

И. А. КОННИКОВ

Россия, г. С.-Петербург, Государственный университет культуры  
E-mail: konnikov@peterstar.ru

Дата поступления в редакцию  
29.03 2006 г.

Оппонент д. т. н. В. В. БАРАНОВ  
(БГУИР, г. Минск)

## ЕМКОСТЬ ТОНКОГО ПРОВОДНИКА ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ В МИКРОСХЕМЕ

*Предложены формулы для расчета потенциального коэффициента прямоуглольного пленочного проводника с учетом его толщины и закона распределения заряда в слоистой среде.*

Задача расчета емкости тела в форме параллелепипеда в слоистой среде особенно важна в микроэлектронике для дальнейшего совершенствования методов расчета паразитных емкостей пленочных проводников микросхем и микросборок<sup>1</sup>. Снижение в последние годы числа публикаций по проблеме расчета емкости проводника с учетом его формы, размеров, распределения заряда и влияния конструкции проектируемого устройства свидетельствует не о снижении актуальности проблемы и не об успешном завершении исследований, а скорее о сложности решаемых задач. Это приводит разработчиков аппаратуры к использованию либо трудоемких вычислительных методов, либо приближенных результатов, основанных на упрощенном решении задачи.

Как правило, современные вычислительные методы принципиально позволяют решить проектную задачу в достаточно строгой постановке [1—3 и др.], однако на практике они ограничивают размерность решаемых задач в силу ограниченных возможностей вычислительных средств. При проектировании современных микросхем даже с учетом возможной декомпозиции решаемой задачи нередко возникает необходимость расчета матрицы емкостей сотен пленочных проводников, поэтому, как справедливо отмечается в [1], необходима ориентация на методы и алгоритмы, позволяющие проводить расчет емкостей проводников по формулам.

В работах [4, 5] решение задачи имеется лишь для некоторых частных случаев (в основном — для свободного пространства), которые далеко не исчерпывают всего многообразия конструкций современной аппаратуры. В работе [1] предлагаются формулы, в которых толщины проводников не фигурируют. Интересные и полезные результаты получены в [6, 7]. Однако предлагаемые в этих работах формулы не позволяют учесть имеющую место неравномерность распределения заряда по проводнику. Кроме того, не вполне удачное применение максвелловского метода

<sup>1</sup> Поперечное сечение таких проводников имеет форму, близкую к прямоугольной.

средних геометрических расстояний [8] ограничивает область корректного использования формул, полученных в [6, 7], случаем длинных, узких, тонких проводников. В работе [9] предлагается инженерная методика решения задачи лишь для бесконечно тонких проводников с произвольным соотношением длины и ширины и без учета неравномерности распределения заряда.

Предлагаемое в настоящей статье решение основано на использовании функции Грина.

### Функция Грина

В качестве физической модели реальной конструкции проектируемого устройства целесообразно принять слоистую диэлектрическую среду, состоящую из произвольного числа плоскопараллельных слоев с разными диэлектрическими проницаемостями. Слои расположены перпендикулярно оси аппликат, неограничены в азимутальном направлении и считаются гомогенными, изотропными, непроводящими. Первый и/или последний слой может быть ограничен идеально проводящей плоскостью, моделирующей наличие металлического корпуса. На границе раздела  $i$ -го слоя с предыдущим ( $i > 1$ ), где находятся подлежащие исследованию коммутационные проводники, расположен единичный точечный заряд. Физические процессы в модели считаются квазистационарными.

Такая модель в большинстве практических случаев адекватна реальной конструкции проектируемой микросхемы (см. рис. 1) или печатной платы. Потенциал электрического поля  $\varphi$  во всех точках такой модели (кроме точки, где расположен единичный точечный заряд) удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta^2\varphi=0$ . Методика определения функции Грина для уравнения Лапласа в такой модели была предложена в [10] и развита в целом ряде работ, в том числе [11, 6, 7].

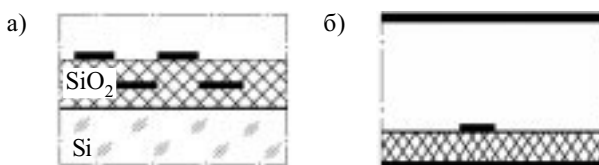


Рис. 1. Варианты конструктивно-технологической реализации объекта исследования, адекватные слоистой среде: а — параллельные проводники, расположенные на окисленной кремниевой подложке в полупроводниковой микросхеме; б — проводник на диэлектрической подложке в тонкопленочной или толстопленочной микросхеме

Решение уравнения Лапласа для потенциала единичного точечного заряда в  $i$ -м слое модели (т. е. функция Грина в слоистой среде), как известно, дается формулой

$$G = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \Phi_i(\lambda, z - z_0) d\lambda, \quad (1)$$

где  $\epsilon_0$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость свободного пространства;  
 $J_0$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  
 $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ ;  
 $x_0, y_0, z_0$  — абсцисса, ордината и аппликата точки, где вычисляется поле;  
 $x, y, z$  — абсцисса, ордината и аппликата источника поля.

