

Д. т. н. А. В. ДРОЗД, д. т. н. Н. Б. КОПЫТЧУК,  
Е. В. ОГИНСКАЯ

Украина, Одесский нац. политехнический университет  
E-mail: drozd@ukr.net

Дата поступления в редакцию  
06.02 2004 г.

Оппонент к. т. н. М. В. ЛОБАЧЕВ  
(ОНУ им. И. И. Мечникова, г. Одесса)

## МЕТОД ОПЕРАТИВНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ

*Метод обнаруживает ошибки в зависимости от их величины и повышает достоверность контроля результатов, снижая отбраковку достоверных результатов.*

Основным методом оперативного тестирования вычислительных устройств является контроль по модулю [1], который наиболее часто используется для проверки умножения чисел, как и других арифметических операций. Популярность контроля по модулю объясняется двумя причинами.

Во-первых, наибольшее распространение в вычислительной технике получили полные арифметические операции. Во-вторых, контроль по модулю является эффективным методом проверки правильности выполнения полных арифметических операций в современных матричных устройствах [2, 3]. При малой относительной сложности средств контроля метод обеспечивает обнаружение всех наиболее вероятных ошибок на выходах матричных устройств.

Однако полные операции являются необходимыми лишь при обработке точных данных, к которым относятся только числа, являющиеся целыми по своей природе, — номера элементов множеств. Остальные числа, составляющие основную часть данных, — результаты измерения и результаты их обработки — относятся к приближенным данным.

Использование полных операций для обработки приближенных данных в современных устройствах нерационально. Форматы с плавающей точкой, наиболее часто представляющие приближенные данные, поддерживают, согласно теории ошибок [4], единую разрядность для мантисс операндов и результатов [5]. А поскольку результат двухместной полной операции имеет удвоенную разрядность, то младшая половина вычисленного результата отбрасывается.

Контроль по модулю обнаруживает ошибки в полном произведении. При равномерном распределении ошибок по разрядам полного произведения каждая вторая ошибка возникает и будет обнаружена в отбрасываемой части произведения. Несущественные ошибки возникают также в расширенных форматах данных, а также при выравнивании порядков. Такие ошибки не снижают количества верных разрядов результата и поэтому являются несущественными для его достоверности.

Обобщенный контроль по модулю, разработанный для сокращенных операций, обнаруживает несущественные ошибки в меньшем количестве отбрасываемых разрядов по сравнению с полной операцией [6, 7]. Однако сохраняется другой недостаток целочисленных методов контроля — не различаются ошибки по их величине. Это приводит к обнаружению несущественных ошибок, величина которых меньше уровня погрешности вычислений.

Обнаружение несущественных ошибок ведет к отбраковке достоверных результатов, что снижает достоверность контроля результатов приближенных вычислений и является существенным недостатком метода контроля по модулю. Для преодоления этого недостатка необходимо разрабатывать методы, различающие существенные и несущественные ошибки. К таким методам относится контроль по неравенствам, известный для одноместных операций [8].

### Постановка задачи

Контроль по неравенствам обеспечивает проверку результата его сравнением с верхней и нижней границами, посчитанными по операндам.

Операция умножения выполняется над двоичными  $n$ -разрядными нормализованными мантиссами  $A$  и  $B$ , которые находятся в пределах  $2^{-1} \leq A < 1$ ,  $2^{-1} \leq B < 1$  и формируют мантиссу  $V$  произведения той же разрядности.

Ставится задача разработки метода контроля по неравенствам для повышения достоверности контроля результатов приближенных вычислений путем снижения отбраковки достоверных результатов в умножителе мантисс чисел.

Для решения задачи следует использовать способность метода оценивать величину ошибки, что позволяет различать существенные и несущественные ошибки, обнаруживая их с различной вероятностью.

### Определение контрольных неравенств

Верхняя граница  $V_H$  результата  $V=AB$  определяется по границам операндов — мантисс  $A$  и  $B$ . Из неравенств  $A < 1$  и  $B \geq 2^{-1}$  следует формула

$$\Delta_H \geq 0, \quad (1)$$

где  $\Delta_H = (1-A)(B-0,5)$ .

