\pm}^2(\varphi) = C_{\pm}(\varphi))$ соответственно. Это означает [3], что для системы (3) выполнены условия типа (4) на полуосях. В этом случае и однородная система (2), и сопряженная к ней система могут иметь вырожденные инвариантные торы (критический случай). Поэтому возможна ситуация, когда система (1) имеет инвариантный тор, но не при произвольном значении $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$. В настоящей статье найдены необходимые и достаточные условия существования единственного инвариантного тора $x = u(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, системы (1) в этом случае, а также указан способ построения единственного инвариантного тора линейного расширения динамической системы (1) через проекторы $C_{\pm}(\varphi)$, определяющие э-дихотомию системы (3) на полуосях. Найдены необходимые и достаточные условия на неоднородности $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, определяющие инвариантное многообразие, которому должны принадлежать неоднородности $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ для существования искомого тора. Ранее такая задача была решена в предположении произвольности $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ в так называемом регулярном и слаборегулярном случаях [2], когда система (3) э-дихотомична или э-трихотомична на всей оси R.

Ограниченные на всей оси решения. Непосредственной проверкой легко убедиться [3 – 5], что при фиксированном $\varphi \in \mathcal{T}_m$ общее решение задачи

$$\frac{dx}{dt} = P\big(\varphi_t(\varphi)\big)x + f\big(\varphi_t(\varphi)\big), \tag{5}$$

ограниченное на полуосях R_+ и R_-, имеет вид

$$x(t,\varphi,\xi) = \begin{cases} \Omega_0^t(\varphi)C_+(\varphi)\xi + \displaystyle\int_0^t \Omega_\tau^t(\varphi)C_+(\varphi_\tau(\varphi))f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau - \\ \qquad - \displaystyle\int_t^\infty \Omega_\tau^t(\varphi)(I - C_+(\varphi_\tau(\varphi)))f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau, \quad t \geq 0, \\ \Omega_0^t(\varphi)(I - C_-(\varphi))\xi + \displaystyle\int_{-\infty}^t \Omega_\tau^t(\varphi)C_-(\varphi_\tau(\varphi))f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau - \\ - \displaystyle\int_t^0 \Omega_\tau^t(\varphi)\big(I - C_-(\varphi_\tau(\varphi))\big)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau, \quad t \leq 0, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$C_+(\varphi_\tau(\varphi)) = \Omega_0^\tau(\varphi)C_+(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi), \qquad C_-(\varphi_\tau(\varphi)) = \Omega_0^\tau(\varphi)C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi). \tag{7}$$

Здесь и ниже будем использовать известные соотношения [1]

$$\begin{gathered} \Omega_\tau^t\big(\varphi_s(\varphi)\big) = \Omega_{\tau+s}^{t+s}(\varphi), \qquad \Omega_\tau^t(\varphi)\Omega_s^\tau(\varphi) = \Omega_s^t(\varphi), \\ \big(\Omega_\tau^t(\varphi)\big)^{-1} = \Omega_t^\tau(\varphi), \qquad \varphi_\tau(\varphi_s(\varphi)) = \varphi_{\tau+s}(\varphi), \end{gathered} \tag{8}$$

справедливые для всех $t, \tau, s \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Решение (6) будет ограниченным на всей оси R, если векторная константа $\xi = \xi(\varphi) \in R^n$ удовлетворяет алгебраической системе, получаемой из (6) при $t = 0$:

$$\big[C_+(\varphi) - (I - C_-(\varphi))\big]\xi = \int\limits_{-\infty}^{0} C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau +$$

$$+\int\limits_{0}^{\infty} (I - C_+(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau. \tag{9}$$

