К. т. н. И. А. КОННИКОВ

Россия, г. С.-Петербург, Государственный университет культуры
E-mail: konnikov@peterstar.ru

Дата поступления в редакцию
05.07 2006 г.
Оппонент *д. т. н. В. В. БАРАНОВ*
(БГУИР, г. Минск)

ВЗАИМОВЛИЯНИЕ ОБЪЕКТОВ МАЛЫХ РАЗМЕРОВ В МИКРОСХЕМЕ

Предлагается метод расчета потенциала поля единичного точечного заряда и источника конечных размеров в слоистой среде. Получены формулы для расчета напряжения наведенной помехи.

Целый ряд задач электромагнитной совместимости может быть сведен к вычислению поля элементарного (точечного) источника в слоистой среде. Для замены реального источника поля точечным необходимо и достаточно, чтобы размеры реального источника поля были малы по сравнению с расстоянием до источника. При исследовании внутриаппаратурной электромагнитной совместимости в области микроэлектроники необходимо учитывать, что источником помехи может быть не только проводник, но и бескорпусный элемент полупроводниковой или гибридной интегральной микросхемы, например светодиод или транзистор, работающий в режиме ключа или в режиме усиления.

В данной работе предлагаются ориентированные на использование в системах автоматизированного проектирования: а) метод вычисления потенциала поля элементарного источника в слоистой среде, в значительной степени свободный от недостатков традиционного метода, б) метод вычисления потенциала поля источника малых, но конечных размеров, а также в) метод расчета потенциальных коэффициентов для оценки помехи, наведенной в объекте малых размеров.

Решение дифференциального уравнения Лапласа для потенциала единичного элементарного источника поля в слоистой среде (т. е. функция Грина), как известно [1, 2], описывается формулой

$$G = K \int_0^\infty J_0(\lambda r)\,\Phi_i(\lambda, z - z_0)\,\mathrm{d}\lambda, \qquad (1)$$

где $K = 1/4\pi\varepsilon_0$ при расчете электростатического потенциала, $K = \mu_0/4\pi$ при решении магнитостатической задачи;
ε_0, μ_0 — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства, соответственно;
J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка;
r — радиус в цилиндрической системе координат;
z_0–z — разность аппликат источника поля и точки, где вычисляется поле;
$\Phi(\lambda, z-z_0) = \exp(-\lambda|z-z_0|)+g(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0)]+q(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0)]$.

Функции $g(\lambda)$ и $q(\lambda)$ определяются при решении соответствующей задачи теории потенциала из граничных условий. Метод получения аналитического выражения для функции $\Phi_i(\lambda, z-z_0)$ в строгом классическом варианте изложен в [1, 2], соответствующая инженерная методика изложена в [3, 4].

Известные решения

Для любой плоскости $z=z_0$ функция $\Phi_i(\lambda, z-z_0)=\Phi(\lambda)$ представляет собой дробно-рациональную функцию экспонент [3, 4], поэтому несобственный интеграл (1) выражается через первообразные лишь в простейших случаях, представляющих весьма ограниченный практический интерес. Известные способы приближенного вычисления интеграла (1) основаны на использовании тождества Вебера–Липшица

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)\exp(-\lambda\tau)\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\sqrt{r^2+\tau^2}} \quad (\tau \geq 0). \qquad (2)$$

Для этого функция $\Phi(\lambda)$ аппроксимируется экспоненциальным полиномом

$$\Lambda(\lambda) = \sum_{\upsilon=0}^{\Upsilon} B_\upsilon \exp(-\lambda\tau\upsilon) \quad (\Upsilon \leq \infty), \qquad (3)$$

выражение (3) подставляется в (1), и тогда с учетом соотношения (2) формула (1) для функции Грина упрощается:

$$G(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\upsilon=0}^{\Upsilon}\frac{B_\upsilon}{\sqrt{r^2+(\upsilon\tau)^2}}. \qquad (4)$$

Здесь τ — нормирующий множитель; B_υ — коэффициенты аппроксимации. При $\Upsilon = \infty$ равенство (4) является точным.

