

УДК 533.6.013.42

НЕЛИНЕЙНО - ДИСПЕРСИОННАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСФОРМАЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ПРИБРЕЖНОЙ ЗОНЕ МОРЯ, ПОКРЫТОЙ ЛЬДОМ

В. А. ТКАЧЕНКО, В. В. ЯКОВЛЕВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 11.08.98

Построена длинноволновая нелинейно-дисперсионная модель, описывающая распространение изгибно-гравитационных волн в упругой пластине, плавающей на поверхности жидкости переменной глубины. Модель учитывает эффекты нелинейной дисперсии жидкости, а также инерцию, упругость и геометрически нелинейный прогиб пластины. Исходя из полученных уравнений, построена иерархическая последовательность более простых моделей, обобщающих известные из теории поверхностных волн уравнения Перегринна, Буссинеска и Кортевега-де Вриза на случай изгибно-гравитационных волн. В частном случае обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза построены и проанализированы точные решения, описывающие распространение солитонов и кноидальных волн в море, покрытом сплошным или битым льдом. Показано, что изгибно-гравитационные волны обладают некоторыми зеркальными свойствами по сравнению с длинными нелинейными волнами на воде. Относительно солитона это означает, что без изменения формы распространяется впадина, а не горб, как в случае чистой воды, и скорость ее распространения с ростом амплитуды уменьшается, а не увеличивается. Кроме того, характеристики изгибно-гравитационных волн определяются амплитудой и дисперсией изгибной жесткости пластины и не зависят от дисперсии воды и инерционных свойств ледяного покрова.

Побудовано довгохвильову нелінійно-дисперсійну модель, яка описує поширення згинно-гравітаційних хвиль в пружній пластині, що плаває на поверхні рідини змінної глибини. Модель враховує ефекти нелінійної дисперсії рідини, а також інерцію, пружність та геометрично нелінійний прогин пластины. Виходячи з одержаних рівнянь, побудовано ієрархічну послідовність більш простих моделей, що узагальнюють відомі з теорії поверхневих хвиль рівняння Перегринна, Буссінеска та Кортевега-де Вриза на випадок згинно-гравітаційних хвиль. В окремому випадку узагальнюючого рівняння Кортевега-де Вриза побудовані та проаналізовані точні розв'язки, що описують поширення солітонів та кноїдальних хвиль в морі, яке покрито суцільним чи битим льдом. Показано, що згинно-гравітаційні хвилі мають деякі зеркальні властивості порівняно з довгими нелінійними хвилями на воді. Відносно солітона це означає, що без зміни форми розповсюджується западина, а не горб, як у випадку чистої води, і швидкість її розповсюдження зі зростанням амплітуди зменшується, а не збільшується. Крім того, характеристики згинно-гравітаційних хвиль визначаються амплітудою та дисперсією згинної жорсткості пластины і не залежить від дисперсії води та інерційних властивостей крижаного покриву.

The long-wave nonlinear-dispersion model, describing propagation of bending-gravitational waves in a elastic plate, floating on a surface of variable depth liquid is constructed. The model takes into account effects of nonlinear dispersion and inertia, elasticity and geometrical nonlinear deflection of plates. On the basis of the general model the hierarchical sequence of more simple models is developed. This models generalize the known in the water wave theory the models of Peregrine, Boussinesq and Korteweg - de Vries on the case of the flexural-gravitational waves. In particular case of generalized equation of Korteweg - de Vries an exact solution has been obtained. This solution describes the properties of solitons and cnoidal waves in the sea covered broken and unbroken ice. It is shown that the flexural-gravitational waves are overfurned, in comparison with the long nonlinear water waves. With regard to the solitons it means, that without change of the form surface propagation the trough, while in the water propagation the crest. The velocity propagation of flexural - gravitational waves with increase of amplitude decreases. Moreover the characteristics the flexural gravitational waves are determined by amplitude and dispersion of flexural rigidity of a plate and do not depend on water dispersion and inertial properties of ice cover.

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании трансформации длинных поверхностных гравитационных волн в жидкости переменной глубины широко используются нелинейные и нелинейно-дисперсионные модели [1]. Обзор этих моделей, а также их взаимосвязь и иерархическая последовательность приведены в [2].