Функция  $\Phi_i(\lambda, z - z_0)$  определяется из граничных условий. Метод получения аналитического выражения  $\Phi_i(\lambda, z - z_0)$  для полей различной физической природы в строгом классическом варианте изложен в [11, 12], соответствующая инженерная методика для потенциала электрического поля представлена в [6, 7, 9].

Несобственный интеграл (1) выражается через первообразные только в простейших случаях. Предлагаемые различными авторами способы его приближенного вычисления основаны на использовании известного тождества

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) \exp(-\lambda \tau) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \tau^2}}, \quad (\tau \geq 0). \quad (2)$$

Так, в [12, с. 378] при решении аналогичной задачи (основной задачи электроразведки) предлагается представить функцию  $\Phi_i(\lambda, z - z_0)$  рядом Маклорена с последующим его интегрированием; в результате функция Грина получается представленной медленно сходящимся рядом. В [6] предлагается аппроксимация полиномами Лежандра по степеням  $u = \exp(-\lambda \tau)$ , где  $\tau$  — масштабирующий множитель, причем трудоемкость вычисления коэффициентов аппроксимации сравнима с трудоемкостью вычисления самого интеграла (1). В [9] предлагается аппроксимация интерполяционным многочленом с оптимальным выбором узлов также по степеням  $u = \exp(-\lambda \tau)$ . С учетом простоты процедуры получения коэффициентов интерполяции [13] и известных возможностей аппроксимации в базе функций Чебышева первого рода предлагаемый в [9] вариант представляется предпочтительным.

Далее будем рассматривать проводник длиной  $l$ , шириной  $b$  и толщиной  $t$ .

Для тонкого проводника ( $t \ll \tau$ ) изменение  $\Phi_i(\lambda, z - z_0)$  по толщине проводника вдоль оси аппликат можно учесть приближенно. Функцию  $\Phi_i(\lambda, z - z_0)$  легко представить в виде [6, 7, 9]

$$\Phi_i(\lambda, z - z_0) = \exp(-\lambda |z - z_0|) +$$

$$+ g_i(\lambda) \exp[\lambda(z_0 - z)] + q_i(\lambda) \exp[\lambda(z - z_0)],$$

$g_i(\lambda)$  и  $q_i(\lambda)$  — функции, определяемые из граничных условий.

Первое слагаемое этого выражения моделирует поле в свободном пространстве, а два следующих слагаемых являются поправкой, учитывающей неоднородность среды, в том числе наличие экранов.

Поэтому первое слагаемое должно рассчитываться с максимальной доступной точностью.

Разумно полагать, что в пределах объема тонкого проводника при изменении аппликат в малом интервале  $[0, t]$  поле изменяется незначительно. При изменении  $z - z_0$  приращения слагаемых, включающих экспоненты с показателями разных знаков, значительно компенсируют друг друга. Тогда, полагая для второго и третьего слагаемых  $z - z_0 = 0$ , получим, что

$$g_i(\lambda) \exp[\lambda(z_0 - z)] + q_i(\lambda) \exp[\lambda(z - z_0)] \approx g_i(\lambda) + q_i(\lambda) = \sum_{v=0}^Y T_v \exp(-v \lambda \tau),$$

как для бесконечно тонкого проводника.

Коэффициенты  $T_v$  определяются по методике [13, § 20.5—5]. Обычно при надлежащем выборе масштабирующего множителя  $\tau$  бывает достаточным принять  $Y=2$ . Аналитическое выражение для функции Грина примет вид

$$G = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{v=0}^Y \frac{T_v}{\sqrt{r^2 + \tau_v^2}}.$$

### Распределение заряда

Величина потенциального коэффициента  $a$  проводника зависит от распределения заряда по его объему. По формулам (1), (2),

$$a = a_0 + \Delta a,$$

где  $a_0$  — потенциальный коэффициент проводника в свободном пространстве:

$$a_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b l t} \int_{z_1}^{z_1+t} dz_0 \int_{z_1}^{z_1+t} \eta(z) dz \int_0^b dy_0 \int_0^b \eta(y) dy \times \int_0^l dx_0 \int_0^l \frac{\eta(x) dx}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}}. \quad (3)$$