Обозначим через $D(\varphi) = C_+(\varphi) - \big(I - C_-(\varphi)\big)$ $(n \times n)$-мерную матрицу, а через $D^+(\varphi)$ ее псевдообратную по Муру – Пенроузу [5]; $P_{N(D)}(\varphi)$ и $P_{N(D^*)}(\varphi)$ — $(n \times n)$-матрицы-ортопроекторы:

$$P_{N(D)}^2(\varphi) = P_{N(D)}(\varphi) = P_{N(D)}^*(\varphi),$$

$$P_{N(D^*)}^2(\varphi) = P_{N(D^*)}(\varphi) = P_{N(D^*)}^*(\varphi),$$

проектирующие R^n на ядро $N(D) = \ker D(\varphi)$ и коядро $N(D^*) = \ker D^*(\varphi)$ матрицы $D(\varphi)$;

$$P_{N(D^*)}(\varphi) = I - D(\varphi)D^+(\varphi), \qquad P_{N(D)}(\varphi) = I - D^+(\varphi)D(\varphi).$$

Система (9) разрешима тогда и только тогда, когда правая часть системы (9) принадлежит ортогональному дополнению $N^\perp(D^*(\varphi)) = \mathrm{Im}\,(D(\varphi))$ к подпространству $N(D^*(\varphi))$. Это означает, что

$$P_{N(D^*)}(\varphi)\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^{0} C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi) f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau +$$

$$+\int\limits_{0}^{\infty} (I - C_+(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi) f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau\Bigg\} = 0. \tag{10}$$

При этом общее решение системы (9), ограниченное на всей оси R, будет иметь вид (6) с константой $\xi = \xi(\varphi) \in R^n$, которая определяется из уравнения (9) следующим образом:

$$\xi = D^+(\varphi)\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^{0} C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau +$$

$$+\int\limits_{0}^{\infty} \big(I - C_+(\varphi)\big)\Omega_\tau^0(\varphi) f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau\Bigg\} + P_{N(D)}(\varphi)c, \quad c = c(\varphi) \in R^n. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (6), получаем, что при фиксированном $\varphi \in \mathcal{T}_m$ и неоднородности $f(\varphi_t(\varphi)) \in C(\mathcal{T}_m)$, удовлетворяющей условию (10), ограниченное на R решение системы (5) имеет вид

$$x(t,\varphi,c)=$$

$$=\Omega_0^t(\varphi)\begin{cases} C_+(\varphi)P_{N(D)}(\varphi)c+\int\limits_0^t C_+(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau- \\ \quad -\int\limits_t^\infty \big(I-C_+(\varphi)\big)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau+ \\ \quad +C_+(\varphi)D^+(\varphi)\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^0 C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau+ \\ \quad +\int\limits_0^\infty \big(I-C_+(\varphi)\big)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau\Bigg\}, \quad t\geq 0, \\ \big(I-C_-(\varphi)\big)P_{N(D)}(\varphi)c+\int\limits_{-\infty}^t C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau- \\ \quad -\int\limits_t^0 \big(I-C_-(\varphi)\big)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau+ \\ \quad +\big(I-C_-(\varphi)\big)D^+(\varphi)\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^0 C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau+ \\ \quad +\int\limits_0^\infty \big(I-C_+(\varphi)\big)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau\Bigg\}, \quad t\leq 0. \end{cases} \tag{12}$$

Поскольку $P_{N(D^*)}(\varphi)D(\varphi)=P_{N(D^*)}(\varphi)\big[C_+(\varphi)-(I-C_-(\varphi))\big]=0$, то

$$P_{N(D^*)}(\varphi)C_+(\varphi)=P_{N(D^*)}(\varphi)\big(I-C_-(\varphi)\big),$$

поэтому условие (10) эквивалентно одному из условий

$$\begin{gathered} P_{N(D^*)}(\varphi)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau=0, \\ P_{N(D^*)}(\varphi)\int\limits_{-\infty}^{\infty}(I-C_+(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau=0. \end{gathered} \tag{13}$$

Учитывая, что

$$\Big[C_+(\varphi)-\big(I-C_-(\varphi)\big)\Big]D^+(\varphi)=I-P_{N(D^*)}(\varphi),$$

получаем

$$C_+(\varphi)D^+(\varphi)\{\ldots\}-I\{\ldots\}=(I-C_-(\varphi))D^+(\varphi)\{\ldots\},$$

так как имеет место условие (10), $\{\ldots\}$ — выражение в (10).

