

**МЕТОД РАСЧЕТА ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ОБРАЗЦОВ
ГОРНЫХ ПОРОД ПРИ ОБЪЁМНОМ СЖАТИИ**

Метод розрахунку заснований на критерії міцності матеріалів Кулона і теорії граничного стану з урахуванням зовнішнього і внутрішнього тертя. Одержана задовільна збіжність розрахункових результатів з експериментальними даними.

**THE METHOD OF CALCULATION OF LIMITING STATE AT
VOLUMETRIC COMPRESSION SAMPLES OF ROCKS**

The calculation method is based on Coulomb's criterion of durability of materials and the theory of lines of sliding taking into account an external and internal friction. Satisfactory convergence of settlement results with experimental data is received.

В работе [1] разработан метод расчета предельного состояния при сжатии образцов горных пород с линейной связью между контактными касательными τ_k и нормальными напряжениями σ_y согласно закону Кулона-Амонтона

$$\tau_{\epsilon} = f\sigma_y, \quad (1)$$

где f - коэффициент внешнего (контактного) трения.

При использовании этого закона возникают непреодолимые трудности точного интегрирования двух известных дифференциальных уравнений совместно с алгебраическим уравнением равновесия. Разработанные методы расчета предельного состояния материала, основанные на этом принципе, не позволяют определять напряжения внутри материала [2].

Решение имеет место только в частном случае, когда поперечные напряжения σ_x равны продольным нормальным напряжениям σ_y и $d\sigma_y = d\sigma_x$, что и было использовано в работе [1].

В работах [3, 4] нами ранее была предпринята попытка использовать другой, более обоснованный подход к определению связи между напряжениями. В основу расчета распределения нормальных напряжений был положен метод Прандтля, разработанный для широкой полосы. Доказано, что точное решение задачи с использованием двух дифференциальных и одного алгебраического уравнения равновесия обеспечивается при постоянном значении контактного касательного напряжения τ_{xy} . В литературе [2] принято, что касательное напряжение изменяется вдоль действия нормального сжимающего напряжения по зависимости

$$\tau_{xy} = \tau_{\epsilon} \cdot \left(1 - \frac{2Y}{h}\right). \quad (2)$$

Принято считать [2], что при этом подходе достоверность обеспечивается вдали от боковых обнаженных граней, так как в граничные условия заложено

сохранение их прямолинейности, что не позволяет соблюсти закон парности касательных напряжений.

В реальных условиях вследствие деформирования боковые грани приобретают выпуклую форму в силу выпучивания свободных, обнаженных (бочкообразных) поверхностей с углом ψ между касательной к бочке и исходной свободной поверхностью (рис.1).

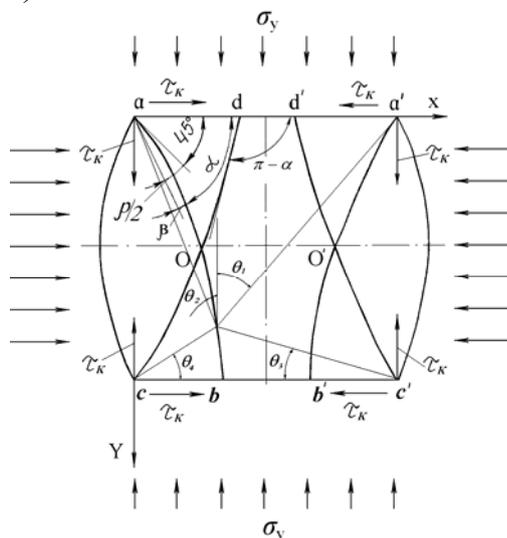


Рис.1. – Схема контактных нагрузок в образце горной породы при наличии внешнего трения

Это дает нам основание для применения закона парности касательных напряжений в приконтурной области образца. Получено, что теоретическое распределение нормальных напряжений при постоянном значении касательных напряжений имеет вид выпуклого треугольника (рис.2), что подтверждено экспериментальными данными [2].