Величина  $\Delta a$  представляет собой поправку, позволяющую учесть влияние слоистой среды на величину потенциального коэффициента:

$$\Delta a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b l t} \int_{z_1}^{z_1+t} dz_0 \int_{z_1}^{z_1+t} \eta(z) dz \int_0^b dy_0 \int_0^b \eta(y) dy \times \int_0^l dx_0 \int_0^l \eta(x) \sum_{v=0}^Y \frac{T_v}{\sqrt{r^2 + (v\tau)^2}} dx, \quad (4)$$

где  $\eta(z)$ ,  $\eta(y)$ ,  $\eta(x)$  — плотность заряда вдоль осей аппликат, ординат и абсцисс, соответственно;  $Z_i$  — аппликата  $i$ -й границы раздела слоев модели, где расположен заряд (аппликата того слоя коммутации, для которого рассчитывается емкость).

При проведении научных исследований и решении проектных задач с малым количеством проводников для нахождения плотности заряда используют целый ряд численных методов. Как показано в [14], многие из них эквивалентны методу моментов [15] или являются его разновидностями.

При решении проектных задач большой размерности в системах автоматизированного проектирования для расчета емкостей пленочных проводников обычно используется метод Хоу, который не позво-

ляет учесть неравномерность распределения заряда по проводнику, но выгодно отличается от других методов по требуемому объему вычислений. Тем не менее хорошо известно, что указанный метод приводит к довольно заметной погрешности при расчете емкостей уединенных плоских пластин [16], причем результат всегда получается заниженным [4]. Источником погрешности метода Хоу является допущение о равномерном распределении заряда по поверхности пластины, которое на самом деле резко неравномерно как по ее длине, так и по ширине.

Однако, как показано в [17], распределение заряда по длине токоведущего проводника существенно отличается от распределения заряда по длине уединенной пластины той же формы. В проводниках, в отличие от уединенных пластин, заряды на концах проводника не скапливаются, краевой эффект имеет место лишь в поперечном направлении, и для низкоомных проводников распределение заряда вдоль вектора тока можно считать постоянным. Допущение метода Хоу о равномерном по длине проводника распределении заряда, в отличие от уединенных пластин, в квазистационарном приближении правильно отражает характер физических процессов в реальном физическом объекте [17].

Что касается распределения заряда по поперечному сечению проводника, то оно зависит не только от формы поперечного сечения (которая определяет степень проявления краевого эффекта), как показано в [18, 19], но также от скин-эффекта и потенциалов соседних проводников, и **может существенно меняться** в процессе работы схемы. Необходимость расчета емкости при известном лишь приближенно и меняющемся распределении заряда принципиально отличает токоведущие проводники микросхем и печатных плат от уединенных тел известной правильной формы, для которых распределение заряда поддается теоретическому определению гораздо легче. Это еще одна причина, по которой, пренебрегая влиянием соседних проводников на распределение заряда, при расчете матрицы емкостей проводников обычно используют метод Хоу.

Для получения более высокой точности, чем достигаемая при применении метода Хоу, можно воспользоваться методом моментов [1, 15], решить вариационную задачу так, как это сделано в [3], или использовать аналитически задаваемую аппроксимирующую функцию, которая известна априори или задается эвристически [20]. Эта функция должна достаточно правильно отражать лишь характер равновесного распределения заряда по ширине проводника, поскольку емкость является функционалом, стационарным относительно небольших изменений распределения заряда [16]. Метод аппроксимирующей функции приводит к результатам, позволяющим свести затраты времени к необходимому минимуму.

Примем, что ось продольной симметрии проводника совпадает с осью абсцисс. Распределение плотности заряда  $\eta(y)$  по ширине  $b$  проводника на интервале  $[-b/2, b/2]$  аппроксимируем степенным двучленным четной степени  $n > 1$ , т. е. выражением вида

$$\eta(y) = \eta_{cp} [A + B(2y/b)^n], \quad (5)$$

где  $\eta_{cp}$  — средняя по ширине плотность заряда, принимаемая при расчете методом Хоу;

$A, B$  — коэффициенты аппроксимации.

