

УДК 532.135

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

А. М. ГОМИЛКО \*  
Ю. В. ШЛАПАК \*\*

\* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев  
\*\* Физико-технический научный центр НАН Украины, Киев

Получено 22.04.98

Рассмотрена задача о нахождении стационарного течения нелинейно-вязкой несжимаемой жидкости в плоской области, когда на границе задан вектор скорости. Для численного решения такой задачи используется метод расширенного Лагранжиана и аппроксимация конечными элементами. Проведено численное моделирование течений вязкой и нелинейно-вязкой жидкостей в квадратной полости при движении верхней стенки. Результаты вычислений на мелкой сетке позволяют наблюдать вихревые движения и изучить их структуру. Проведены сравнения с соответствующими результатами, относящимися к ньютоновским течениям.

Розглянуто задачу про знаходження стаціонарної течії нелінійно-в'язкої рідини у плоскій області, коли на межі задано вектор швидкості. Для чисельного розв'язання такої задачі використовується метод розширеного Лагранжіана та апроксимація скінченними елементами. Проведено чисельне моделювання течій в'язкої та нелінійно-в'язкої рідини у квадратній порожнині при русі верхньої стінки. Результати обчислень на дрібній сітці дозволяють спостерігати вихори та досліджувати їх структуру. Проведено порівняння з відповідними результатами, що стосуються ньютоновських течій.

The problem of finding the stationary flow of nonlinearly-viscous incompressible fluid is investigated for the plain domain with the velocity prescribed on the whole boundary. The method of augmented Lagrangian and approximation by the finite elements are used to obtain the numerical solution. Numerical simulation of the flows of viscous and nonlinearly-viscous fluids is conducted in the square cavity with the moving upper wall. Results of calculations on the fine mesh make possible to study the eddies. The comparison with results for newtonic fluids is drawn.

## ВВЕДЕНИЕ

В основе классической гидромеханики лежит обобщенный закон Ньютона, согласно которому при движении вязкой жидкости имеет место линейная связь между тензором напряжений и тензором скорости деформаций [1]. Однако многие жидкости, в частности, растворы и расплавы полимеров, суспензии, некоторые фармацевтические и пищевые продукты, не удовлетворяют этому закону [2]. Такие жидкости называются нелинейно-вязкими. Одной из наиболее распространенных моделей для их описания является модель, в которой вязкость зависит лишь от второго инварианта тензора скорости деформаций. Широкое применение нелинейно-вязких жидкостей в промышленности и медицине позволяет считать актуальной задачу о численном моделировании их течений в областях различной формы [2–4]. В данной статье с целью наблюдения вихревых движений проведено численное моделирование течений вязкой и нелинейно-вязкой жидкости в квадратной полости.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $R^2$ , имеющая непрерывную по Липшицу границу  $S$ . Область  $\Omega$  заполнена нелинейно-вязкой жидкостью с уравнением состояния:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\varphi(I(\vec{v}))\varepsilon_{ij}(\vec{v}), \quad i, j = 1, 2; \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}(p, \vec{v})$  – компоненты тензора напряжений, зависящего от давления  $p$  и скорости  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ ;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\varphi$  – функция вязкости, зависящая от второго инварианта  $I(\vec{v})$  тензора скорости деформаций  $\varepsilon(\vec{v}) = \{\varepsilon_{ij}(\vec{v})\}$ :

$$I(\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^2 (\varepsilon_{ij}(\vec{v}))^2, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Предполагается выполнение условия несжимаемости жидкости внутри области  $\Omega$ :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2)$$

и краевого условия

$$\vec{v}|_S = \vec{v}_{\text{гр}}. \quad (3)$$

Относительно функции  $\vec{v}_{\text{гр}}$  потребуем [2], чтобы ее можно было продолжить внутрь  $\Omega$  как соленоидальную функцию, принадлежащую пространству  $W_2^1(\Omega)^2$ . Течение жидкости рассматривается в приближении Стокса, т.е. когда инерционные члены в уравнении движения отсутствуют:

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ij}(p, \vec{v})}{\partial x_j} = 0. \quad (4)$$

Требуется найти функцию  $\vec{v}$ , являющуюся решением краевой задачи (1) – (4).