Точность вычисления функции Грина по формуле (4), как правило, либо оценивается эвристически, либо не рассматривается вообще: оценивается лишь точность аппроксимации функции $\Phi(\lambda)$. Редким исключением являются работы [1, 5], где при решении основной задачи электроразведки функцию $\Phi(\lambda)$ удается представить рядом Маклорена, который затем интегрируется; в результате функция Грина получается представленной медленно сходящимся рядом. При некоторых сочетаниях значений проводимости слоев ряд является знакопеременным, и тогда нетрудно оценить погрешность, которая получается при замене ряда его отрезком. Вследствие медленной сходимости таких рядов практическое их использование является проблематичным; способы улучшения их сходимости обсуждаются в [6]. В работе [3] предлагается аппроксимировать функцию $\Phi(\lambda)$ полиномами Лежандра по степеням переменной $u=\exp(-\lambda\tau)$, где τ — нормирующий множитель, причем трудоемкость вычисления коэффициентов аппроксимации сравнима с трудоемкостью вычисления самого интеграла (1). В [4] предлагается аппроксимация интерполяционным многочленом — линейной комбинацией функций Чебышева первого рода — с оптимальным выбором узлов на интервале [0,1] также по степеням переменной $u=\exp(-\lambda\tau)$. Учитывая простоту процедуры получения коэффициентов интерполяции [7] и известные возможности аппроксимации в базисе функций Чебышева первого рода, предлагаемый в [4] вариант представляется предпочтительным; нормирующий множитель при этом принимается равным удвоенной толщине подстилающего слоя (удвоенной толщине подложки).

Однако приближенные выражения для функции Грина вида (3), полученные с использованием формулы Вебера–Липшица, обладают тремя неустранимыми недостатками. Во-первых, интегрирование этих выражений по объему источника или приемника поля приводит к весьма громоздким выражениям [3, 4 и др.], а интегралы от функции Грина с весом, равным плотности элементарных источников поля, нередко через первообразные не выражаются. Во-вторых, в отсутствие методов точного вычисления интеграла (1) оценку погрешности его вычисления можно проводить лишь по внутренней сходимости; такая оценка не всегда надежна и не всегда возможна. В-третьих, как показывает вычислительный эксперимент с использованием предлагаемого ниже метода, при традиционном методе вычислений, предполагающем аппроксимацию функции $\Phi(\lambda)$ суммой экспонент и использование формулы Вебера–Липшица, погрешность расчета функции Грина существенно зависит от расстояния r и при его увеличении, сохраняя знак, быстро растет по абсолютной величине.

Необходим новый метод, позволяющий контролировать точность вычислений и приводящий к простым выражениям для функции Грина, пригодным для дальнейшего интегрирования. Такой метод предлагается ниже.

Предлагаемый метод

Представим выражение (1) в виде

$G=K(I_1+I_2)$,

где $I_1=\int\limits_0^{\beta} J_0(\lambda r)\Phi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$; $I_2=\int\limits_{\beta}^{\infty} J_0(\lambda r)\Phi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$;

β — произвольный предел интегрирования, выбираемый из условия

$$\Phi(\beta)\approx\Phi(\infty). \qquad (5)$$

Учитывая монотонный характер изменения функции $\Phi(\lambda)$, условие (5) при вычислении функции $\Phi(\lambda)$ может быть выполнено с любой требуемой степенью точности, ограниченной лишь особенностями языка программирования и техническими возможностями компьютера. Тогда

$$I_2\approx\Phi(\infty)\int\limits_{\beta}^{\infty} J_0(\lambda r)\,\mathrm{d}\lambda=\Phi(\infty)\cdot\Theta(\beta r), \qquad (6)$$

где аналитическое выражение функции $\Theta(\beta r)$ имеет вид

$$\Theta(\xi)=1-\xi J_0(\xi)+\frac{\pi\xi}{2}[J_0(\xi)\,\mathrm{H}_1(\xi)-J_1(\xi)\,\mathrm{H}_0(\xi)]. \qquad (7)$$

В выражении (7) J_κ — функция Бесселя первого рода κ-го порядка; H_κ — функция Струве κ-го порядка; $\xi=\beta r$; $\kappa=0,1$; $\pi=3,14159...$ [8].