Далее, поскольку $D(\varphi)P_{N(D)}(\varphi) = \big[C_+(\varphi) - (I - C_-(\varphi))\big]P_{N(D)}(\varphi) = 0$, то

$$C_+(\varphi)P_{N(D)}(\varphi) = \big(I - C_-(\varphi)\big)P_{N(D)}(\varphi).$$

Рассмотрим случай, когда однородная система (3) не имеет ограниченных на всей оси решений, т. е. выполнено условие

$$C_+(\varphi)P_{N(D)}(\varphi) = \big(I - C_-(\varphi)\big)P_{N(D)}(\varphi) = 0.$$

Тогда (12) можно переписать в виде

$$x(t,\varphi) = (G_t(f))(\varphi), \tag{14}$$

где оператор

$$\big(G_t(f)\big)(\varphi) = \Omega_0^t(\varphi)\begin{cases} \displaystyle\int_0^t C_+(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau - \\ \qquad \displaystyle - \int_t^\infty \big(I - C_+(\varphi)\big)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau + \\ \qquad \displaystyle + C_+(\varphi)D^+(\varphi)\Bigg\{\int_{-\infty}^0 C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau + \\ \qquad \displaystyle + \int_0^\infty \big(I - C_+(\varphi)\big)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau\Bigg\}, \quad t \geq 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^t C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau - \\ \qquad \displaystyle - \int_t^0 \big(I - C_-(\varphi)\big)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau + \\ \qquad \displaystyle + \big[C_+(\varphi)D^+(\varphi) - I\big]\Bigg\{\int_{-\infty}^0 C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau + \\ \qquad \displaystyle + \int_0^\infty \big(I - C_+(\varphi)\big)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau\Bigg\}, \quad t \leq 0, \end{cases}$$

будем называть обобщенным оператором Грина задачи об инвариантном торе системы (1).

Таким образом, при условии (13) решение, ограниченное на R, системы (5) при фиксированном $\varphi \in \mathcal{T}_m$ имеет вид (14).

Покажем, что выражение

$$x(0,\varphi) = u(\varphi) = \big(G_0(f)\big)(\varphi), \tag{15}$$

полученное из (14) при $t = 0$, определяет при любом $\varphi \in \mathcal{T}_m$ инвариантный тор системы (1).

Критерий существования инвариантного тора неоднородной системы. Ранее было показано, что при условии

$$P_{N(D^*)}(\varphi)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau = 0 \tag{16}$$

неоднородная система (5) имеет ограниченное на R решение вида (14) при фиксированном $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Покажем, что условие (16) на решениях $\varphi_t(\varphi)$ соответствующей задачи Коши определяет инвариантное множество. Для этого заменим φ на $\varphi_t(\varphi)$ и покажем, что условие (16) имеет место для любых $t \in R$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Учитывая соотношения (7) и (8), для матрицы $D(\varphi) = C_+(\varphi) - \big(I - C_-(\varphi)\big)$ получаем равенство

$$D\big(\varphi_t(\varphi)\big) = \Omega_0^t(\varphi)D(\varphi)\Omega_t^0(\varphi) \quad \forall t \in R, \quad \forall \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{17}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для любого $t \in R$ и любого $\varphi \in \mathcal{T}_m$ матрица

$$D^-\big(\varphi_t(\varphi)\big) = \big[\Omega_0^t(\varphi)D(\varphi)\Omega_t^0(\varphi)\big]^- = \Omega_0^t(\varphi)D^-(\varphi)\Omega_t^0(\varphi) \tag{18}$$

является обобщенно-обратной к матрице $D\big(\varphi_t(\varphi)\big)$ и удовлетворяет определяющим ее соотношениям [5]

$$\begin{gathered} D^-\big(\varphi_t(\varphi)\big)D\big(\varphi_t(\varphi)\big)D^-\big(\varphi_t(\varphi)\big) = D^-\big(\varphi_t(\varphi)\big), \\ D\big(\varphi_t(\varphi)\big)D^-\big(\varphi_t(\varphi)\big)D\big(\varphi_t(\varphi)\big) = D\big(\varphi_t(\varphi)\big). \end{gathered} \tag{19}$$