Для существования решения сформулированной задачи достаточно, чтобы функция вязкости  $\varphi$  удовлетворяла условиям [3]:  $\varphi(z)$  – непрерывна при  $z \geq 0$  и существуют такие положительные константы  $a_1, a_2, a_3$ , что неравенство

$$a_1 \leq \varphi(z) \leq a_2 \quad (5)$$

выполняется для любого  $z \geq 0$ , а для любых  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$  имеет место неравенство:

$$[\varphi(y_1^2)y_1 - \varphi(y_2^2)y_2](y_1 - y_2) \geq a_3(y_1 - y_2)^2. \quad (6)$$

Эти ограничения являются естественными в рамках предложенной модели. Условие (5) предполагает, что вязкость жидкости принимает значения в ограниченном интервале, отделенном от нуля, а условие (6) означает, что при простом сдвиговом течении касательное напряжение увеличивается при увеличении скорости сдвига.

## 2. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА

Изложим метод численного решения задачи (1) – (4), основанный на использовании алгоритма расширенного Лагранжиана [3], [5].

Введем в рассмотрение гильбертовы пространства  $X$  и  $X_1$ :

$$X = \{ \vec{v} \in W_2^1(\Omega)^2, \vec{v}|_S = \vec{v}_0 \}, \quad (7)$$

$$X_1 = \{ \vec{v} \in W_2^1(\Omega)^2, \vec{v}|_S = 0 \}. \quad (8)$$

Определим операторы  $L$  и  $B$  следующим образом:

$$(L(\vec{v}), \vec{h}) = 2 \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \varphi(I(\vec{v})) \varepsilon_{ij}(\vec{v}) \varepsilon_{ij}(\vec{h}) dx, \quad (9)$$

$$B\vec{v} = \text{div } \vec{v}. \quad (10)$$

Далее скобки  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначают скалярное произведение в  $L_2(\Omega)$ , т.е.

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} fg dx. \quad (11)$$

Для нахождения скорости  $\vec{v}$  используется предложенный в [3] итерационный процесс, основанный на методе расширенного Лагранжиана [5]. Этот процесс определяется следующим образом: по выбранным начальным значениям  $\{p_0, \vec{v}_0\} \in (L_2(\Omega) \times X)$  требуется найти последовательность  $\{p_n, \vec{v}_n\} \in (L_2(\Omega) \times X)$ , для любых  $\vec{h} \in X_1$  и  $\mu \in L_2(\Omega)$  удовлетворяющую уравнениям

$$(L(\vec{v}_{n+1}), \vec{h}) - \langle p_n, B\vec{h} \rangle + r \langle B\vec{v}_{n+1}, B\vec{h} \rangle = 0, \quad (12)$$

$$\langle p_{n+1} - p_n, \mu \rangle + \varrho \langle B\vec{v}_{n+1}, \mu \rangle = 0, \quad (13)$$

где  $\varrho, r$  – некоторые положительные константы. Для сведения нелинейной задачи (12) – (13) к последовательности линейных задач используется следующий прием: в ходе итерационного процесса вместо (12) решается линейная задача нахождения  $\vec{v}_{n+1} \in X$ , удовлетворяющей уравнению

$$(A\vec{v}_{n+1}, \vec{h}) = (A\vec{v}_n, \vec{h}) - t[(L(\vec{v}_n), \vec{h}) - \langle p_n, B\vec{h} \rangle + r \langle B\vec{v}_n, B\vec{h} \rangle] \quad (14)$$

для любого  $\vec{h} \in X_1$ , где  $t$  – некоторая положительная константа, а оператор  $A$  задается выражением:

$$(A\vec{v}, \vec{h}) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} dx. \quad (15)$$

Вектор  $\vec{h}$  берем в виде  $\vec{h} = (h_1, 0)$  и  $\vec{h} = (0, h_2)$ , что приводит к расщеплению симметричной матрицы в системе линейных уравнений на две одинаковые матрицы вдвое меньшего размера. При построении аппроксимации на конечных элементах полученная матрица имеет ленточную структуру. Кроме того, матрица в системе линейных уравнений одна и та же на всех шагах итерационного процесса, что требует ее обращения только один раз, перед началом итераций.