После раскрытия скобок и учета равенства  $AB=V$  формула (1) преобразуется к виду

$$0,5A+B-0,5 \geq V.$$

Полученное неравенство, рассмотренное непосредственно для  $A \geq B$ , а после перемены мест сомножи-

телей — также для случая  $B \geq A$ , определяет следующую верхнюю границу результата:

$$V_H = C_H V_{H1} + \neg C_H V_{H2}, \quad (2)$$

где  $C_H = (A \geq B)$  — результат сравнения мантисс  $A$  и  $B$ , а  $V_{H1}$  и  $V_{H2}$  — значения нижней границы:

$$V_{H1} = 0,5A + B - 0,5 \text{ для } A \geq B; \quad (3)$$

$$V_{H1} = 0,5B + A - 0,5 \text{ для } B > A. \quad (4)$$

Для  $A \geq B$  из формулы (3) следует:

$$\Delta_H = V_H - V. \quad (5)$$

Нижняя граница определяется по верхней границе как

$$V_L = V_H - \Delta_{HL}, \quad (6)$$

где  $\Delta_{HL} \geq \Delta_H$ .

Для случая (3) формула (6) с учетом (5) приводится к виду

$$V_L = V - \Delta_L,$$

где  $\Delta_L = \Delta_{HL} - \Delta_H$ .

Величина  $\Delta_{HL}$  определяется аналогично  $\Delta_H$  по формуле

$$\Delta_{HL} = (1 - A^*)(B^* - 2^{-1}). \quad (7)$$

Для выполнения неравенства  $\Delta_L \geq \Delta_H$  принимается  $1 - A^* \geq 1 - A$  и  $B^* - 2^{-1} > B - 2^{-1}$ , из чего следует:  $A \geq A^*$  и  $B^* > B$ . Эти неравенства обеспечиваются при получении  $A^*$  и  $B^*$  соответственно из мантисс  $A$  и  $B$  ограничением их разрядности от исходного значения  $n$  до  $m$  бит ( $m < n$ ), а также увеличением ограниченного значения  $B$  на единицу младшего разряда.

Тогда значения  $A^*$  и  $B^*$  описываются как

$$A^* = \text{Int}(2^m A) / 2^m;$$

$$B^* = (\text{Int}(2^m B) + 1) / 2^m,$$

где  $\text{Int}(x)$  — целая часть числа  $x$ .

Величина  $\Delta_L = \Delta A(B - 0,5) + \Delta B(1 - A) + \Delta A \Delta B$ , где  $\Delta A = A - A^*$  и  $\Delta B = B^* - B$ , а при подстановке усредненных значений  $\Delta A = \Delta B = 2^{-m-1}$ , пренебрегая произведением  $\Delta A \Delta B$ , получим:

$$\Delta L = (B - A + 0,5) 2^{-m-1}. \quad (8)$$

Контроль результата выполняется поочередным сравнением результата с его верхней и нижней границами, для чего вычисляется текущая граница

$$V_{HL} = C_{HL} V_H + \neg C_{HL} V_{H2},$$

где  $C_{HL}$  — параметр, управляющий очередностью сравнения результата с его верхней и нижней границами,  $V_{HL} = V_H$  при  $C_{HL} = 1$  и  $V_{HL} = V_L$  при  $C_{HL} = 0$ .

### Обнаруживающая способность метода

Обнаруживающая способность метода оценивается вероятностями обнаружения ошибок, увеличивающих и уменьшающих результат умножения.

Ошибка  $E_H$ , увеличивающая результат, не обнаруживается при попадании в интервал  $\Delta_H$  (т. е. при условии  $E_H < \Delta_H$ ), из которого определяется диапазон значений мантиссы  $B$

$$0,5 + E_H / (1 - A) < B \leq A$$

и объем диапазона

$$\delta B = A - 0,5 - E_H / (1 - A),$$

а с учетом  $\delta B > 0$ , т. е., решая квадратное неравенство

$$A^2 - 1,5A + 0,5 + E_H < 0, \quad (9)$$

также диапазон значений мантиссы  $A$

$$A_1 < A < A_2,$$

где  $A_1 = 0,75 - D_H / 2$  и  $A_2 = 0,75 + D_H / 2$  — корни неравенства (9),

$$D_H = \sqrt{0,25 - 4E_H}; \quad E_H \leq 2^{-4}.$$

Количество входных слов, на которых не обнаруживается ошибка  $E_H$  для случаев (3) и (4), составит

$$W_{DH} = 2 \int_{A_1}^{A_2} \delta B \, dA = 2 \int_{A_1}^{A_2} (A - 0,5 - E_H / (1 - A)) \, dA.$$

Общее количество входных слов оценивается произведением объемов диапазонов сомножителей и составляет  $W = 0,25$ .