Из свойств обобщенно-обратной матрицы

$$\begin{gathered} D\big(\varphi_t(\varphi)\big)D^-\big(\varphi_t(\varphi)\big) = I - P_{N(D)}\big(\varphi_t(\varphi)\big), \\ D^-\big(\varphi_t(\varphi)\big)D\big(\varphi_t(\varphi)\big) = I - P_{N(D^*)}\big(\varphi_t(\varphi)\big) \end{gathered}$$

получаем выражения для проекторов $P_{N(D)}(\varphi_t(\varphi))$ и $P_{N(D^*)}(\varphi_t(\varphi))$ на ядро и коядро матрицы $D(\varphi)$ на решениях $\varphi_t(\varphi)$ соответствующей задачи Коши для любых $t \in R$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$:

$$\begin{gathered} P_{N(D)}\big(\varphi_t(\varphi)\big) = \Omega_0^t(\varphi)P_{N(D)}(\varphi)\Omega_t^0(\varphi) = \Omega_0^t(\varphi)\big[I - D^-(\varphi)D(\varphi)\big]\Omega_t^0(\varphi), \\ P_{N(D^*)}\big(\varphi_t(\varphi)\big) = \Omega_0^t(\varphi)P_{N(D^*)}(\varphi)\Omega_t^0(\varphi) = \Omega_0^t(\varphi)\big[I - D(\varphi)D^-(\varphi)\big]\Omega_t^0(\varphi). \end{gathered} \tag{20}$$

***Замечание* 1.** Проекторы $P_{N(D)}(\varphi)$ и $P_{N(D^*)}(\varphi)$ при фиксированном $\varphi \in \mathcal{T}_m$ в предыдущем пункте мы выбирали как ортопроекторы $P_{N(D)}(\varphi) = P_{N(D)}^*(\varphi)$, однако при замене φ на $\varphi_t(\varphi)$ эти проекторы утрачивают свойство $P_{N(D)}\big(\varphi_t(\varphi)\big) \neq \neq P_{N(D)}^*\big(\varphi_t(\varphi)\big)$ ортогонального проектирования. Соответственно матрица $D^-(\varphi)$, обобщенно-обратная к $D(\varphi)$ в этом случае (при фиксированном $\varphi \in \mathcal{T}_m$), была псевдообратной по Муру–Пенроузу, однако на решениях $\varphi_t(\varphi)$ для любых $t \in \in R$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$ она утрачивает характерное свойство $\big[D\big(\varphi_t(\varphi)\big)D^-\big(\varphi_t(\varphi)\big)\big]^* = = D\big(\varphi_t(\varphi)\big)D^-\big(\varphi_t(\varphi)\big)$ псевдообратной матрицы и является одной из обобщенно-обратных матриц, удовлетворяющих соотношениям (19). Поскольку множеству обобщенно-обратных матриц $D^{-}(\varphi)$ принадлежит и псевдообратная матрица $D^{+}(\varphi)$, всюду ниже при фиксированном $\varphi \in \mathcal{T}_m$ в качестве обобщенно-обратной к $D(\varphi)$ матрицы можно использовать ее псевдообратную $D^{-}(\varphi) = D^{+}(\varphi)$ и, соответственно, проекторы $P_{N(D)}(\varphi)$ и $P_{N(D^*)}(\varphi)$ в этом случае будут ортопроекторами.