Как отмечалось в [3], изложенный выше метод линеаризации задачи (12) – (13) имеет ряд преимуществ перед широко известным методом Биргера–Качанова, где матрица в системе линейных уравнений не является ленточной, не допускает расщепления и изменяется в ходе итерационного процесса, что требует дополнительных затрат времени на ее многократное обращение.

Теоретическое обоснование сходимости процесса (13) – (14) можно найти в [3]. Там же содержатся оценки допустимых значений параметров  $r, \sigma, t$  и требования к выбору пространств аппроксимаций  $\vec{v}$  и  $p$ .

Характерной чертой такого подхода является то, что приближенные решения для скоростей

строятся в пространстве  $W_2^1(\Omega)^2$  (без требования соленоидальности), а это позволяет обойтись без использования функции тока.

Рассмотрим построение пространств приближений для  $\vec{v}$  и  $p$ . При  $k = 1, 2, \dots$  обозначим пространства приближенных решений для  $\vec{v}$  как  $V_k$  ( $V_k \subset V_{k+1}$ ), а пространства приближенных решений для  $p$  как  $P_k$  ( $P_k \subset P_{k+1}$ ). Отметим, что для сходимости процесса (13) – (14) на пространствах приближений необходимо выполнение условия inf-sup [3]: существует такое положительное число  $\beta$ , что для любого  $k \geq 1$  выполняется неравенство:

$$\inf_{\mu \in P_k} \sup_{\vec{v} \in V_k} \frac{\langle B\vec{v}, \mu \rangle}{\|\vec{v}\|_{V_k} \|\mu\|_{P_k}} \geq \beta. \quad (16)$$

Пусть  $T_h$  – триангуляция  $\Omega$ , а  $T_{h/2}$  – более тонкая триангуляция, которая получена разбиением каждого треугольника из  $T_h$  на четыре меньших треугольника путем соединения середин сторон. Пространства приближенных решений для  $\vec{v}$  и  $p$  строятся следующим образом:  $P_k$  является пространством кусочно-постоянных функций на треугольниках из  $T_h$ , а  $V_k$  – пространством кусочно-линейных функций на треугольниках из  $T_{h/2}$ . При измельчении сетки триангуляции такие пространства приближений будут все более точно аппроксимировать функцию скорости  $\vec{v}$  и функцию  $p$ . Ранее было доказано [6], что условие (16) выполняется в этих пространствах  $P_k, V_k$ .

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведенный выше алгоритм был использован для численного решения задач о нахождении течений вязкой и нелинейно-вязкой жидкостей в квадратной полости с равномерно движущейся верхней стенкой.

В качестве нелинейно-вязкой жидкости мы брали расплав полипропилена, функцию вязкости которого  $\varphi(I)$  можно определить так [2]:

$$\varphi(I) = 233.7 - 0.302\sqrt{I/2} + 0.709 \cdot 10^{-4}I$$

когда  $0 \leq I \leq 500000$ ,

$$\varphi(I) = \frac{45125}{\sqrt{I/2}} + 27.9$$

когда  $500000 \leq I \leq \infty$ . Единицей измерения вязкости здесь является  $\text{H} \cdot \text{с} / \text{м}^2$ .

В качестве первого приближения в итерационном процессе для  $p$  и  $\vec{v}$  брались нулевые значения. Что касается скорости сходимости, то для ее оценки использовалась величина  $\delta(m, n)$ , определяемая

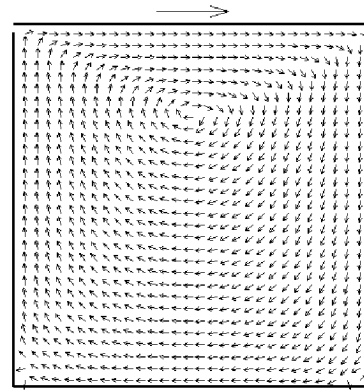


Рис. 1. Течение вязкой жидкости при равномерном движении верхней стенки

так:

$$\delta(m, n) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\vec{v}^m(x_i, y_i) - \vec{v}^n(x_i, y_i))^2}{\sum_{i=1}^N (\vec{v}^m(x_i, y_i))^2}},$$

где  $N$  – число узлов триангуляции,  $\vec{v}^m$  и  $\vec{v}^n$  – значения вектора скорости, полученные на  $m$  и  $n$  итерациях,  $(x_i, y_i)$  – координаты узла триангуляции с номером  $i$ . Во всех рассмотренных в статье случаях величина  $\delta(1800, 300)$  имела порядок, не больший  $10^{-4}$ , т.е. 300 итераций дают хорошее приближение точного решения.