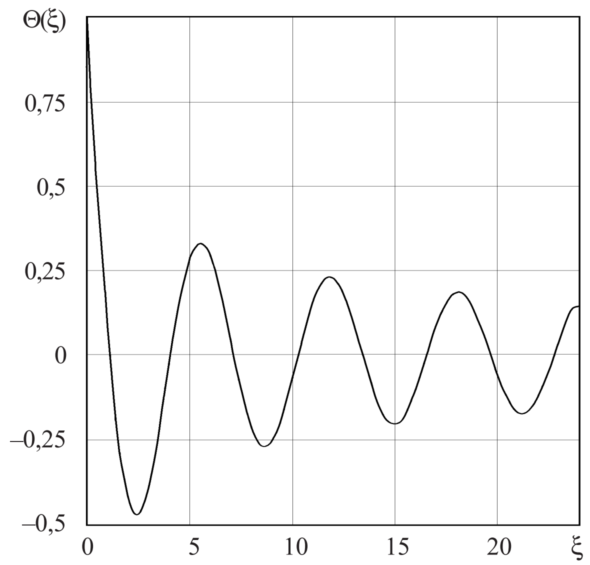

Рис. 1. Θ-функция

Функция $\Theta(\xi)$ имеет колебательный характер (см. **рис. 1**). Первые нули θ_κ ($\kappa=\overline{1,\ 20}$) этой функции представлены в **таблице**. При вычислении нулей с помощью выражения (7) функции Бесселя рассчитывались по интегральной формуле Бесселя [9, с. 182], функции Струве — по интегральной формуле Пуассона [9, с. 182]. Указанные интегральные представления хорошо верифицированы и допускают простой контроль погрешности. Повышенный, по сравнению, например, с [10], расход машинного времени при проведении данного исследования значения не имел. Для снижения влияния погрешности округления все вычисления проводились с учетом 32 десятичных знаков мантиссы каждого операнда. При численном интегрировании использовалась квадратурная формула Гаусса для трех узлов [7, раздел 20.7-3], причем для

Нули Θ-функции

κ	Нули θ_κ	κ	Нули θ_κ
1	1,108364661	11	32,220662040
2	4,062644472	12	35,360546791
3	7,151557848	13	38,500708053
4	10,269381067	14	41,641083834
5	13,397636191	15	44,781629355
6	16,530742102	16	47,922311469
7	19,666476075	17	51,063105122
8	22,803787326	18	54,203991027
9	25,942117194	19	57,344954096
10	29,081142112	20	60,485982359

снижения влияния методической погрешности интервал интегрирования был разбит на 10^4 шагов. При таком способе вычислений результат содержит по меньшей мере 11 верных десятичных знаков. Погрешность расчета интегралов контролировалась методом Рунге [11, с. 203], не требующим вычисления производной высокого порядка от подынтегральной функции.

Соотношение (5) с заданной относительной погрешностью не более δ_Φ обеспечивается любым пределом интегрирования $\beta_к \in [\beta, \infty]$. Чтобы выбрать нижний предел интегрирования для интеграла I_2, необходимо решить относительно β уравнение $1-\Phi(\beta)/\Phi(\infty)=\delta_\Phi$. Определяемый по таблице для наибольшего расстояния[1] r_{max} ближайший больший нуль Θ-функции $\theta_к$ даст величину произведения $\beta_{min} r_{max}$, которое обладает следующим свойством: для всех расстояний $r \le r_{max}$ может быть взят один и тот же нуль Θ-функции $\theta_к$, т. к. он соответствует значению предела $\beta_к=\theta_к/r \ge \beta_{min}$, а $\beta_к$ заведомо обеспечивает соотношение (5). Для всех $r \le r_{max}$ при выбранном $\theta_к=\beta_{min} r_{max}$ предел $\beta_к$ всегда обеспечивает равенство $I_2=0$ с требуемой точностью, и для всех $r \le r_{max}$ при расчете I_1 может быть принята величина $\beta_к=\theta_к/r$. Тогда по формуле (1) при $I_2=0$

$$G(r) = K \int_0^{\beta_к} J_0(\lambda r)\Phi(\lambda)\,d\lambda. \qquad (8)$$

Вычисление собственного интеграла с конечными пределами в (8) не представляет принципиальных трудностей при численном интегрировании. Оценку погрешности интегрирования можно проводить не только по внутренней сходимости: точность приближенных квадратурных формул хорошо изучена. Учитывая возможность разбиения интервала интегрирования на шаги, значение функции Грина в произвольной точке на плоскости $z=z_0$ может быть рассчитано по формуле (8) с любой требуемой точностью, которая принципиально ограничивается лишь возможностями компьютера и языка программирования. Следовательно, с математической точки зрения равенство (8) является практически точным: с его помощью можно получить практически точное значение потенциала точечного источника поля в пределах физических допущений, принятых при математической формализации задачи.