Таким образом, на основании свойств (7), (8), (20) для любых $t \in R$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$ имеем

$$P_{N(D^*)}\big(\varphi_t(\varphi)\big) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_-\big(\varphi_t(\varphi)\big)\Omega_\tau^0\big(\varphi_t(\varphi)\big) f\big(\varphi_\tau\big(\varphi_t(\varphi)\big)\big) d\tau =$$

$$= \Omega_0^t(\varphi) P_{N(D^*)}(\varphi) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_-(\varphi)\Omega_{\tau+t}^0(\varphi) f(\varphi_{\tau+t}(\varphi)) d\tau = 0.$$

В силу э-дихотомии системы (3) на полуосях интеграл сходится. Здесь будем использовать ограниченность матрицы-проектора $\big\|P_{N(D^*)}(\varphi_t(\varphi)\big\| \le K_0$ при любом $\varphi \in \mathcal{T}_m$ и неравенства

$$\begin{gathered} \|\Omega_0^t(\varphi) C_+(\varphi) \Omega_\tau^0(\varphi)\| \le K_1 e^{-\alpha_1(t-\tau)}, \quad t \ge \tau, \\ \big\|\Omega_0^t(\varphi)(I - C_+(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi)\big\| \le K_1 e^{-\alpha_1(\tau-t)}, \qquad \tau \ge t, \quad \forall t,\ \tau \in R_+, \\ \big\|\Omega_0^t(\varphi) C_-(\varphi) \Omega_\tau^0(\varphi)\big\| \le K_2 e^{-\alpha_2(t-\tau)}, \quad t \ge \tau, \\ \big\|\Omega_0^t(\varphi)(I - C_-(\varphi))\Omega_\tau^0(\varphi)\big\| \le K_2 e^{-\alpha_2(\tau-t)}, \qquad \tau \ge t, \quad \forall t,\ \tau \in R_-, \end{gathered} \tag{21}$$

характеризующие э-дихотомию системы (3) на полуосях R_+ и R_- с константами $K_i \ge 1$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$. Действительно, поскольку $P_{N(D^*)}(\varphi) C_-(\varphi) = P_{N(D^*)}(\varphi)\big(I - C_+(\varphi)\big)$, из неравенств (21) имеем оценки

$$\left\| P_{N(D^*)}(\varphi) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi) f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big) d\tau \right\| \le$$

$$\le \big\|P_{N(D^*)}(\varphi)\big\| \Bigg\{ \int\limits_{-\infty}^{0} \|C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi) f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)\| d\tau +$$

$$+ \int\limits_{0}^{+\infty} \big\|\big(I - C_+(\varphi)\big)\Omega_\tau^0(\varphi) f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)\| d\tau \Bigg\} \le$$

$$\le K_0 \left(\frac{K_2}{\alpha_2} + \frac{K_1}{\alpha_1} \right) \big\|f(\varphi)\big\| = K\|f(\varphi)\|.$$

И наконец, покажем, что выражение

$$u(\varphi) = (G_0(f))(\varphi) \tag{22}$$

определяет, при условии (16) и только при нем, инвариантный тор системы (1) при любых $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Покажем, что интегралы в (22) сходятся. Действительно, так как

$$\big(G_0(f)\big)(\varphi) = C_+(\varphi)D^+(\varphi)\int\limits_{-\infty}^{0} C_-(\varphi)\Omega_\tau^0(\varphi)f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)d\tau +$$

$$+[C_+(\varphi)D^+(\varphi) - I]\int\limits_{0}^{\infty} \big(I - C_+(\varphi)\big)\Omega_\tau^0(\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau,$$

учитывая неравенства (21), получаем

$$\|u(\varphi)\| = \big\|\big(G_0(f)\big)(\varphi)\big\| \leq \left[\frac{K_3K_2}{\alpha_2} + \frac{K_4K_1}{\alpha_1}\right]\|f\| = \bar{K}\ \|f\|,$$

$$\big\|C_+(\varphi)D^+(\varphi)\big\| = K_3, \qquad \big\|C_+(\varphi)D^+(\varphi) - I\big\| = K_4, \tag{23}$$

и поэтому, как и в [1, с.123], из условия $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ следует, что $u(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$. Из свойств (7), (9), (20) следует

$$u\big(\varphi_t(\varphi)\big) = (G_0(f))\big(\varphi_t(\varphi)\big) = \big(G_t(f)\big)(\varphi)$$