Теория изгибно-гравитационных волн к настоящему времени достаточно широко разработана на основе линейных моделей [3-5]. Нелинейным изгибно-гравитационным волнам посвящены лишь отдельные работы [6-11]. Связано это прежде

всего с тем, что с математической точки зрения в задачах о нелинейных изгибно-гравитационных волнах граничные условия на свободной поверхности носят более сложный характер по сравнению с соответствующими условиями для линейных изгибно-гравитационных волн и нелинейных гравитационных волн.

Поверхностные волны в сплошных льдах представляют собой комбинацию изгибной волны в ледяной пластине и гравитационной волны в воде. Эта двойственность вносит существенные изменения в дисперсию волн. Колебания того или иного типа преобладают в зависимости от соотношения

между силами тяжести и жесткостью ледяной пластины. Силы инерции массы льда и силы упругости уравновешивают давление волн и определяют динамическое условие на поверхности раздела лед – вода. Таким образом, динамическое условие для изгибно-гравитационных волн приобретает очень сложный вид и детальное исследование физических закономерностей распространения этих волн весьма затруднено. В работах [8, 9] представлено обобщение теории нелинейных волн Стокса на случай изгибно-гравитационных волн и выявлены физические закономерности распространения этих волн в случае конечной и бесконечной глубины жидкости. Однако наиболее существенно нелинейные эффекты в теории изгибно-гравитационных волн проявляются в случае длинных волн. Некоторые математические модели и решения для длинных нелинейных изгибно-гравитационных волн приведены в работах [6, 7, 10, 11].

В битых льдах размеры льдин считаются малыми по сравнению с длиной волны, и вертикальные перемещения соответствуют профилю поверхностной волны. Здесь восстанавливающей силой, порождающей колебания, является сила тяжести. При распространении длинных поверхностных гравитационных волн в битых льдах не появляется никаких новых типов волн по сравнению с чистой водой. Вторичные волны, генерируемые свободными колебаниями каждой отдельной льдины, мало влияют на общую волновую картину. Поэтому битый лед обычно моделируется совокупностью несвязанных между собой плавающих масс, и его можно интерпретировать как плавающую на поверхности жидкости тонкую несжимаемую пленку с поверхностным натяжением, зависящим от сплоченности битого льда [5].

Ниже мы построим иерархическую последовательность длинноволновых нелинейно-дисперсионных моделей трансформации волн в жидкости переменной глубины, покрытой сплошным или битым льдом, последовательно переходя от полной постановки задачи ко все более простым моделям. Для обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза подробно исследуем влияние различных факторов на существование кноидальных и уединенных волн.

1. ДЛИННЫЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

Рассмотрим потенциальное волновое движение идеальной несжимаемой жидкости переменной глубины $d(x)$, свободная поверхность которой по-

крыта упругой пластиной. Пусть плоскость xOy совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости, а ось z направлена вверх. В этом случае краевая задача описывается уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

с соответствующими граничными условиями: на дне $z = -d$

$$w = -u \frac{\partial d}{\partial x} - v \frac{\partial d}{\partial y} \quad (5)$$

и на поверхности контакта жидкости и упругой пластины с учетом геометрически нелинейного прогиба $z = \zeta_z$ [12]

$$w = \frac{\partial \zeta_z}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta_z}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta_z}{\partial y}, \quad (6)$$

$$p = D \nabla^4 \zeta_z + \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial t^2} - h_1 L(\zeta_z, \Phi), \quad (7)$$

$$\nabla^4 \Phi = EL(\zeta_z, \zeta_z). \quad (8)$$

Здесь u, v и w – компоненты вектора скорости; p – давление в жидкости; ρ_2 – плотность жидкости; ρ_1, h_1, D, E – соответственно плотность, толщина, цилиндрическая жесткость и модуль упругости пластины; $\zeta_z, \Phi, \sigma_x, \sigma_y, \tau$ – прогиб, функция напряжений и компоненты тензора напряжений в срединной поверхности пластины соответственно:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_y, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma_x, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\tau,$$

$$L(\zeta_z, \Phi) = \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},$$

$$L(\zeta_z, \zeta_z) = \left(\frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial y^2}.$$