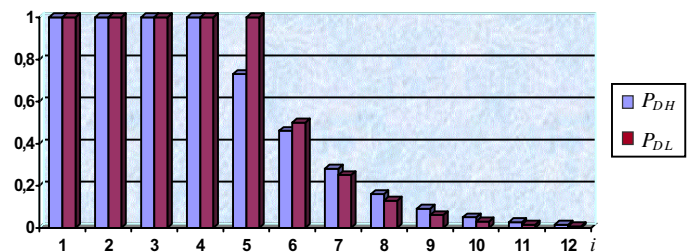
Тогда вероятность обнаружения ошибки  $E_H$  определяется по формуле

$$P_{DH} = 1 - W_{DH} / W = 1 - 2D_H - 8E_H (\ln(1 - A_2) - \ln(1 - A_1)).$$

Для ошибки  $E_L$ , уменьшающей результат, из условия  $E_L < \Delta_L$  и (8) определяется объем диапазона  $\delta B = 0,5 - E_L 2^{m+1}$  значений мантиссы  $B$  для всех значений мантиссы  $A$  и вероятность обнаружения ошибки

$$P_{DL} = 1 - 4 \int_{0,5}^1 (0,5 - E_L 2^{m+1}) \, dA = 2^{m+2} E_L, \quad E_H \leq 2^{-m-2}.$$

Зависимости вероятностей  $P_{DH}$  и  $P_{DL}$  (для  $m=3$ ) от величины ошибки иллюстрируют временные диаграммы, по оси абсцисс которых отложены номера  $i$  разрядов мантиссы результата, веса  $2^{-i}$  которых совпадают с величиной ошибки (см. рисунок).



Временные диаграммы зависимости вероятностей  $P_{DH}$  и  $P_{DL}$  от величины ошибки

Вероятность обнаружения ошибки увеличивается с ростом ее величины.

### Достоверность контроля результатов

Достоверность контроля результатов оценивается по ее дополнению до единицы — показателю недостоверности [9]:

$$D_N(t) = (P_{пр} + P_{отб})(1 - P_{пф}(t)), \quad (10)$$

где  $P_{пр}$  — вероятность пропуска существенной ошибки;

$P_{отб}$  — вероятность отбраковки достоверного результата;

$P_{пф}(t)$  — вероятность правильной работы вычислительного устройства за период времени  $t$ .

Вероятности  $P_{пр}$  и  $P_{отб}$  определяются по формулам [10]

$$P_{пр} = K_t (1 - P_{DE}); \quad (11)$$

$$P_{отб} = (1 - K_t) P_{DN}, \quad (12)$$

где  $K_T$  — вероятность появления существенной ошибки;  
 $P_{DE}$ ,  $P_{DN}$  — вероятность обнаружения существенной и несущественной ошибок, соответственно.

Пусть результат имеет 8 верных разрядов, в которых проявляются существенные ошибки. Тогда из диаграмм (см. рис.) по значениям  $P_{DH}$ ,  $P_{DL}$  соответственно первых восьми и следующих за ними разрядов вычисляются усредненные значения вероятностей  $P_{DE}=0,7$  и  $P_{DN}=0,07$ . Согласно (10)—(12),  $P_{пр}=0,3$ ,  $K_T$  и  $P_{отб}=0,07-0,07K_T$ , а показатель недостоверности  $D_N(t)=(0,07+0,23K_T)(1-P_{пф}(t))$ .

Для значений вероятности  $K_T=0,1$  и  $K_T=0,2$  показатель недостоверности  $D_N(t)=0,09(1-P_{пф}(t))$  и  $D_N(t)=0,12(1-P_{пф}(t))$ .