Коэффициенты аппроксимации  $A$  и  $B$  находим из условия нормировки заряда

$$\int_{-b/2}^{b/2} \eta(y) dy = b \eta_{cp} \quad (6)$$

и условия заданной неравномерности плотности заряда  $N$  по ширине

$$\eta(\pm b/2)/\eta(0) = N. \quad (7)$$

Из выражений (5), (6), (7) получим:

$$A = (n+1)/(n+N);$$

$$B = (n+1)(N-1)/(n+N).$$

Для степенного многочлена второй степени

$$A = 3/(N+2); \quad B = 3(N-1)/(N+2). \quad (8)$$

Из выражения (8) следует, что при  $-b/2 \leq y \leq b/2$

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \eta(y)/\eta_{cp} = b[\delta(y+b/2) + \delta(y-b/2)], \quad (9)$$

где  $\delta(\xi)$  — функция Дирака аргумента  $\xi = y \pm b/2$ .

Для различных законов распределения заряда по ширине пределом при  $N \rightarrow \infty$  будет выражение (9), из которого следует, что плотность заряда обращается в бесконечность при  $y = \pm b/2$  [17]. Идеализация, при которой  $\eta(\pm b/2) = \infty$ , широко распространена в специальной литературе, однако проведенные в [18, 19] исследования показывают, что распределение плотности заряда по ширине проводника существенно зависит от формы его поперечного сечения, и на кромках проводника на самом деле имеет конечную величину, причем плотность заряда на кромках и неравномерность  $N$  тем выше, чем меньше отношение толщины проводника к его ширине.

Для расчета емкости распределение заряда (5) при  $n=2$ , дающее конечную величину  $\eta(\pm b/2)$ , по-видимому, наиболее адекватно описывает распределение заряда по ширине реальных проводников в микросхемах высокой степени интеграции. Поэтому случай  $N = \infty$ , соответствующий выражению (9), также полезно рассмотреть как граничный для оценки влияния максимально возможной неравномерности плотности заряда на емкость проводника. В случае предельно асимметричного распределения, которое имеет место при суперпозиции любых факторов, локализуемых заряды у одной из кромок, емкость проводника равна емкости для случая предельно неравномерного симметричного распределения [17].

#### Получение расчетных формул

Как отмечено выше, мы рассматриваем проводник в форме параллелепипеда длиной  $l$ , шириной  $b$  и толщиной  $t$  в слоистой среде. При вычислении его потенциального коэффициента по формулам (3), (4) двукратный интеграл по  $z$  и  $z_0$  легко выразить через первообразные. Однако такой способ вычислений приводит к весьма громоздким конечным результатам, выраженным через функции Лагерра. Этот недостаток можно устранить, если после интегрирования по  $z$  и  $z_0$  члены, содержащие  $t$ , присоединить к функциям  $g(\lambda)$  и  $q(\lambda)$  и аппроксимировать их совмест-

но, включая их в коэффициенты  $T_v$ . Однако при таком подходе в конечных формулах толщина  $t$  в явном виде не фигурирует. В этом случае потребность в исследовании влияния толщины проводника на его емкость может привести к значительному увеличению числа  $Y$  и, как следствие, увеличению объема вычислений, особенно для малых  $t$ .

Устранить оба этих недостатка, значительно упрощая получаемые выражения, можно воспользовавшись методом средних геометрических расстояний. Метод был предложен Максвеллом в работе [8, § 691]. Как известно, он приводит к точному результату в случае бесконечно длинных прямолинейных проводов постоянного поперечного сечения. В отличие от [6, 7], метод средних геометрических расстояний можно использовать для интегрирования только по толщине, а не по площади поперечного сечения. Учитывая, что длина проводника микросхемы обычно не менее чем на 3 десятичных порядка превосходит его толщину, можно ожидать, что такой прием позволит обеспечить пренебрежимо малую погрешность при указанном соотношении размеров области интегрирования.

При постоянной плотности заряда по объему проводника

$$\eta(z) = 1/t; \quad \eta(y) = 1/b; \quad \eta(x) = 1/l.$$

Тогда, по формуле (3), потенциальный коэффициент проводника в свободном пространстве будет равен

$$a_0 = \frac{18 \cdot 10^9}{(lb)^2} \left[ b(l^2 - s^2) \operatorname{Arsh} \frac{b}{A} + l(b^2 - s^2) \operatorname{Arsh} \frac{l}{D} + s^2 \left( b \operatorname{Arsh} \frac{b}{s} + l \operatorname{Arsh} \frac{l}{s} + E - A - D \right) + \frac{2s^3 + D^3 + A^3 - E^3}{3} - 2s \operatorname{arctg} \frac{lb}{sE} \right],$$

$$\text{где } A = \sqrt{l^2 + s^2}; \quad D = \sqrt{b^2 + s^2}; \quad E = \sqrt{l^2 + b^2 + s^2};$$

$s = t \cdot \exp(-3/2)$  — среднее геометрическое расстояние отрезка прямой, который имеет длину  $t$ , от самого себя.