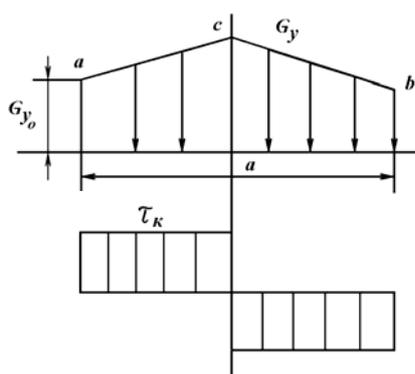


Рис. 2. – Эпюры контактных нормальных σ_y и касательных τ_k напряжений.

Распределение нормальных напряжений σ_y на контрактной поверхности описывается простой формулой

$$\sigma_y = \sigma_{y0} \left(1 + \frac{2f \cdot x}{h} \right), \quad (3)$$

где σ_{y0} – предел прочности в угловой точке a .

Сила контактного давления на единицу длины образца равна

$$P = 2 \int_0^{a/2} \sigma_{y0} \cdot \left(1 + \frac{2f \cdot x}{h}\right) dx = \sigma_{y0} \cdot a \cdot \left(1 + \frac{f \cdot a}{2h}\right). \quad (4)$$

Удельное давление

$$p = \sigma_{y0} \left(1 + \frac{f \cdot a}{2h}\right). \quad (5)$$

Теперь с учетом этих положений в данной статье предстоит разработать метод расчета предела прочности образцов горных пород при объемном нагружении, когда имеет место боковое внешнее нагружение $\sigma_2 = \sigma_3$ (контактное трение на боковых гранях отсутствует) при постоянном значении касательных напряжений на контактной плоскости. Для разработки метода используем, как и раньше [1], критерий предельного состояния материалов с внутренним трением, внутри которых эффективные касательные напряжения по Кулону

$$\tau_y = \tau_\alpha - \mu \sigma_\alpha, \quad (6)$$

где τ_α и σ_α – активные касательные и нормальные напряжения на наклонной плоскости, μ – коэффициент внутреннего трения.

Учтем внешнее трение между контактируемыми поверхностями.

Направление элементарных сил трения на контактной поверхности образца, и, следовательно, касательных напряжений, примем против деформаций. Оговорим правило знаков касательных напряжений. Касательные напряжения принимаются положительными, если они направлены вдоль одной из осей координат, а нормальные сжимающие напряжения – вдоль другой оси. Из этого следует, что на верхней левой половине образца касательные напряжения имеют положительный знак, а нижней – отрицательный. На правой половине – наоборот (рис.1).

Значения τ_α и σ_α определяются из известных выражений [4]

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_e \cos 2\alpha, \quad (7)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_e \sin 2\alpha. \quad (8)$$

Подставив выражения (7) и (8) в формулу (6) и продифференцировав по α , находим выражение для определения наклона траектории максимальных касательных напряжений

тельных напряжений (линии скольжения), на которой эффективные касательные напряжения имеют максимальные значения

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y) - 2\mu\tau_e}{\mu(\sigma_x - \sigma_y) + 2\tau_e}. \quad (9)$$

Используя выражение (9), находим тригонометрические функции $\operatorname{Sin} 2\alpha$ и $\operatorname{Cos} 2\alpha$, после подстановки которых в выражение (7), имеем

$$\tau_\alpha = \frac{\operatorname{Cos} \rho}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_e^2}. \quad (10)$$

Далее продифференцируем по α выражение (8). После подстановки в полученную формулу тригонометрических функций получаем

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -\operatorname{Cos} \rho \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_e^2}. \quad (11)$$

Из сравнения выражений (10) и (11) вытекает, что

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\tau_\alpha. \quad (12)$$

По закону Кулона активные касательные напряжения τ_α равны сопротивлению материала сдвигу с учетом внутреннего трения с обратным знаком. С учетом этого, подставив значение из уравнения (6) в (12), имеем важное дифференциальное уравнение равновесного состояния на линии скольжения ξ

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2(k + \mu\sigma_\alpha), \quad (13)$$

где k – текущее значение сопротивления материала внешнему касательному напряжению на линии скольжения.