Далее все величины, имеющие размерность длины, приводятся в метрах, а величины, имеющие размерность скорости – в м/с. Рассматриваемая область является квадратом со сторонами  $y = 0, y = 0.02, x = 0, x = 0.02$ . Краевые условия:  $v_y = 0$  на всех сторонах квадрата,  $v_x = 0$  на сторонах  $x = 0, y = 0, x = 0.02, v_x = v_{ст}$  на стороне  $y = 0.02$ . Заданное на границе поле скоростей может быть продолжено внутрь квадрата до соленоидальной функции из пространства  $W_2^1(\Omega)^2$  (см. [7]). Численное моделирование течений при этих краевых условиях позволило наблюдать и анализировать вихревые движения в жидкости. Сначала рассматривался случай движения жидкости с постоянной вязкостью. Как известно [8], при заданных выше краевых условиях ее течения состоят из большого (центрального) вихря и последовательности малых вихрей в нижних углах. С помощью разработанного численного алгоритма удалось наблюдать оба вида вихревых движений.

Для моделирования большого вихря была построена триангуляция области, содержащая 3542

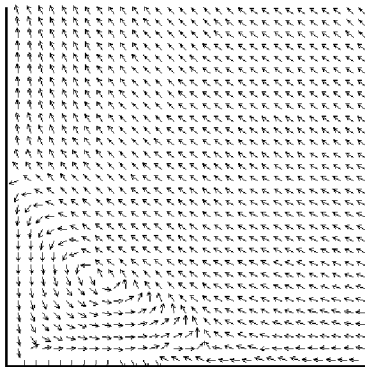


Рис. 2. Движение вязкой жидкости вблизи нижнего угла

узла, объединенных в 7200 малых треугольников (треугольников скорости). Полученная картина течения вязкой жидкости изображена на рис. 1. Центр большого вихря имеет расчетные координаты (0.0102, 0.0152). Этот результат хорошо согласуется с данными, приведенными в работах [8 – 10] (с учетом поправки на размер области).

Для наблюдения и изучения угловых вихрей построенная триангуляция всей области является слишком грубой. Поэтому использовался следующий прием: численно решалась новая задача о нахождении вектора скорости вязкой жидкости, где в качестве области бралась окрестность левого нижнего угла (квадрат со сторонами  $x = 0, x = 0.0024, y = 0, y = 0.0024$ ), а краевые условия (скорость на границе) определялись из найденного ранее вектора скорости в большой области. Такая идея ранее использовалась, например, в [8] при преодолении аналогичных трудностей. Триангуляция новой угловой области содержит 3600 узлов, объединенных в 7200 малых треугольников. В результате вычислений была получена картина течения, приведенная на рис. 2.

Расчетный центр углового вихря имеет координаты (0.00061, 0.00060). Эти числа практически не отличаются от результата, полученного в [8].

После тестирования алгоритма на течениях обычной вязкой жидкости было проведено моделирование течений нелинейно-вязкой жидкости (расплава полипропилена). Течение моделировалось при разных скоростях верхней стенки. Один из эффектов, демонстрирующих отличие поведения нелинейно-вязкой жидкости от поведения обычной вязкой заключается в том, что при изменении скорости движения верхней стенки центр большо-

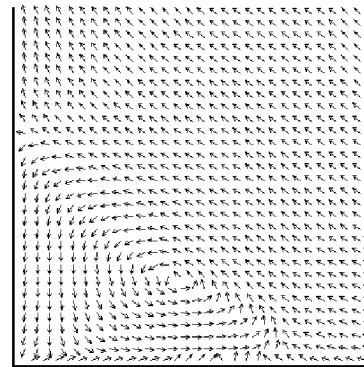


Рис. 3. Картина течения расплава полипропилена вблизи угла при  $v_{ст} = 1$  м/с

го вихря смещается в вертикальном направлении. Данные о зависимости вертикальной координаты центра большого вихря от скорости верхней стенки приведены ниже.