Введем обозначение:

$$\bar{f} = \frac{1}{h} \int_{-d}^{\zeta_z} f dz, \quad h = d + \zeta_z$$

и проинтегрируем уравнения (1), (2) и (4) по глубине от $-d$ до ζ_z . Тогда с учетом граничных условий (5) - (7) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial(h\bar{p})}{\partial x} = \\ = \frac{1}{\rho_2} \left[\frac{\partial\zeta_z}{\partial x} p(\zeta_z) + p(-d) \frac{\partial d}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}^2)}{\partial y} + \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial(h\bar{p})}{\partial y} = \\ = \frac{1}{\rho_2} \left[\frac{\partial\zeta_z}{\partial y} p(\zeta_z) + p(-d) \frac{\partial d}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial\zeta_z}{\partial t} = 0. \quad (11)$$

Следуя работе [13], предположим, что отклонением горизонтальных компонент вектора скорости в каждой точке потока от компонент средней по глубине скорости можно пренебречь, т.е. положить $\bar{u} \simeq u, \bar{v} \simeq v, \bar{u}^2 \simeq u^2, \bar{v}^2 \simeq v^2, \bar{u}\bar{v} \simeq uv$. Проинтегрируем теперь уравнение (4) по z в пределах от $-d$ до z :

$$w = -(z+d) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + f(x, y). \quad (12)$$

В выражении (12) функцию $f(x, y)$ выберем таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям на дне (5) и на свободной поверхности раздела (6). Окончательно получим:

$$w = -\frac{\partial}{\partial x} [(z+d)u] - \frac{\partial}{\partial y} [(z+d)v]. \quad (13)$$

Из уравнения (3) следует, что

$$p(z) = -\rho_2 \int \left(g + \frac{dw}{dt} \right) dz + C. \quad (14)$$

Определяя из выражения (14) с учетом (13) значения $p(-d)$ и \bar{p} и подставляя их в (9), (10), получаем уравнения длинноволнового нелинейно-дисперсионного приближения, описывающие распространение изгибно-гравитационных волн в упругой пластине на поверхности жидкости переменной глубины с учетом геометрически нелинейного прогиба пластины:

$$\frac{\partial\zeta_z}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0, \quad (15)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \left(\frac{hR}{2} + Q \right) \nabla d - \frac{1}{h} \nabla \left(\frac{h^3 R}{3} + \frac{h^2 Q}{2} \right) + \quad (16)$$

$$+ \nabla \left(g\zeta_z + \frac{D}{\rho_2} \nabla^4 \zeta_z + \frac{\rho_1 h_1}{\rho_2} \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial t^2} - \frac{h_1}{\rho_2} L(\zeta_z, \Phi) \right) = 0,$$

$$\nabla^4 \Phi = EL(\zeta_z, \zeta_z), \quad (17)$$

где

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(u, v), \quad \nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y},$$

$$R = \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})] - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2,$$

$$Q = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \nabla d + \mathbf{u} \cdot [\nabla(\mathbf{u} \cdot \nabla d)].$$

2. ИЕРАРХИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ МОДЕЛЕЙ ДЛИННЫХ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН. ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим динамический процесс изгиба пластины без учета распространения упругих волн [12], что дает возможность отбросить инерционные члены $\partial^2 \zeta_x / \partial t^2, \partial^2 \zeta_y / \partial t^2$ (здесь ζ_x, ζ_y - компоненты вектора перемещений срединной поверхности упругой пластины). Тогда для одномерного случая из уравнения перемещения [12] имеем:

$$\frac{\partial^2 \zeta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial \zeta_z}{\partial x} \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial x^2} = 0.$$

Проинтегрировав последнее уравнение по x , получим

$$\frac{\partial \zeta_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta_z}{\partial x} \right)^2 = \epsilon_x = \text{const}, \quad (18)$$

где ϵ_x - деформация срединной поверхности за счет геометрически нелинейного прогиба. Тогда для одномерного случая

$$L(\zeta_z, \Phi) = \frac{E\epsilon_x}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial x^2}$$

и уравнения (15)-(17) нелинейно-дисперсионного приближения распространения изгибно-гравитационных волн в упругой пластине, плавающей на поверхности жидкости, будут иметь вид

$$\frac{\partial \zeta_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) = 0, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{hR}{2} + Q \right) \frac{\partial d}{\partial x} - \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3 R}{3} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left[g\zeta_z + \frac{D}{\rho_2} \frac{\partial^4 \zeta_z}{\partial x^4} + \frac{\rho_1 h_1}{\rho_2} \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial t^2} - \right. \right. \end{aligned} \quad (20)$$

$$-\frac{h_1 E \epsilon_x}{\rho_2 (1 - \nu^2)} \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial x^2} = 0.$$