Это позволяет при вычислении потенциала в слоистой среде полученное с помощью формулы (8) значение условно считать точным и использовать его для контроля точности вычисления функции Грина приближенными методами, в том числе для контроля погрешности вычислений по формуле (4), т. е. погрешности, которая обусловлена аппроксимацией функции $\Phi(\lambda)$. Кроме того, выражение (8) может быть использовано для прямых расчетов поля при оценке скорости убывания потенциала в слоистой среде по мере удаления от источника, если размеры источника позволяют считать его точечным. Это может потребоваться, например, при использовании методики расчета радиуса зоны электромагнитного взаимовлияния объектов [12] или оценки значения наведенной помехи.

При необходимости вычисления поля в плоскости $z \ne z_0$ функция Грина из своей обычной формы представления [1, 3—5]

$$G = K\Big\{\int_0^\infty J_0(\lambda r)\exp(-\lambda|z-z_0|)d\lambda + \int_0^\infty J_0(\lambda r)g(\lambda)\exp[\lambda(z-z_0)]d\lambda + \int_0^\infty J_0(\lambda r)q(\lambda)\exp[\lambda(z_0-z)]d\lambda\Big\}$$

преобразуется в аппроксимирующую функцию:

$$G = K\int_0^\infty J_0(\lambda r)\Omega(\lambda)\exp[-\lambda|z_0-z|]d\lambda, \qquad (9)$$

и тогда значение $\beta_к$ определяется не для функции Φ, а для функции $\Omega(\lambda)\exp[-\lambda|z_0-z|]$ при максимальном значении $|z-z_0|$, известном по условию задачи. В этом случае потенциал точечного источника также оказывается представленным выражением, аналогичным (8):

$$G = K\int_0^{\beta_к} J_0(\lambda r)\Omega(\lambda)\exp[-\lambda|z_0-z|]d\lambda. \qquad (10)$$

Неустранимым, на первый взгляд, недостатком формы представления функции Грина (8), (10) является трудность интегрирования по объему реального источника поля с весом, равным плотности распределения элементарных источников. Указанный недостаток легко возмещается простотой и доступностью получения точных значений функции Грина по формулам (8), (10), что обеспечивает возможность использования этих формул не только для контроля точности. В случае необходимости можно провести аппроксимацию выражений (8), (10), причем вид аппроксимации можно подобрать с учетом возможности последующего интегрирования. Это может быть, например, отрезок степенного ряда по четным степеням радиуса r или отрезок ряда Дирихле и т. д.[2]

Поле малого источника конечных размеров

Роль паразитных емкостных (т. е. обусловленных электрическим полем) связей неоднократно подчеркивалась в специальных работах, посвященных проектированию микросхем (см. [13, 14] и др.). Так, в [14, с. 270] с помощью стандартного иерархического подхода методами статистической механики показана доминирующая роль парного взаимодействия соседних объектов.

[1] В качестве наибольшего размера r_{max}, необходимого для прямых расчетов поля или последующего интегрирования функции Грина, может быть принята, например, длина самого длинного прямоугольного проводника на подложке или диагональ рабочего поля подложки.

[2] Разработка и исследование конкретных видов аппроксимирующих выражений, учитывающих специфику конкретных задач, выходит за рамки данной статьи.

Рассмотрим пару компланарных объектов, форма которых аппроксимируется параллелепипедом: расположенный в начале прямоугольной системы координат источник поля длиной l, шириной b и высотой t и второй объект длиной l_0, шириной b_0 и высотой t_0, который подвергается воздействию поля источника и в этом отношении является приемником помехи (см. схематичный пример исследуемой конструкции на **рис. 2**). Будем полагать, что по сравнению с расстоянием от источника до приемника помехи размеры источника малы, но конечны.