Аналогично поступим с выражениями на линии скольжения η , угол наклона которой равен $\pi - \alpha$. Получим уравнение (13) со знаком минус множителя $(k + \mu\sigma_\alpha)$.

Решение уравнения (13) сводится к решению интеграла на линии скольжения ξ между точками a и b

$$\int_{\sigma_{\alpha_b}}^{\sigma_{\alpha_a}} \frac{d(k + \mu\sigma_\alpha)}{\mu} = 2 \int_{\alpha_b}^{\alpha_a} d\alpha. \quad (14)$$

Как видно, для решения этого уравнения нужно знать значения касательных напряжений k , нормальных напряжений σ_α и углов α наклона линий скольжения в точках a и b .

На основании тригонометрических функций из уравнения (8) имеем

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\text{Sin}\rho}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_\epsilon^2}. \quad (15)$$

Для определения суммы и подрадикального выражения найдем уравнение равновесия путем подстановки тригонометрических функций в выражение (6) получим для точки a

$$\tau_y = k = \frac{\tilde{N}\text{os}\rho}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_\epsilon^2} - \mu \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2}. \quad (16)$$

Откуда радикальное выражение имеет вид

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_\epsilon^2} = \frac{2k + \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{\tilde{N}\text{os}\rho}. \quad (17)$$

Для определения суммы $(\sigma_x + \sigma_y)$ используем соотношение между поперечными и продольными нормальными напряжениями из работы [6]. На основании чего имеем

$$\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} = \frac{(k + \mu\sigma_y)}{\tilde{N}\text{os}\rho} (\text{Sin}\rho - \sqrt{1 - b^2}) + \sigma_y, \quad (18)$$

где
$$b = \frac{\tau_\epsilon}{k + \mu\sigma_y}. \quad (19)$$

С учетом формул (17) и (18) преобразуем уравнение (15) к виду

$$\sigma_\alpha = \sigma_y \left(1 - \text{Sin}\rho \sqrt{1 - b^2}\right) - k \cdot \text{Cos}\rho \cdot \sqrt{1 - b^2}.$$

Тогда нормальное напряжение в точке b на линии ξ

$$\sigma_{\alpha_b} = \sigma_y \left(1 - \text{Sin}\rho \cdot \sqrt{1 - b_b^2}\right) - k \cdot \text{Cos}\rho \cdot \sqrt{1 - b_b^2}. \quad (20)$$

Теперь, в отличие от одноосной нагрузки [4], учтем внешнюю нагрузку σ_2 . Тогда нормальное напряжение в точке a на линии ξ составит

$$\sigma_{\alpha_a} = \sigma_2 \left(1 + \text{Sin} \rho \cdot \sqrt{1 - b_a^2} \right) + k \cdot \text{Cos} \rho \cdot \sqrt{1 - b_a^2}. \quad (21)$$

Теперь предстоит найти углы наклона α_a и α_b из выражения (9). Преобразуем его к виду

$$\text{tg} 2\alpha = - \frac{1 - \frac{2\mu\tau_{\dot{\epsilon}}}{\sigma_{\delta} - \sigma_{\dot{o}}}}{\mu + \frac{2\tau_{\dot{\epsilon}}}{\sigma_{\delta} - \sigma_{\dot{o}}}}. \quad (22)$$

Обозначим составляющую $\frac{2\tau_{\dot{\epsilon}}}{\sigma_{\delta} - \sigma_{\dot{o}}}$ через $\text{tg} 2\beta$.

$$\text{Тогда,} \quad \beta = \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{2\tau_{\dot{\epsilon}}}{\sigma_{\delta} - \sigma_{\dot{o}}}. \quad (23)$$

Как видно, для расчета угла β нужно знать разность $\sigma_x - \sigma_y$, которая определяется из уравнения (18)

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{2(k + \mu\sigma_y)}{\tilde{N}\text{os}\rho} \times (\text{Sin}\rho - \sqrt{1 - b^2}). \quad (24)$$

Тогда, с учетом (19) угол

$$\beta = \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{b \cdot \text{Cos}\rho}{\text{Sin}\rho - \sqrt{1 - b^2}}. \quad (25)$$