Введем безразмерные переменные (звездочки в дальнейшем опустим):

$$\begin{aligned} x^* &= x/\lambda, & (z^*, h_1^*, d^*) &= (z, h_1, d)/d_0, \\ (\zeta_x^*, \zeta_z^*) &= (\zeta_x, \zeta_z)/A, & t^* &= t\sqrt{gd_0}/\lambda, \\ u^* &= u/(\alpha\sqrt{gd_0}), & \rho_i^* &= \frac{\rho_i}{\rho_2}, \quad (i = 1, 2), \\ \alpha &= A/d_0, & \beta &= (d_0/\lambda)^2, \\ E^* &= \frac{\beta E}{(1 - \nu^2)\rho_2 g \lambda}, \\ \gamma &= \beta \rho_1 h_1 / \rho_2 d_0, & \delta &= \beta D / (\rho_2 g d_0^2 \lambda^2) \end{aligned}$$

и запишем уравнения модели в следующем виде:

$$\frac{\partial \zeta_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \zeta_z}{\partial x} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \left[\left(\frac{hR}{2} + Q \right) \frac{\partial d}{\partial x} - \right. \\ \left. - \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3 R}{3} + \frac{h^2 Q}{2} \right) \right] + \gamma \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial x \partial t} + \delta \frac{\partial^5 \zeta_z}{\partial x^5} - \\ - E h_1 \epsilon_x \frac{\partial^3 \zeta_z}{\partial x^3} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} R &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \alpha \left[u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right], \\ Q &= \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial d}{\partial x} + \alpha u \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial d}{\partial x} \right), \quad h = d + \alpha \zeta_z. \end{aligned}$$

Оставляя в уравнении (22) члены порядка α, β и те, что соответствуют геометрически нелинейному прогибу пластины, получаем уравнение Перегринна [14], описывающее трансформацию длинных волн конечной, но малой амплитуды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\beta d}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial^2 (du)}{\partial x^2} - \frac{d}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta_z + \gamma \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial^4 \zeta_z}{\partial x^4} - E h_1 \epsilon_x \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial x^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

В одномерном случае при $d = d_0 = \text{const}$ из уравнений (21) и (23) получим систему уравнений типа Буссинеска [1]:

$$\frac{\partial \zeta_z}{\partial t} + (1 + \alpha \zeta_z) \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u \frac{\partial \zeta_z}{\partial x} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\beta}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta_z + \right. \quad (25)$$

$$\left. + \gamma \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial^4 \zeta_z}{\partial x^4} - E h_1 \epsilon_x \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Из системы уравнений (24), (25), проделав преобразования, аналогичные [1], получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_z}{\partial t} + \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \zeta_z \right) \frac{\partial \zeta_z}{\partial x} + \\ + \frac{\beta + 3\gamma - 3h_1 \epsilon_x E}{6} \frac{\partial^3 \zeta_z}{\partial x^3} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial^5 \zeta_z}{\partial x^5} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

которое, согласно классификации [15], относится к классу обобщенных уравнений Кортевега-де Вриза.

Изучим стационарные решения уравнения (26):

$$\zeta_z(x, t) = -X(\xi), \quad \xi = x - Ut. \quad (27)$$

Подставляя выражения (27) в (26), затем дважды интегрируя и вводя новые переменные $X \equiv X, (dX/d\xi)^2 \equiv Y(X)$, получаем

$$\begin{aligned} -\frac{\delta}{4} \left[Y Y'' - \frac{1}{4} (Y')^2 \right] - \frac{\beta + 3\gamma - 3h_1 \epsilon_x E}{12} Y + \\ + \frac{\alpha}{4} X^3 - \frac{1-U}{2} X^2 + AX + B = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Решение уравнения (28) будем искать в виде степенного ряда

$$Y = \sum_{i=0}^{\infty} b_i X^{\alpha_i}.$$

Подставляя этот ряд в (28) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях X^{α_i} с учетом замены $\tau^2(\xi) = X$, находим:

$$3P \left(\frac{d\tau}{d\xi} \right)^2 = -(\pm \tau^3 + 3C\tau^2 \pm 6A\tau + 6B) \equiv f(\tau), \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{35\delta}{\alpha}}, \quad C = \frac{4\kappa}{39} \sqrt{\frac{35}{\alpha\delta}}, \quad A = \frac{5}{18\alpha} (U - c_0), \\ B &= \frac{8\kappa}{111\alpha} \sqrt{\frac{35}{\alpha\delta}} (U - c_0), \quad c_0 = 1 - \frac{288\kappa^2}{169\delta}, \\ \kappa &= (\beta + 3\gamma - 3h_1 \epsilon_x E) / 12. \end{aligned} \quad (30)$$