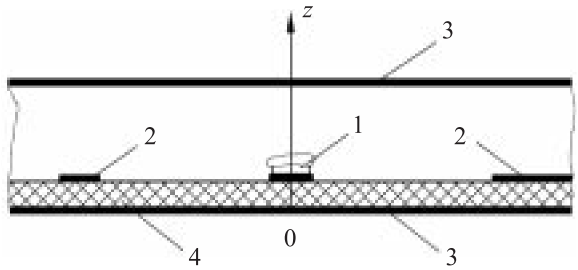

Рис. 2. Гибридная интегральная микросхема как пример исследуемой конструкции, адекватной слоистой среде: *1* — бескорпусный транзистор; *2* — проводники; *3* — верхняя и нижняя крышки металлического корпуса; *4* — диэлектрическая подложка

Аппроксимация функции $\Omega(\lambda)$ в (10) приводит к выражению для функции Грина, несколько отличающемуся от (4):

$$G=\frac{K}{\sqrt{r^2+\left|z-z_0\right|^2}}+K\sum_{\upsilon=1}^{\Upsilon}\frac{T_\upsilon}{\sqrt{r^2+(\upsilon\tau+\left|z-z_0\right|)^2}}, \quad (11)$$

где первое слагаемое описывает потенциал поля в пустом пространстве, а второе представляет собой поправку, которая учитывает наличие слоистой среды.

При расчете поля в дальней зоне (т. е. на расстояниях, значительно превышающих размеры источника) можно воспользоваться приемом, который нередко используется при расчете потенциала методом моментов [15] (см., например, [16]). При использовании этого метода поверхность источника поля разбивается на участки, в пределах каждого из которых плотность зарядов описывается аппроксимирующей функцией; вид функции может быть различным: его задают, исходя из специфики решаемой задачи.

Будем полагать, что размеры l, b и t источника поля достаточно малы, и поэтому нет нужды разбивать его поверхность на участки. Плотность распределения заряда $\eta(x_0, y_0, z_0)$ по поверхности будем описывать импульсными функциями Дирака (δ-функциями):

$$\eta(x_0, y_0, z_0)=\delta(x_0)\cdot\delta(y_0)\cdot\delta(z_0). \quad (12)$$

Выражение (12) удовлетворяет условие нормировки

$$\int_{-l/2}^{l/2}\mathrm{d}x_0\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y_0\int_{-t/2}^{t/2}\eta(x_0, y_0, z_0)\,\mathrm{d}z_0=1.$$

Тогда потенциал, создаваемый таким источником поля в точке с координатами x , y , z:

$$\varphi(x,y,z)=K\iiint_{V_0}\eta(x_0,y_0,z_0)G(x_0,y_0,z_0)\mathrm{d}V_0, \quad (13)$$

где V_0 — объем пространства, занимаемый источником.

По формуле (13) с учетом (11) и (12):

$$\varphi(x,y,z)=\frac{K}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+$$

$$+K\sum_{\upsilon=1}^{\Upsilon}\frac{T_\upsilon}{\sqrt{x^2+y^2+(\upsilon\tau+|z|)^2}}. \quad (14)$$

Будем полагать, что границы приемника помехи имеют координаты x_1, x_1+l_0, y_1, y_1+b_0, z_1 и z_1+t_0. Усредняя потенциал $\varphi(x, y, z)$ по площади приемника помехи в плоскости $x0y$, получим:

$$\varphi_{x0y}(z)=\frac{K}{l_0b_0}\int_{y_1}^{y_1+b_0}\mathrm{d}y\int_{x_1}^{x_1+b_0}\varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{K}{l_0b_0}\sum_{\upsilon=0}^{\Upsilon}T_\upsilon\,[\psi_\upsilon(x_1+l_0, y_1+b_0)-\psi_\upsilon(x_1, y_1+b_0)-$$

$$-\psi_\upsilon(x_1+l_0, y_1)+\psi_\upsilon(x_1, y_1)],$$

где $\psi_\upsilon(x,y)=y\,\mathrm{Arsh}\dfrac{x}{\sqrt{y^2+(\upsilon\tau+|z|)^2}}+$

$$+x\,\mathrm{Arsh}\frac{y}{\sqrt{x^2+(\upsilon\tau+|z|)^2}}-(\upsilon\tau+|z|)\times$$

$$\times\mathrm{arctg}\frac{xy}{(\upsilon\tau+|z|)\sqrt{x^2+y^2+(\upsilon\tau+|z|)^2}}. \quad (15)$$

Дальнейшее интегрирование неминуемо приведет к чрезмерному усложнению формулы для расчета потенциала, поэтому выражение (15) нуждается в упрощении. Для этого следует учесть, что расстояние между плоскостями, где расположены источник и приемник помехи, равно нулю или мало по сравнению с расстоянием между названными объектами, т. е. $z\approx z_0$; $z_2<<x_2$; $z_2<<y_2$; $x\in[x_1, x_1+l_0]$; $y\in[y_1, y_1+b_0]$; $z\in[z_1, z_1+t_0]$.