Для тонких проводников ( $s \ll \tau_v$ ) поправка  $\Delta a$ , позволяющая учесть влияние слоистой среды, от толщины проводника не зависит. По формуле (4),

$$\Delta a = \frac{18 \cdot 10^9}{(tbl)^2} \sum_{v=0}^Y T_v \left[ b(l^2 - \tau_v^2) \operatorname{Arsh} \frac{b}{A} + l(b^2 - \tau_v^2) \operatorname{Arsh} \frac{l}{D} + \tau_v^2 \left( b \operatorname{Arsh} \frac{b}{\tau_v} + l \operatorname{Arsh} \frac{l}{\tau_v} + E - A - D \right) + \frac{2\tau_v^3 + D^3 + A^3 - E^3}{3} - 2bl \tau_v \operatorname{arctg} \frac{bl}{E \tau_v} \right], \quad (10)$$

где  $T_v$  — коэффициенты, которые получены аппроксимацией функции  $\Phi_i(\lambda, z - z_0) = \exp(-\lambda |z - z_0|)$  в плоскости  $z = z_0$  (поправка на слоистость среды) как для бесконечно тонкого проводника;

$$E = \sqrt{l^2 + b^2 + \tau_v^2}; \quad A = \sqrt{l^2 + \tau_v^2}; \quad D = \sqrt{b^2 + \tau_v^2};$$

$$\tau_v = v\tau.$$

Поля, создаваемые соседними проводниками, могут весьма существенно изменить распределение заряда по ширине проводника, увеличивая таким образом его емкость, что ведет к увеличению времени задержки сигналов в проводнике<sup>2</sup>. Тогда для бесконечно тонких проводников с учетом распределения заряда потенциальный коэффициент можно оценить по формуле  $a \approx a_N + \Delta a$ . При этом величина  $a_N$  определяется по формуле [17]

$$a_N = A a_{\text{Хой}} + 3 \cdot 10^9 B k^2 \{ (2k^{-1} - k) \operatorname{Arsh} k^{-1} + 2k^{-2} \operatorname{Arsh} k + [(8k^2 - 19 - 12k^{-2})(1 + k^{-2})^{1/2} - 8k^2 + 12k^{-3}] / 15 + 2 \} / l,$$

где  $A, B$  — коэффициенты аппроксимации, определяемые по формулам (8);

$k$  — коэффициент формы проводника,  $k = l/b$ ;

$a_{\text{Хой}}$  — потенциальный коэффициент, определяемый методом Хой —

$$a_{\text{Хой}} = 18 \cdot 10^9 \{ k \operatorname{Arsh} k^{-1} + \operatorname{Arsh} k + [k^{-1} + k^2 - k^{-1}(1 + k^2)^{3/2}] / 3 \} / l.$$

Поправку  $\Delta a$  можно рассчитать по формуле (10).

Используя такой прием, мы допускаем, что среда одинаково влияет на емкость проводника при любом распределении заряда, задаваемом формулой (5) при  $n=2$ .

В случае предельной формально возможной неравномерности распределения заряда по ширине (заряд сосредоточен вдоль кромок проводника)

$$\eta(z) = 1/t; \quad \eta(y) = \delta(y) + \delta(y - b); \quad \eta(x) = 1/l. \quad (11)$$

Тогда, шестикратно интегрируя функцию Грина по формулам (3), (4) и используя метод средних геометрических расстояний для интегрирования по толщине, получим:

$$a = a_0 + \Delta a, \quad (12)$$

$$\text{где } a_0 = \frac{9 \cdot 10^9}{bl^2} \left[ 2bl \operatorname{Arsh} \frac{l}{\sqrt{b^2 + s^2}} + (l^2 - s^2) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{Arsh} \frac{b}{\sqrt{l^2 + s^2}} + s^2 \operatorname{Arsh} \frac{b}{s} - b(\sqrt{l^2 + b^2 + s^2} - \sqrt{b^2 + s^2}) - 2sl \operatorname{arctg} \frac{bl}{s\sqrt{l^2 + b^2 + s^2}} \right];$$

$$\Delta a_0 = \frac{9 \cdot 10^9}{bl^2} \sum_{v=0}^Y T_v \left[ 2bl \operatorname{Arsh} \frac{l}{\sqrt{b^2 + \tau_v^2}} + (l^2 - \tau_v^2) \times \right. \\ \left. \times \operatorname{Arsh} \frac{b}{\sqrt{l^2 + \tau_v^2}} + \tau_v^2 \operatorname{Arsh} \frac{b}{\tau_v} - b(\sqrt{l^2 + b^2 + \tau_v^2} - \sqrt{b^2 + \tau_v^2}) - 2\tau_v l \operatorname{arctg} \frac{bl}{\tau_v \sqrt{l^2 + b^2 + \tau_v^2}} \right];$$

для свободного пространства  $T_v = 0$  ( $v \geq 0$ ).