При определенных условиях уравнение (29) может описывать периодическое движение, совершающееся между двумя смежными вещественными нулями функции $f(\tau)$, где $f(\tau) \geq 0$. Функция $f(\tau)$ – кубический полином, имеющий три корня. В дальнейшем мы будем изучать решения, описывающие непостоянные ограниченные решения (29). Очевидно, мы должны рассмотреть два случая:

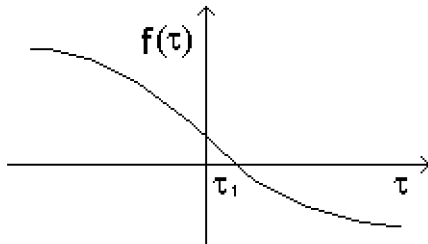


Рис. 1. Схематический график изменения функции $f(\tau)$, когда она имеет только один вещественный корень

первый — когда $f(\tau) = -(\tau^3 + 3C\tau^2 + 6A\tau + 6B)$, второй — когда $f(\tau) = \tau^3 - 3C\tau^2 + 6A\tau - 6B$.

Случай 1. Пусть $f(\tau)$ имеет один вещественный корень при $\tau = \tau_1$. Из рис. 1 ясно, что $f(\tau) < 0$, когда $\tau > \tau_1$, и $f(\tau) \geq 0$, когда $\tau \leq \tau_1$, поэтому для вещественных решений (29) мы должны рассматривать интервал $\tau \leq \tau_1$. Так как $f(\tau)$ остается положительным при $\tau \leq \tau_1$ и стремится к бесконечности при $\tau \rightarrow -\infty$, то решение оказывается неограниченным.

Пусть теперь все три корня τ_1, τ_2, τ_3 функции $f(\tau)$ вещественные. Это возможно только в случае, когда $U \leq c_0$, причем для трех различных вещественных корней $U < c_0$, а когда два из них равны между собой — $U = c_0$.

Рассмотрим случай, когда $\beta + 3\gamma - 3h_1\epsilon_x E \geq 0$, т.е. $\epsilon_x < (\beta + 3\gamma)/(3h_1E)$. Рис. 2 дает качественную картину изменения функции $f(\tau)$, когда все корни $f(\tau)$ ($\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$) различны (кривая А) и когда $\tau_1 < \tau_2 = \tau_3$ (кривая В, которая касается оси τ в точке τ_2).

Пусть $f(\tau)$ имеет три различных вещественных корня (при этом коэффициенты полинома должны удовлетворять условиям $C > 0, B < 0, A < 0$). Поскольку решение (29) должно быть вещественным и ограниченным, то мы должны выбирать интервал изменения τ между корнями τ_2 и τ_3 (кривая А). Тогда после интегрирования уравнения (29) получаем [1, 15]:

$$\tau = \tau_2 + (\tau_3 - \tau_2) \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{\tau_3 - \tau_1}{12P}} \xi, s\right), \quad (31)$$

где sn — эллиптическая функция Якоби; $s = \sqrt{(\tau_3 - \tau_2)/(\tau_3 - \tau_1)}$.

Пусть $f(\tau)$ имеет три вещественных корня, два

из которых равны (кривая В). Тогда $U = c_0, A = B = 0, C > 0$ и допустимый интервал значений $\tau < \tau_1$. Но в этом случае, как и для случая одного вещественного корня, ограниченное решение не существует.