Кроме того, обычно $\upsilon\tau>>|z|$, поэтому при $\upsilon\neq0$ можно либо пренебречь $|z|$ по сравнению с $\upsilon\tau$, т. е. принять

$$(\upsilon\tau+|z|)\,\mathrm{arctg}\frac{xy}{(\upsilon\tau+|z|)\sqrt{x^2+y^2+(\upsilon\tau+|z|)^2}}\approx$$

$$\approx\upsilon\tau\ \mathrm{arctg}\frac{xy}{\upsilon\tau\sqrt{x^2+y^2+(\upsilon\tau)^2}},$$

либо последующее интегрирование провести численно и использовать при этом простейшую квадратурную формулу с одним узлом.

При $\upsilon=0$ функцию arctg можно представить отрезком ряда [17]. Если ограничиться линейным относительно z членом ряда, то

$$|z|\,\mathrm{arctg}\,\frac{xy}{z\sqrt{x^2+y^2}}\approx\frac{\pi|z|}{2}-\frac{z^2\sqrt{x^2+y^2}}{xy}.$$

Тогда, усредняя потенциал $\varphi(x, y, z)$ по объему приемника помехи, получим:

$$\varphi_{п}=\int_{z_1}^{z_1+t_0}\varphi_{x0y}(z)\,\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{K}{l_0b_0t_0}\sum_{\upsilon=0}^{\Upsilon}T_\upsilon[\varphi_\upsilon(x_1+l_0,y_1+b_0)-\varphi_\upsilon(x_1,y_1+b_0)-$$

$$-\varphi_\upsilon(x_1+l_0,\,y_1)+\varphi_\upsilon(x_1,y_1)],\qquad(16)$$

где

$$\varphi_\upsilon(x,y)=t_0\Big[y\,\mathrm{Arsh}\,\frac{x}{\sqrt{y^2+(\upsilon\tau+|z|)^2}}+$$

$$+x\,\mathrm{Arsh}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+(\upsilon\tau+|z|)^2}}\Big]+\chi_\upsilon;$$

при υ=0

$$\chi_0=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy}[(z_1+t_0)^3-z_1^3]/3-\pi[(z_1+t_0)^2-z_1^2]/4;$$

при $\upsilon\neq 0$

$$\chi_\upsilon=t_0(\upsilon\tau+|z|/2)\times$$

$$\times\mathrm{arctg}\,\frac{xy}{(\upsilon\tau+|z|/2)\sqrt{x^2+y^2+(\upsilon\tau+|z|/2)^2}}.$$

Выражение (16) может быть использовано для прямых расчетов поля в дальней зоне при оценке скорости убывания потенциала в слоистой среде по мере удаления от источника помехи, имеющего малые, но конечные размеры. Это может потребоваться, например, при расчете радиуса зоны электромагнитного взаимовлияния объектов [12].

При расчете поля в ближней зоне использованные выше способы упрощения получаемых выражений неприемлемы. В этом случае значительно упростить рабочие формулы можно с помощью кубатурной формулы Максвелла, известной в отечественной литературе как метод средних геометрических расстояний (**СГР**). Метод был предложен Максвеллом в работе [18, § 691]. Как известно, он приводит к точному результату лишь в случае бесконечно длинных прямолинейных проводов постоянного поперечного сечения. Однако, в отличие от [3], метод СГР целесообразно использовать для интегрирования только по высоте, а не по площади поперечного сечения. Учитывая высокую точность метода СГР [19], можно ожидать, что такой прием позволит обеспечить вполне приемлемую погрешность.

Потенциал, создаваемый всем объемом источника поля V_0 и усредненный по этому объему (V=V_0), можно представить в виде суммы:

$$\varphi_{и}=\frac{K}{lbt}\iiint_V\mathrm{d}V\iiint_{V_0}\eta(x_0,y_0,z_0)G(x_0,y_0,z_0)\mathrm{d}V_0=$$

$$=\varphi_0+\Delta\varphi,\qquad(17)$$

где φ_0 — усредненный потенциал, создаваемый в пустом пространстве объемом V_0;

$\Delta\varphi_0$ — поправка, учитывающая наличие слоистой среды.