Табл. 1. Положение центра главного вихря при тчении расплава полипропилена

СКОРОСТЬ СТЕНКИ	КООРДИНАТА ЦЕНТРА
$v=1$	$y=0.0151$
$v=10$	$y=0.0160$
$v=20$	$y=0.0161$
$v=40$	$y=0.0163$
$v=60$	$y=0.0158$
$v=90$	$y=0.0154$
$v=120$	$y=0.0154$

Видно, что при малых скоростях координаты центра вихря почти совпадают с данными по вязкой жидкости, затем при увеличении скорости стенки до  $v_{ст} = 40$  центр вихря поднимается до  $y = 0.0163$ , а при дальнейшем увеличении скорости центр вихря опускается до  $y = 0.0154$ . Такое явление объясняется, видимо, тем, что во-первых, эффекты нелинейности начинают проявляться не сразу, а лишь при достаточном увеличении градиента скорости, и во-вторых, при увеличении градиента свыше определенной величины функция вязкости становится почти постоянной, и эффекты нелинейности уменьшаются.

Также проводилось изучение вихревых движений вблизи нижнего левого угла. Полученные картины течений при различных скоростях верхней стенки представлены на рис. 3, 4.

Отчетливо видно, как при увеличении скорости верхней стенки угловой вихрь изменяет свою фор-

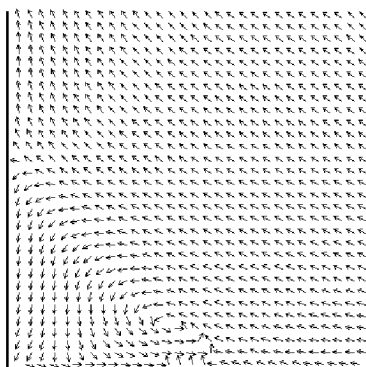


Рис. 4. Картина течения расплава полипропилена  
вблизи угла при  $v_{ст} = 40$  м/с

му, а его центр смещается вправо-вниз.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использованный подход на основе алгоритма расширенного Лагранжиана и метода конечных элементов показал высокую точность работы. Его применение для нахождения течений в полости квадратной формы позволило наблюдать вихревые движения в нелинейно-вязкой жидкости. Проанализирована зависимость положения и формы вихрей от скорости верхней стенки. Предложен-

ный алгоритм применим для решения задач в области практически любой формы, что делает его удобным инструментом для решения многих прикладных задач.

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М: Наука, 1970. – 848 с.
2. Литвинов В. Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. – М: Наука, 1982. – 376 с.
3. Belonosov, M. S., Litvinov, W. G. Finite Element Methods for Nonlinearly Viscous Fluids // ZAMM. – 76, N 6. – 1996. – P. 307–320.
4. Panteleyev A. D., Gogaev K. A. Mathematical simulation and identification of the material forming process under extrusion // ДАН України. – 1997. – N 8. – P. 70–77.
5. Темам Р. Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. – М: Мир, 1981. – 408 с.
6. Gunzburger, M. Mathematical aspects of finite element methods for incompressible viscous fluids // Finite element theory and application, Proc. ICASE Finite element Theory and Application. – Workshop Held in Hampton, Virginia, July 28–30, 1986. – Springer-Verlag 1988. – P. 124–150.
7. Ладженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М: Наука, 1970. – 288 с.
8. Pan F., Acrivos A. Steady flows in rectangular cavities // J. Fluid Mech. – 1967. – 28, N 4. – P. 643–655.
9. Shankar, P. N. The eddy structure in Stokes flow for a cavity // J. Fluid Mech. – 1993. – 250. – P. 371–383.
10. Грінченко В. Т., Исаєва Т. Л., Мелешко В. В. Двовимірне течія в'язкої рідини у прямокутній порожнині при малому числі Рейнольдса // ДАН УРСР. – 1991. – N 6. – С. 64–70.