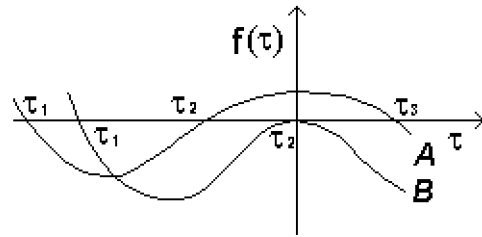


Рис. 2. Схематический график изменения функции $f(\tau)$, когда все три корня вещественные. Случай 1

Предположим теперь, что $\beta + 3\gamma - 3h_1\epsilon_x E < 0$, т.е. $\epsilon_x > (\beta + 3\gamma)/(3h_1E)$ и пусть $f(\tau)$ имеет три различных вещественных корня ($\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$) (рис. 3). Тогда $C < 0, A < 0, B > 0$ и вещественное ограниченное решение уравнения (29) будет существовать при изменении τ между τ_2 и τ_3 (кривая А) и определяется выражением (31). В случае, когда два вещественных корня равны (кривая В), $U = c_0, C < 0, A = B = 0$. При этом τ должно изменяться между τ_1 и τ_2 (кривая В, рис. 3). Поскольку решение уравнения (29) должно быть ограниченным и вещественным, то его можно представить в виде [1, 15]

$$\tau = -3C \operatorname{sech}^2\left(\xi \sqrt{\frac{-3C}{12P}}\right). \quad (32)$$

В бегущей волне, описываемой выражением (32), переход от состояния покоя при $\xi \rightarrow -\infty$ к состоянию покоя при $\xi \rightarrow +\infty$ локализуется в окрестности $\xi = 0$. Будем называть такой процесс уединенной волной.

Случай 2. Пусть $f(\tau) = \tau^3 - 3C\tau^2 + 6A\tau - B$. Тогда, проделав анализ, аналогичный случаю 1, получим, что уравнение (29) допускает решение в виде кноидальной волны [1, 15]:

$$\tau = \tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{\tau_3 - \tau_1}{12P}} \xi, s\right), \quad (33)$$

(здесь sn — эллиптическая функция Якоби; $s = \sqrt{(\tau_2 - \tau_1)/(\tau_3 - \tau_1)}$, $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ вещественные корни полинома $f(\tau)$, существующие для всех значений κ , при которых выполняется неравенство $U < c_0$), а также в виде уединенной волны (когда $U = c_0, \kappa < 0, C < 0, A = B = 0$, т.е.

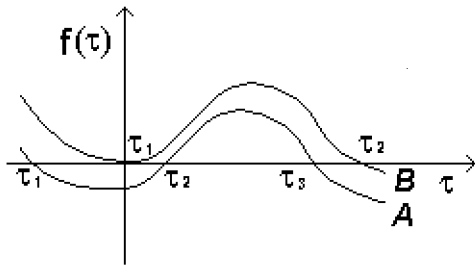


Рис. 3. Схематический график изменения функции $f(\tau)$, когда все три корня вещественные. Случай 2

$f(\tau)$ имеет три вещественных корня, из которых два равны) [1, 15]:

$$\tau = 3C \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{-3C}{12P}}\xi\right). \quad (34)$$

Окончательно, с учетом замены $\tau^2(\xi) = X$ из выражений (27), (31) – (34) получаем стационарные непостоянные, вещественные и ограниченные решения уравнения (26) в виде кноидальной волны:

$$\zeta_z(x, t) = -\left[\tau_2 + (\tau_3 - \tau_2) \operatorname{cn}^2\left(\sqrt{\frac{\tau_3 - \tau_1}{12P}} \times \right. \right. \quad (35)$$

$$\left. \left. \times (x - Ut), s\right)\right]^2,$$

$$\zeta_z(x, t) = -\left[\tau_1 + (\tau_2 - \tau_1) \operatorname{sn}^2\left(\sqrt{\frac{\tau_3 - \tau_1}{12P}} \times \right. \right. \quad (36)$$

$$\left. \left. \times (x - Ut), s\right)\right]^2$$

и уединенной волны

$$\zeta_z(x, t) = -9C^2 \operatorname{sech}^4\left(\sqrt{-\frac{\kappa}{13\delta}}(x - Ut)\right). \quad (37)$$

В выражениях (35) и (36) τ_2 и τ_1 определяют отклонение, соответствующее подошве изгибно-гравитационной волны.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Положим τ_2 в решении (35) и τ_1 в (36) равными нулю и зафиксируем таким образом, что подошва изгибно-гравитационной волны совпадает с поверхностью раздела лед–вода. В этом случае из уравнения (29) следует, что кноидальную волну будет описывать только выражение (35), поскольку в выражении (36) при $\tau_1 = 0$ два других корня τ_1 и τ_3 правой части (29) будут комплексными. Из