Что касается распределения заряда, то при расчетах потенциала в объеме источника по формуле (17) аппроксимация (12) может оказаться неудовлетворительной. Нередко заряд по объему V_0 распределен сложным образом неравномерно и к тому же существенно меняется в процессе функционирования источника (например, транзистора). Выходом из положения может служить использование специальной программы электрофизического моделирования, базирующейся на решении фундаментальной системы уравнений полупроводников; это приемлемо лишь при проведении научных исследований или при малой размерности проектной задачи. Другим выходом является применение двухсторонней оценки потенциала, как это сделано, например, в [19].

При постоянной плотности заряда по объему V_0

$$\eta(z_0)=1/t;\ \eta(y_0)=1/b;\ \eta(x_0)=1/l.\qquad(18)$$

Тогда, выполняя шестикратное интегрирование по формуле (17) с учетом формулы (11) при распределении заряда (18), получим:

$$\varphi_0=\frac{2K}{(lb)^2}\Big[b(l^2-s^2)\,\mathrm{Arsh}\,\frac{b}{A}+l(b^2-s^2)\,\mathrm{Arsh}\,\frac{l}{D}+$$

$$+s^2(b\,\mathrm{Arsh}\,\frac{b}{s}+l\,\mathrm{Arsh}\,\frac{l}{s}+E-A-D)+$$

$$+\frac{2s^3+D^3+A^3-E^3}{3}-2s\,\mathrm{arctg}\,\frac{lb}{sE}\Big],\qquad(19)$$

где $A=\sqrt{l^2+s^2}$; $D=\sqrt{b^2+s^2}$; $E=\sqrt{l^2+b^2+s^2}$;
s=$t\cdot\exp(-3/2)$ — среднее геометрическое расстояние отрезка прямой, который имеет длину t, от самого себя.

Для источников, не слишком протяженных вдоль оси аппликат (т. е. при $s\ll\tau$, что обычно соблюдается), поправка $\Delta\varphi$, позволяющая учесть влияние слоистой среды, от высоты объекта (например, проводника) не зависит. Тогда

$$\Delta\varphi=\frac{2K}{(tbl)^2}\sum_{\upsilon=0}^{\Upsilon}T_\upsilon\Big[b(l^2-\tau_\upsilon^2)\,\mathrm{Arsh}\,\frac{b}{A}+$$

$$+l(b^2-\tau_\upsilon^2)\,\mathrm{Arsh}\,\frac{l}{D}+\tau_\upsilon^2(b\,\mathrm{Arsh}\,\frac{b}{\tau_\upsilon}+$$

$$+l\,\mathrm{Arsh}\,\frac{l}{\tau_\upsilon}+E-A-D)+\frac{2\tau_\upsilon^3+D^3+A^3-E^3}{3}-$$

$$-2bl\tau_\upsilon\,\mathrm{arctg}\,\frac{bl}{E\tau_\upsilon}\Big],\qquad(20)$$

где $E=\sqrt{l^2+b^2+\tau_\upsilon^2}$; $A=\sqrt{l^2+\tau_\upsilon^2}$; $D=\sqrt{b^2+\tau_\upsilon^2}$;
$\tau_\upsilon=\upsilon\tau$.

Если распределение плотности заряда описывается соотношениями

$$\eta(z_0)=1/t;\;\; \eta(x_0,y_0)=\delta(x_0)\cdot\delta(y_0), \qquad (21)$$

то шестикратное интегрирование по формуле (17) с учетом формулы (11) при распределении заряда (21) и использовании метода СГР для интегрирования по z и z_0 дает:

$$\varphi_{\text{и}}=\frac{K}{lb}\sum_{\upsilon=0}^{\Upsilon}T_\upsilon\Bigg[b\,\mathrm{Arsh}\frac{l}{\sqrt{b^2+(\upsilon\tau+s)^2}}+$$

$$+l\,\mathrm{Arsh}\frac{b}{\sqrt{l^2+(\upsilon\tau+s)^2}}-$$

$$-(\upsilon\tau+s)\,\mathrm{arctg}\frac{bl}{(\upsilon\tau+s)\sqrt{l^2+b^2+(\upsilon\tau+s)^2}}\Bigg]. \qquad (22)$$