В случае бесконечно тонкого проводника при постоянном распределении заряда по его площади

$$\eta(y) = 1/b; \quad \eta(x) = 1/l. \quad (13)$$

Тогда, четырежды интегрируя функцию Грина по координатам  $x, x_0, y$  и  $y_0$ , при плотности заряда (13) по формулам (3), (4) получим:

<sup>2</sup> Это справедливо, например, для линий связи, расположенных во внутренних слоях металлизации в микропроцессорах, где задержка сигнала носит емкостный характер [21].

$$a=18 \cdot 10^9 \{k \operatorname{Arsh} k^{-1} + \operatorname{Arsh} k + [k^{-1} + k^2 - k^{-1}(1+k^2)^{3/2}]/3\} / l + \frac{18 \cdot 10^9}{(lb)^2} \sum_{v=0}^{\infty} T_v \{ b[l^2 - (v\tau)^2] \operatorname{Arsh} \frac{b}{A} + l[b^2 - (v\tau)^2] \times \times \operatorname{Arsh} \frac{l}{D} + (v\tau)^2 (b \operatorname{Arsh} \frac{b}{v\tau} + l \operatorname{Arsh} \frac{l}{v\tau} + E - A - D) + \frac{2(v\tau)^3 + D^3 + A^3 - E^3}{3} - 2v\tau \operatorname{arctg} \frac{lb}{v\tau E} \},$$

где  $A = \sqrt{l^2 + (v\tau)^2}$ ;  $D = \sqrt{b^2 + (v\tau)^2}$ ;

$E = \sqrt{l^2 + b^2 + (v\tau)^2}$ ; (14)

В случае предельной формально возможной неравномерности распределения заряда по ширине  $\eta(y) = \delta(y) + \delta(y-b)$  и  $\eta(x) = 1/l$ .

Интегрируя функцию Грина, получим, что потенциальный коэффициент бесконечно тонкого проводника в слоистой среде

$$a_{28} = 18 \cdot 10^9 [\operatorname{Arsh} k + (k \operatorname{Arsh} k^{-1} + k^{-1} - \sqrt{1+k^{-2}})/2] / l + \frac{9 \cdot 10^9}{l^2 b} \sum_{v=0}^{\infty} T_v \{ [l^2 - (v\tau)^2] \times \times \operatorname{Arsh} b / A + 2l b \operatorname{Arsh} l / D - 2v\tau l \operatorname{arctg} [lb / (v\tau E)] + (v\tau)^2 \operatorname{Arsh} b / (v\tau) - b(E - D) \},$$
 (15)

где  $A, D, E$  рассчитываются по формулам (14).

Емкость проводника связана с его потенциальным коэффициентом известным соотношением [4, 9]. Как показывает исследование с помощью производных и вычислительный эксперимент, в том числе проведенный в [17], при  $k \geq 1$  с увеличением неравномерности плотности распределения заряда по ширине  $N$  емкость монотонно увеличивается и достигает наибольшего значения при  $N = \infty$ . Поэтому при расчете емкости проводника метод Хоу может быть использован для оценки точной нижней границы емкости  $\inf C$ . Для оценки точной верхней границы емкости  $\sup C$  при неизвестном распределении заряда используются формулы (3), (4) для распределения заряда (11).

**Вычислительный эксперимент**

Для удобства оценки и обобщения полученных результатов был проведен вычислительный эксперимент, результаты которого частично представлены в **таблице** и на графике (**рис. 2**). Для снижения влияния погрешности округления все вычисления прово-

*Относительная погрешность метода средних геометрических расстояний, %*

b/t	l/b			
	1	10	100	1000
1	-7,15940	-4,07044	-2,37576	-1,63597
3	-3,77252	-1,69474	-9,84939 · 10 <sup>-1</sup>	-6,84585 · 10 <sup>-1</sup>
10	-1,37278	-5,48602 · 10 <sup>-1</sup>	-3,17077 · 10 <sup>-1</sup>	-2,21033 · 10 <sup>-1</sup>
100	-1,52316 · 10 <sup>-1</sup>	-5,66105 · 10 <sup>-2</sup>	-3,25460 · 10 <sup>-2</sup>	-2,27061 · 10 <sup>-2</sup>
1000	-1,54845 · 10 <sup>-2</sup>	-5,68230 · 10 <sup>-3</sup>	-3,26316 · 10 <sup>-3</sup>	-2,27672 · 10 <sup>-3</sup>
10000	-1,55425 · 10 <sup>-3</sup>	-5,69291 · 10 <sup>-4</sup>	-3,26987 · 10 <sup>-4</sup>	-2,28881 · 10 <sup>-4</sup>