Угол поворота линии скольжения в точке b от касательных напряжений

$$\beta_b = \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{-\tau_{\dot{\epsilon}} \cdot \text{Cos}\rho}{(k_b + \mu\sigma_{\dot{o}})(\text{Sin}\rho - \sqrt{1 - b_b^2})}, \quad (26)$$

а в точке a –

$$\beta_a = \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{\tau_{\dot{\epsilon}} \cdot \left(1 - \frac{2Y}{h} \right) \text{Cos}\rho}{(k_n + \mu\sigma_{\dot{o}})(\text{Sin}\rho - \sqrt{1 - b_a^2})}. \quad (27)$$

Преобразуя выражение (22), находим α

$$\alpha = 45 + \frac{\rho}{2} + \beta. \quad (28)$$

Угол наклона линии скольжения в точке a составит

$$\alpha_a = 45 + \frac{\rho}{2} - \beta_a. \quad (29)$$

Угол β_a имеет отрицательный знак при $\sqrt{1-b_a^2} > \text{Sin}\rho$. Угол β_b имеет положительный знак.

Поэтому угол α_b наклона линии скольжения в точке b

$$\alpha_b = 45 + \frac{\rho}{2} + \beta_b. \quad (30)$$

Тогда имеем общий угол поворота линии скольжения между точками b и a с учетом знаков β_b и β_a за счет разности α_b и α_a

$$\alpha_{ba} = \beta_b + \beta_a. \quad (31)$$

Тогда из решения интеграла (14) с учетом (20), (21) и (31) имеем

$$\frac{(k_b + \mu\sigma_2 + \mu\sigma_y) \cdot (1 - \text{Sin}\rho \cdot \sqrt{1-b_b^2})}{(k_a + \mu\sigma_2) \cdot (1 + \text{Sin}\rho \cdot \sqrt{1-b_a^2})} = e^{2\mu(\beta_b + \beta_a)}. \quad (32)$$

Используя выражения (14, 32) и опуская громоздкие преобразования, получим систему уравнений для расчета нормального сжимающего напряжения в угловой точке a образца горных пород на линии ξ при объёмном сжатии

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{y0} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{(k_n + \mu\sigma_2) (1 + \text{Sin}\rho \cdot \sqrt{1-b_a^2})}{(1 - \text{Sin}\rho \cdot \sqrt{1-b_a^2})} \cdot e^{2\mu(\beta_b + \beta_a)} - (k_b + \mu\sigma_2) \right] \\ k_b = \frac{(k_n + \mu\sigma_2 + \mu\sigma_y) (1 - \text{Sin}\rho \sqrt{1-b_a^2})}{(1 + \text{Sin}\rho \sqrt{1-b_a^2}) \cdot e^{4\mu\beta_b}} - \mu\sigma_2 \end{array} \right. \quad (33)$$

В зависимости от направления образования трещины, например, в направлении от точки a в точку b , в вершине трещины $k_a = k_n$ – пределу сопротивления материала чистому сдвигу, в точке b – $k_b < k_n$.

С учетом распределения нормальных напряжений на контактной плоскости находим удельное давление, фиксируемое на прессе при раздавливании образцов горных пород при объёмном нагружении согласно (5)

$$p = \frac{1}{\mu} \left[\frac{(k_n + \mu\sigma_2) \left(1 + \sin\rho \cdot \sqrt{1 - b_a^2}\right)}{\left(1 - \sin\rho \cdot \sqrt{1 - b_a^2}\right)} \cdot e^{2\mu(\beta_b + \beta_a)} - (k_b + \mu\sigma_2) \right] \cdot \left(1 + \frac{f \cdot a}{2h}\right) \quad (34)$$

Для определения предельного напряжения в точке d для линии скольжения η показатель экспоненты имеет знак минус.