для любых $t \in R$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Последнее доказывает, что $u\big(\varphi_t(\varphi)\big) \in C^1(\mathcal{T}_m)$, а множество $u(\varphi)$ определяет инвариантный тор системы (1).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть система* (3) *э-дихотомична на полуосях* R_+ *и* R_- *с проекторами* $C_\pm(\varphi)$, *удовлетворяющими на полуосях неравенствам* (21), *а на решениях* $\varphi_t(\varphi)$ *свойствам*

$$C_\pm\big(\varphi_t(\varphi)\big) = \Omega_0^t(\varphi)C_\pm(\varphi)\Omega_t^0(\varphi), \quad C_\pm^2(\varphi) = C_\pm(\varphi).$$

Система (1) *имеет инвариантный тор тогда и только тогда, когда* $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ *удовлетворяет условию* (16). *Если однородная система* (3) *не имеет ограниченных на всей оси решений, т. е. выполнено условие*

$$C_+(\varphi)P_{N(D)}(\varphi) = \big(I - C_-(\varphi)\big)P_{N(D)}(\varphi) = 0,$$

то выражение

$$u(\varphi) = \big(G_0(f)\big)(\varphi)$$

получаемое из (14) *при* $t = 0$, *определяет при любом* $\varphi \in \mathcal{T}_m$ *единственный инвариантный тор системы* (1).

***Замечания.* 2.** Если кроме условия

$$C_+(\varphi)P_{N(D)}(\varphi) = 0$$

выполнено и условие

$$P_{N(D^*)}(\varphi)C_-(\varphi) = 0,$$

то система (1) имеет единственный инвариантный тор $u(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ при любой неоднородности $f(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$. Например, этот случай имеет место при $\det D(\varphi) \neq \neq 0$ [6].

3. Аналогичные рассуждения остаются справедливыми и в случае анализа существования инвариантного многообразия системы (1), не обязательно тороидального, когда коэффициенты системы не являются периодическими по φ. Это иллюстрирует приведенный ниже пример [7].

Пример. Рассмотрим задачу о существовании инвариантного многообразия системы

$$\dot{\varphi} = 1, \qquad \dot{x} = \operatorname{th}(\varphi)x + f(\varphi). \tag{24}$$

Эта система имеет следующие характеристики:

$$\Omega_0^t(\varphi) = \frac{e^{\varphi_t(\varphi)} + e^{-\varphi_t(\varphi)}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} = \frac{\operatorname{ch}(\varphi_t(\varphi))}{\operatorname{ch}\varphi}, \qquad \varphi_t(\varphi) = t + \varphi, \quad t \in R,$$

$$C_+(\varphi) = 0, \quad C_-(\varphi) = 1, \quad D(\varphi) = D^+(\varphi) = 0,$$

$$P_{N(D)}(\varphi) = P_{N(D^*)}(\varphi) = 1.$$

Согласно доказанной теореме необходимое и достаточное условие (16) существования инвариантного многообразия системы (24) имеет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Omega_\tau^0(\varphi) f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big) d\tau = 0. \tag{25}$$

Учитывая свойства (8), легко проверить, что если условие (25) выполняется при некотором фиксированном φ, то оно выполняется и при любом $\varphi_t(\varphi) = t + \varphi$, $t \in R$. Система (24) при этом будет иметь единственное инвариантное многообразие вида

$$u(\varphi) = (G_0(f))(\varphi) = -\int\limits_0^{\infty} \Omega_\tau^0(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau, \tag{26}$$

или, что одно и то же,

$$u(\varphi) = \big(G_0(f)\big)(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau.$$

Убедимся, что $u\big(\varphi_t(\varphi)\big)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x} = \operatorname{th}(\varphi_t(\varphi))x + f\big(\varphi_t(\varphi)\big) \quad \forall t \in R.$$