Контроль по модулю, обнаруживающий присутствие матричным устройствам ошибки с одинаково высокой вероятностью  $P_D=P_{DE}=P_{DN}=1$ , имеет показатели  $P_{пр}=0$ ,  $P_{отб}=1-K_T$  и  $D_N(t)=(1-K_T)(1-P_{пф}(t))$ , что для  $K_T=0,1$  и  $K_T=0,2$  определяет значения  $D_N(t)=0,9(1-P_{пф}(t))$  и  $D_N(t)=0,8(1-P_{пф}(t))$ , превышающие показатель недостоверности предложенного метода соответственно в 10 и 6,7 раз.

### Заключение

Предложенный метод контроля по неравенствам множителя мантисс обеспечивает оценку величины ошибок, выполняя их обнаружение с вероятностью, зависящей от величины ошибок. Это позволяет различать ошибки, существенные и несущественные для достоверности результатов приближенных вычислений, и повышать достоверность контроля результатов.

По сравнению с основным методом оперативного тестирования — контролем по модулю — предложенный метод многократно снижает показатель недостоверности за счет уменьшения вероятности отбраковки достоверных результатов. Степень снижения показателя недостоверности повышается с уменьшением вероятности появления существенной ошибки.

### ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Согомонян Е. С., Слабаков Е. В. Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы.— М.: Радио и связь, 1989.
2. Журавлев Ю. П., Котелюк Л. А., Циклинский Н. И. Надежность и контроль ЭВМ.— М.: Сов. радио, 1978.
3. Jenkins W. The design of error checkers for self-checking residue number arithmetic // EEE Trans. on Computers.— 1983.— Vol. C-32.— P. 388—396.
4. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов.— М.— Л.: ОГИЗ, 1948.
5. IEEE Standard for Binary Floating-Point Arithmetic.— ANSI / IEEE Std 754—1985, IEEE.— New York, USA.
6. Drozd A. V., Lobachev M. V., Hassonah W. Hardware check of arithmetic devices with abridged execution of operations // Proc. The European Design & Test Conf.— Paris, France.— 1996.— P. 611.
7. Дрозд О. В. Контроль за модулем обчислювальних пристроїв.— Одеса: АО Бахва, 2002.
8. Дрозд А. В. Контроль вычислительных устройств по неравенствам // Уч. зап. Симфероп. гос. ун-та.— Спец. вып.— Винница — Симферополь, 1998.— С. 237—240.
9. Дрозд А. В. Достоверность рабочего диагностирования вычислительных устройств для обработки приближенных данных // Зб. наук. праць Харківськ. військового ун-ту НАНУ. Системи обробки інформації.— 2002.— Вип. 4.— С. 8—13.
10. Drozd A. On-line testing of computing circuits at approximate data processing // Радіоелектроніка та інформатика.— 2003.— № 3.— С. 113—116.

### НОВЫЕ КНИГИ

НОВЫЕ КНИГИ



#### **Тихонов В. И., Харисов В. Н. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ И СИСТЕМ.— М.: Радио и связь, 2003.— 608 с.**

Приводятся необходимые сведения из теории вероятностей и на их основе рассматриваются статистические методы анализа линейных систем и нелинейных радиотехнических устройств. На единой базе теории фильтрации экономно и единообразно изложены современные методы синтеза аналоговых и цифровых радиотехнических систем различного назначения, включая и адаптивные. Методика применения теоретических результатов к решению практических задач проиллюстрирована содержательными примерами.

Для студентов радиотехнических специальностей вузов и специалистов.

НОВЫЕ КНИГИ



#### **Фомина Н. Н. (под ред.). РАДИОПРИЕМНЫЕ УСТРОЙСТВА.— М.: Радио и связь, 2003.— 604 с.— 2-е изд., испр. и доп.**

Изложены принципы построения, основные схмотехнические и системотехнические решения и теоретические основы работы приемно-усилительных устройств. Рассмотрены состояние и пути развития радиоприемных устройств с использованием современной элементной базы, цифровой и микроволновой техники.

Для студентов вузов и факультетов связи.