Теперь определим достоверность расчетных значений с экспериментальными данными [7, 8]. Поскольку характеристики физико-механических свойств авторами не приведены, подберем их из условий согласования значений теоретического расчета с экспериментальными значениями при одноосном сжатии ($\sigma_2=0$). Так для рис.73 [7] принято $k_n = 35$ МПа, $\rho = 45^\circ$, $f = 0,35$, а для рис. 26 [8] $k_n = 32$ МПа, $\rho = 38^\circ$, $f = 0,05$.

Результаты расчета сведем в таблицу.

Таблица 1– Сравнение расчетных значений предела прочности с экспериментальными данными.

σ_2 – боковое напряжение сжатия, МПа	P – расчетное продольное напряжение, МПа	$\sigma_{сж}$ – экспериментальное значение предела прочности, МПа	Литература	Ошибка расчета, %
1	2	3	4	5
0	194	165	Рис. 73 [7]	7,57
0,5	197	210		6,19
10	248	240		3,33
25	329	315		4,44
50	464	440		5,45
100	733	600		22,16
150	1002	880		13,86
1	2	3	4	5
0	138	138	Рис. 26 [8]	0
4,2	151	141		6,3
11,5	176	150		10,6
16,6	189	184		2,7

Сопоставление расчетных предельных значений с экспериментальными при объемном сжатии образцов двух типов пород свидетельствует, что средняя ошибка составила 6,95 %, что подтверждает высокую сходимость с экспериментальными данными разработанного метода.

Выводы

1. Разработан метод расчета предельного состояния образцов горных пород при объемном сжатии и постоянном контактном касательном напряжении от внешнего трения с использованием двух дифференциальных и одного алгебраического уравнения. При предельном значении сжимающего напряжения в точках а или б при $\tau_3 = k_{\text{н}}$ возникает трещина. В других областях материал деформируется упруго.

2. Применение разработанного метода расчета предела прочности горных пород при объемном сжатии при практических расчетах позволит повысить достоверность расчетных результатов с экспериментальными данными по сравнению с ранее разработанными методами при сходимости около 90 – 93 %.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Л.М., Васильев Д.Л. Метод расчета предела прочности горных пород на одноосное сжатие при линейной связи между контактными напряжениями // Геотехническая механика. Выпуск 42, Днепропетровск, 2003, – С 42–48.
2. Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением. –М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
Васильев Д.Л. Метод расчета распределения нормальных контактных напряжений в образцах горных пород при постоянном значении контактного трения // Геотехническая механика. Выпуск 44, Днепропетровск, 2003, – С 37–44.
3. Васильев Д.Л. Метод расчета предела прочности на сжатие образцов горных пород при постоянстве контактного касательного напряжения // Збірник наукових праць НГУ № 33 – Дніпропетровськ: РВК НГУ, 2009, – С 111–117.
4. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. –560 с.
5. Васильев Д.Л. Метод расчета горизонтальных напряжений в массивах горных пород // Геотехническая механика. Выпуск 29, Днепропетровск: ИГТМ НАНУ, 2002, – С 161–165.
6. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах. М.: Недра, 1985.–271 с.
7. Виноградов В.В Геомеханика управления состоянием массива вблизи горных выработок. – Киев: Наук. думка, 1989. – 192 с.

УДК 622.235.53

Научн.сотр. В.Я. Осенний
(ИГТМ НАН Украины)

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СОЗДАНИЯ КОТЛОВОЙ ПОЛОСТИ ПЛАЗМЕННЫМ ГЕНЕРАТОРОМ ТЕПЛА

Показана перспективність створення ресурсозберігаючих технологій видобутку міцних руд на основі застосування котлових порожнин для розміщення вибухових речовин плазмовим способом. Розроблена математична модель формування котлової порожнини, проведений її аналіз у зіставленні із промисловим експериментом.

ABOUT MODEL OF THE CHAMBERING CAVITY PLASMA GENERATOR OF WARVLY

The prospects of a resource-saving technologies for the extraction of ores strong through the use of chambering cavity for placement of explosives plasma method. A mathematical model of the chambering cavity, conducted its analysis in relation to the industrial experiment.

Разработка крепких руд в Кривбассе, в частности магнетитовых кварцитов, требует большого объема буровых и проходческих работ.