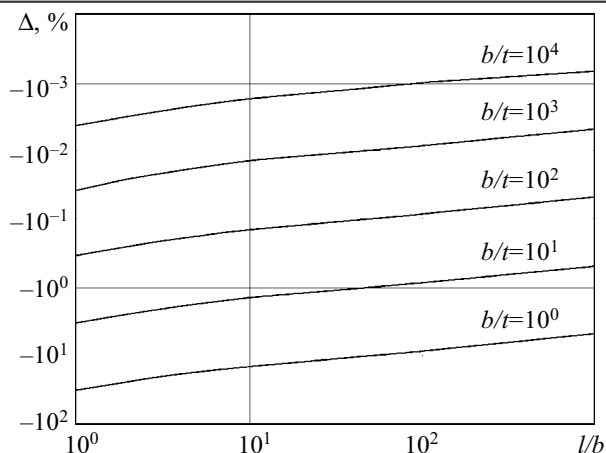


Рис. 2. Зависимость погрешности расчета емкости проводника прямоугольного сечения в свободном пространстве в приближении бесконечно малой толщины от коэффициента формы при фиксированном отношении ширины проводника к его толщине

дилься с учетом 32 десятичных знаков мантиссы каждого операнда.

Относительное расхождение результатов расчета емкости  $C$  в свободном пространстве с помощью метода средних геометрических расстояний в сравнении с «точным» значением  $C_T$  характеризовалось величиной  $\Delta = 100(C/C_T - 1)$ , %. Для получения величины  $C_T$  по формулам (3), (11) при численном интегрировании по ширине использовалась квадратурная формула Гаусса для трех узлов (степень точности  $n=5$ ). Для снижения влияния методической погрешности интервал интегрирования был разбит на  $10^4$  шагов. При таком способе вычислений результат содержит по меньшей мере 6 верных десятичных знаков. Погрешность вычислений контролировалась методом Рунге. Результаты расчета величины  $\Delta$ , % сведены в таблицу. Погрешность расчета емкости с помощью метода средних геометрических расстояний для слоистой среды не превосходит погрешности для свободного пространства.

Из таблицы видно, что метод средних геометрических расстояний несколько занижает емкость ( $\Delta < 0$ ), а абсолютная величина погрешности метода максимальна для проводников квадратного сечения ( $b/t=1$ ) и не превосходит уровня 7,16% даже для случая куба ( $l=b=t$ ), который в микросхемах практически не встречается. Данные таблицы конкретизируют сделанное выше предположение о допустимости использования метода средних геометрических расстояний для интегрирования по толщине проводника. При  $b > 3t$  для проводников, у которых длина на два десятичных порядка превосходит толщину, указанный метод дает практически точные результаты.

На рис. 2 представлена зависимость погрешности расчета емкости проводника в приближении бесконечно малой толщины с помощью формулы (15) от коэффициента формы проводника в свободном пространстве. Из рисунка видно, что указанное приближение может давать неприемлемо высокую погрешность расчета емкости для проводников микросхем высокой степени интеграции, где толщины провод-

ников близки по величине к их ширине. В случае куба  $\Delta = -29,66\%$ .

Метод оценки точной верхней границы емкости использует распределение заряда по ширине, которое соответствует предельной функции распределения заряда (функции Дирака) с неравномерностью  $N = \infty$ , что возможно лишь формально. Формула (12), полученная с использованием метода средних геометрических расстояний, приблизительно соответствует экспоненциальной функции распределения заряда по ширине с неравномерностью  $N > 1700$ . Встречаемая на практике неравномерность распределения заряда по ширине, как правило, существенно ниже [18, 19]. Погрешность формулы (12) вследствие завышения неравномерности  $N$  частично компенсируется погрешностью метода средних геометрических расстояний.

### Выводы

Анализ и обобщение полученных теоретических результатов и результатов вычислительного эксперимента позволяют сделать следующие выводы.

1. При расчете емкости проводника метод Хоу может быть использован для оценки точной нижней границы емкости *inf*  $C$ . Для оценки точной верхней границы емкости *sup*  $C$  при неизвестном распределении заряда могут быть использованы формулы (3), (4) для распределения заряда (11).