Как показывает вычислительный эксперимент, аналогичный описанному в [19], формулы (19), (20), (22) дают двухстороннюю оценку потенциала при неизвестном, в том числе меняющемся, распределении заряда в объеме источника. При $K=1/4\pi\varepsilon_0$ формулы (16), (19), (20), (22) позволяют вычислить коэффициент затухания α потенциала электрического поля, создаваемого источником поля малых размеров (коэффициент передачи канала паразитной связи по напряжению):

$$\alpha=\varphi_{\text{п}}/\varphi_{\text{и}}. \qquad (23)$$

На основании принципа взаимности [1] можно утверждать, что формула (23) позволяет оценить в квазистационарном приближении степень *взаимного* влияния двух объектов на расстоянии, значительно превышающем размеры источника помехи, в слоистой среде.

Однако принятая при исследовании математическая модель физических явлений не учитывает частотную зависимость коэффициента передачи, а также реально существующих в микросхеме связей через элементы электрической принципиальной схемы. Этот недостаток легко устранить, если вычислить собственные и взаимную емкости названных выше объектов и включить эти емкости в эквивалентную схему, по которой можно рассчитать токи и напряжения в микросхеме во всем диапазоне рабочих частот или во временной области. Нужные емкости, как известно [20, с. 7], рассчитываются через потенциальные коэффициенты; соотношение (15) фактически представляет собой формулу для расчета взаимного потенциального коэффициента, а соотношение (16) — формулу для расчета собственного потенциального коэффициента методом Хоу [20, с. 21].

***

Полученные результаты могут быть полезны при разработке математического и программного обеспечения САПР, а также на стадии предпроектных исследований при численно-эвристической оптимизации схемотехнических и конструкторских решений.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1977.
2. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика.— М.: Физматгиз, 1963.
3. Семенцов В. И. Расчет емкостей плоских проводников в слоистых средах // Радиотехника.— 1973.— Т. 28, № 10.— С. 84—90.
4. Конников И. А. Расчет емкостей прямоугольных пленочных проводников с произвольным коэффициентом формы // Судостроение.— 1980.— № 8.— С. 32—33.
5. Заборовский А. И. Электроразведка.— М.: Гостоптехиздат, 1963.
6. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1.— М.: ИЛ, 1958.
7. Корн Г. А., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров.— СПб: Лань, 2003.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1971.
9. Справочник по специальным функциям // Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.
10. Скобло В. С. Методика аппроксимации цилиндрических функций // Известия вузов. Приборостроение.— 2005.— № 7.— С. 61—63.
11. Хемминг Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров.— М.: Наука, 1972.
12. Конников И. А., Соколов С. А., Янчук Е. С. Ранжирование электромагнитных связей в коммуникаторах микросборок судовой РЭА // Судостроение.— 1986.— № 10.— С. 32—34.
13. Мурога С. Системное проектирование СБИС. Т. 1.— М.: Мир, 1986.
14. Ферри Д., Эйкерс Л., Гринич Э. Электроника ультрабольших интегральных схем.— М.: Мир, 1991.
15. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— СПб.: Невский диалект, 2004.
16. Cao Wei, Harrington R. F., Mautz J. R., Sarcar T. K. Multiconductor transmission lines in multilayered dielectric media // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques.— 1984.— Vol. 32, N 4.— P. 439—450.
17. Двайт Г. В. Таблицы интегралов и другие математические формулы.— М.: Наука, 1978.
18. Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. 2.— М.: Наука, 1989.
19. Конников И. А. Емкость тонкого проводника прямоугольного сечения в микросхеме // Технология и конструирование в электронной аппаратуре.— 2006.— № 4.— С. 18—23.
20. Иоссель Ю. Я., Кочанов Э. С., Струнский М. Г. Расчет электрической емкости.— Л.: Энергия, 1969.

в портфеле редакции в портфеле редакции в портфеле редакции в портфеле редакции

в портфеле редакции

- Конденсор тепловой трубы на основе адиабатического размагничивания парамагнитного вещества. (Россия, г. Таганрог)

- Методика определения эффективной площади фоточувствительного элемента фотодиода. (Украина, г. Черновцы)
- Повышение тепловой надежности ИС на этапе размещения элементов. (Армения, г. Ереван)
- Проектирование и анализ сумматоров в среде Active-HDL. (Украина, г. Одесса)

в портфеле редакции

в портфеле редакции в портфеле редакции в портфеле редакции в портфеле редакции