Действительно, из (26) имеем

$$u(\varphi_t(\varphi)) = \big(G_0(f)\big)\big(\varphi_t(\varphi)\big) =$$

$$= \begin{cases} -\int\limits_0^{\infty} \Omega_\tau^0(\varphi_t(\varphi)) f(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi)))d\tau, & t \geq 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\varphi_t(\varphi)) f(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi))d\tau, & t \leq 0, \end{cases} =$$

$$= \Omega_0^t(\varphi) \begin{cases} -\int\limits_t^{\infty} \Omega_s^0(\varphi) f(\varphi_s(\varphi)))ds, & t \geq 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega_s^0(\varphi) f(\varphi_s(\varphi)ds, & t \leq 0, \end{cases} = \big(G_t(f)\big)(\varphi).$$

Далее имеем

$$\dot{u}\big(\varphi_t(\varphi)\big) = \dot{\Omega}_0^t(\varphi) \begin{cases} -\int\limits_t^{\infty} \Omega_s^0(\varphi) f(\varphi_s(\varphi)))ds, & t \geq 0, \\ \int\limits_{-\infty}^{t} \Omega_s^0(\varphi) f(\varphi_s(\varphi)ds, & t \leq 0, \end{cases} +$$

$$+ \Omega_0^t(\varphi) \begin{cases} -\Omega_s^0(\varphi) f\big(\varphi_s(\varphi)\big) \Big|_{s=\infty}^{s=t} \\ \Omega_s^0(\varphi) f\big(\varphi_s(\varphi)\big) \Big|_{s=-\infty}^{s=t} \end{cases} = \operatorname{th}\big(\varphi_t(\varphi)\big) u\big(\varphi_t(\varphi)\big) + f\big(\varphi_t(\varphi)\big).$$

Если в качестве функции $f(\varphi)$ использовать функцию $f(\varphi) = \operatorname{sh}(\varphi)/\operatorname{ch}^2(\varphi)$, то условие (25) существования будет выполнено, и поэтому система

$$\dot{\varphi} = 1, \qquad \dot{x} = \operatorname{th}(\varphi)x + \frac{\operatorname{sh}(\varphi)}{\operatorname{ch}^2(\varphi)}$$

будет иметь единственное инвариантное многообразие

$$u(\varphi) = \big(G_0(f)\big)(\varphi) = -\int\limits_0^{\infty} \operatorname{ch}(\varphi) \frac{\operatorname{sh}\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)}{\operatorname{ch}^3(\varphi_\tau(\varphi))} d\tau = -\frac{1}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}},$$

или, что одно и то же,

$$u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \operatorname{ch}(\varphi) \frac{\operatorname{sh}\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)}{\operatorname{ch}^3\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)} d\tau = -\frac{1}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}.$$

Легко проверить, что система (24) с функцией $f(\varphi)$, которая не удовлетворяет критерию (25), например система

$$\dot{\varphi} = 1, \qquad \dot{x} = \mathrm{th}\,(\varphi)x + 1,$$

не будет иметь инвариантного многообразия, так как не выполнено условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Omega_\tau^0(\varphi) f\big(\varphi_\tau(\varphi)\big) d\tau = 0$$

теоремы, ибо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(\varphi)}{\mathrm{ch}\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)} d\tau = 2\,\mathrm{ch}\,(\varphi) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{e^{\tau+\varphi} + e^{-(\tau+\varphi)}} \neq 0.$$

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
3. *Palmer K. J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. – 1984. – **55**. – P. 225 – 256.
4. *Boichuk A. A.* Solutions of weakly nonlinear differential equations bounded on the whole line // Nonlinear Oscillations. – 1999. – **2**, № 1. – P. 3 – 10.
5. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and fredholm boundary value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
6. *Бойчук А. А.* Условие существования единственной функции Грина – Самойленко задачи об инвариантном торе // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 556 – 559.
7. *Boichuk A.* Bounded solutions of differential equations in Banach space // Colloq. Different. and Difference Equat. dedicat. Prof. Jaroslav Kurzweil 80-th Birthday: Abstrs (Brno, Czech Republic, Sept. 5 – 8, 2006). – P. 35.

Получено 06.10.2006