2. Метод средних геометрических расстояний, с помощью которого получена формула (12), несколько занижает значение емкости, однако для больших значений  $b/t$  ( $> 10$ ) точность метода средних геометрических расстояний достаточна для большинства случаев инженерной практики.

3. Формула (12) сужает границы двухсторонней оценки емкости и вполне приемлема для использования в технических приложениях в качестве надежной инженерной оценки верхней границы емкости проводника прямоугольного сечения в слоистой среде и свободном пространстве.

4. Расчет емкости проводника прямоугольного сечения в приближении бесконечно малой толщины дает погрешность менее 1% для длинных проводников ( $k > 10$ ) лишь при  $b/t > 10$ , а для контактных площадок (т. е. при  $k \approx 1$ ) — лишь при  $b/t > 50$ .

Результаты данной работы могут быть рекомендованы для модификации метода моментов, для использования при разработке математического и программного обеспечения систем автоматизированного проектирования, а также для использования на стадии предпроектных исследований при численно-эвристической оптимизации схемотехнических и конструктивных решений.

### ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Газизов Т. Р. Вычисление емкостной матрицы двумерной конфигурации проводников и диэлектриков с ортогональными границами // Известия вузов. Физика.— 2004.— № 3.— С. 88—90.
2. Садовский Н. В. Разработка, исследование и практическое применение математических моделей полосковых линий на основе расчета электромагнитного поля методом статистических испытаний / Автореф. дис. ... канд. техн. наук.— М.: МЭИ, 1984.
3. Картажов В. Б. Расчет многопроводных микрополосковых линий с многослойным диэлектриком методом Трефтца // Радиотехника и электроника.— 1973.— № 8.— С. 1573—1578.
4. Иоссель Ю. Я., Кочанов Э. С., Струнский М. Г. Расчет электрической емкости.— Л.: Энергоиздат, 1981.
5. Князев А. Д., Кечиев Л. Н., Петров Б. В. Конструирование радиоэлектронной и электронно-вычислительной аппаратуры с учетом электромагнитной совместимости.— М.: Радио и связь, 1989.
6. Семенцов В. И. Расчет емкостей плоских проводников в слоистых средах // Радиотехника.— 1973.— Т. 28, № 10.— С. 84—90.
7. Семенцов В. И., Головченко В. Б. Расчет частичных емкостей в многослойных тонкопленочных и печатных платах // Радиотехника и электроника.— 1972.— Т. XVII, № 1.— С. 138—144.
8. Maxwell J. C. A treatise on electricity and magnetism. Vol. 2.— Cambridge, 1904. (Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. 2.— М.: Наука, 1989.)
9. Конников И. А. Расчет емкостей прямоугольных пленочных проводников с произвольным коэффициентом формы // Судостроение.— 1980.— № 8.— С. 32—33.
10. Ollendorf F. Erdstrum.— Berlin: Springer, 1928.
11. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика.— М.: Физматгиз, 1963.
12. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1977.
13. Корн А. Г., Корн Т. М. Справочник по математике для научных работников и инженеров.— СПб: Лань, 2003.
14. Harrington R., Crosswell W. C. Origine and development of the method of moments for field computation // IEEE Antennas and Propagation Magazine.— 1990.— Vol. 32, N 3.— P. 31—36.
15. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— СПб: Невский диалект, 2004.
16. Фихманас Р. Ф., Фридберг П. Ш. Метод Хоу расчета емкостей тел и его связь с вариационными принципами // Журнал технической физики.— 1970.— № 6.— С. 1327—1328.
17. Конников И. А. Экономичный метод расчета емкости прямоугольного пленочного проводника с учетом неравномерности распределения заряда // Петербургский журнал электроники.— 2005.— № 3.— С. 102—107.
18. Зарубанов В. В., Ильинский А. С. Распределение токов и потеря в микрополосковой линии с конечной толщиной полоски // Радиотехника и электроника.— 1990.— Т. 35, № 3.— С. 465—478.
19. Тихомиров А. В., Маненков А. Б. Скин-эффект в проводе квадратного сечения // Там же.— 1989.— Т. 34, № 6.— С. 1166—1171.
20. Русин Ю. С. Метод приближенного расчета электрической емкости // Электричество.— 1960.— № 11.— С. 48—50.
21. Кристовский В. Г., Терентьев Ю. И. Анализ влияния линий связи на характеристики микропроцессоров // Микроэлектроника.— 2005.— № 1.— С. 72—76.