условия $\tau_2 = 0$ следует, что в уравнении (29) $B = 0$. Тогда из (30) имеем:

$$C = 0, \quad c_o = 1, \quad A = \frac{5}{18\alpha}(U - 1),$$

$$\epsilon_x = (\beta + 3\gamma)/(3h_1E)$$

и выражение (35) можно переписать в виде

$$\zeta_z(x, t) = 6A \operatorname{cn}^4\left[\sqrt{\frac{2\sqrt{6A}}{12P}}(x - Ut), s\right].$$

Из условия того, что безразмерная амплитуда кноидальной волны равна -1, следует, что

$$U = 1 - \frac{3\alpha}{5}.$$

Окончательно выражение (35), описывающее кноидальную волну при $\tau_1 = 0$, запишется следующим образом:

$$\zeta_z(x, t) = -\operatorname{cn}^4\left(\frac{1}{\sqrt{6P}}(x - Ut), s\right), \quad s = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (38)$$

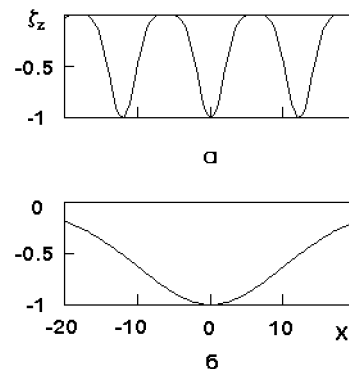


Рис. 4. Профили кноидальной (а) и уединенной (б) изгибно-гравитационных волн

Рис. 4, а иллюстрирует форму изгибно - гравитационной кноидальной волны, определяемой выражением (38) при $t = 0, \alpha = 0.35, \delta = 0.4$. Из графика следует, что кноидальные изгибно- гравитационные волны являются перевернутыми по сравнению с кноидальными волнами на воде. Для них характерно наличие более острой впадины по сравнению с горбом, в то время как в случае поверхностных гравитационных волн наоборот.

Длина изгибно-гравитационной кноидальной волны, ее период, волновое число и частота определяются следующими выражениями:

$$\lambda = \left(1 - \frac{3\alpha}{5}\right)\sqrt{6PK}(s),$$

$$T = \sqrt{6P}K(s), \quad k = (1 - \frac{3\alpha}{5})/\sqrt{6P}, \quad (39)$$

$$\omega = 1/\sqrt{6P};$$

где $K(s)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Из последнего выражения (39), которое представляет собой дисперсионное соотношение, следует, что частота изгибно-гравитационной кноидальной волны зависит от ее амплитуды и упругих свойств ледяной пластины.

Рассмотрим теперь более подробно выражение (37), описывающее изгибно-гравитационный солитон в море, покрытом сплошным льдом. Заметим, что безразмерная амплитуда прогиба пластины равна $-9C^2$, т.е. изгибно-гравитационный солитон является перевернутым по отношению к солитону в волнах на воде. Кроме того, в силу введенного нами обезразмеривания следует, что $9C^2 = 1$ и из условия $\kappa < 0$ имеем $3C = -1$. Откуда легко найти, что деформация срединной поверхности построенного нами солитона определяется как

$$\epsilon_x = \frac{\beta + 3\gamma + 39\sqrt{\alpha\delta/35}}{3h_1E}. \quad (40)$$

При построении решения (37) было показано, что вещественное ограниченное решение уравнения (29), а следовательно, и уравнения (26), будет существовать при $\epsilon_x > (\beta + 3\gamma)/3h_1E$. Для построенного нами решение это условие в силу (40) заведомо выполняется. Отсюда следует, что изгибно-гравитационный солитон существует всегда, а не только для предварительно растянутой пластины, как это утверждается в [6, 7]. Окончательное выражение для изгибно-гравитационного солитона примет вид

$$\zeta_z(x, t) = -\text{sech}^4\left(\sqrt{-\frac{\kappa}{13\delta}}(x - Ut)\right), \quad (41)$$

$$\kappa = -\frac{\sqrt{2\delta/35}}{12}$$

Уединенная изгибно-гравитационная волна при $t = 0, \alpha = 0.35, \delta = 0.4$ представлена на рис. 4, б.

Согласно выражений (30) и (40) скорость распространения солитона

$$U = 1 - \frac{18}{35}\alpha$$

в отличии от волн на воде с ростом амплитуды уменьшается.

3. ДЛИННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В МОРЕ, ПОКРЫТОМ БИТЫМ ЛЬДОМ

Уравнения длинноволнового нелинейно-дисперсионного приближения трансформации поверхностных волн в жидкости, покрытой битым льдом, можно получить способом, изложенным выше для изгибно-гравитационных волн, при замене уравнения (7) на поверхности раздела жидкости и битого льда $z = a + \zeta$ следующим уравнением:

$$p = m\left(g + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right), \quad (42)$$

где p – давление; ζ – отклонение поверхности раздела лед-вода; $a = -h_o\rho_1/\rho_2$ глубина погружения льдины при статическом равновесии; ρ_2 – плотность воды; $m = \rho_1 h_o N$; N, ρ_1 и h_o – поверхностная плотность, функция сплоченности, плотность и толщина битого льда соответственно. Окончательно имеем:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{1}{h}\nabla\left(\frac{h^3R}{3} + \frac{h^2Q}{2}\right) + \nabla\left(g\zeta + \frac{m}{\rho_2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right) = -\left(\frac{hR}{2} + Q\right)\nabla d, \quad (43)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla \cdot (h\mathbf{u}) = 0, \quad (44)$$

где

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(u, v), \quad \nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$R = \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})] - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2,$$

$$Q = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \nabla d + \mathbf{u} \cdot [\nabla(\mathbf{u} \cdot \nabla d)].$$

$$h = d + a + \zeta.$$

Введем безразмерные переменные (звездочки в дальнейшем опустим)

$$(x^*, y^*) = \frac{(x, y)}{\lambda}, \quad (z^*, d^*, h_o^*, a^*) = \frac{(z, d, h, a)}{(d_o + a)},$$

$$\zeta^* = \frac{\zeta}{A}, \quad t^* = t\frac{\sqrt{g(d_o + a)}}{\lambda},$$

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{\alpha\sqrt{g(d_o + a)}}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_2}, \quad (45)$$

$$\alpha = \frac{A}{(d_o + a)}, \quad \beta = \frac{(d_o + a)^2}{\lambda^2},$$

$$\gamma = \beta\frac{m}{\rho_2(d_o + a)}.$$

Здесь d_o – характерная глубина жидкости; λ и A – длина волны и ее амплитуда.

С учетом уравнения (44) система (42)–(43) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \zeta + \alpha(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \beta \left[\left(\frac{hR}{2} + Q \right) \nabla d - \frac{1}{h} \nabla \left(\frac{h^3 R}{3} + \frac{h^2 Q}{2} \right) \right] + \gamma \nabla \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0, \quad (46)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \nabla(h\mathbf{u}) = 0, \quad (47)$$

где

$$R = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \alpha \{ \mathbf{u} \cdot [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})] - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \},$$

$$Q = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \nabla d + \alpha \mathbf{u} \cdot [\nabla(\mathbf{u} \cdot \nabla d)],$$

$$h = d + a + \alpha \zeta.$$

Полученные уравнения отличаются от слабонелинейного приближения наличием дополнительных членов порядка $\alpha^n \beta$ ($n = 1, 2, 3, 4$), описывающих эффекты нелинейной дисперсии. При $m=0$ и $a=0$ уравнения (46)–(47) переходят в известные уравнения длинноволнового нелинейно-дисперсионного приближения в жидкости переменной глубины, полученные в [2] способом, изложенным выше и разложением по малому параметру β .

Оставляя в уравнении (46) члены порядка α и β , получим уравнение типа Перегринна [14]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \alpha(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla(\zeta + \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}) - \beta \frac{d+a}{2} \frac{\partial}{\partial t} \{ \nabla[\nabla \cdot (d\mathbf{u})] - \frac{d+a}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \} = 0. \quad (48)$$

В одномерном случае при $d = d_0 = \text{const}$ из соотношений (47), (48) получим систему уравнений типа Буссинеска:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\beta}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + \gamma \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t^2} \partial x = 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(1 + \alpha \zeta)u] = 0. \quad (50)$$

Из системы уравнений (49), (50) после несложных преобразований [1] получим уравнение типа Кортевега-де Вриза:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{3}{2} \alpha \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\beta + 3\gamma}{6} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0. \quad (51)$$

Уравнения (49)–(51) могут быть также получены из системы уравнений (1)–(4), граничных условий (5)–(6), (42) разложением по малому параметру β .

Введем потенциал скоростей $\mathbf{u} = \nabla \varphi$ и, используя уравнение Бернулли, перепишем исходную систему с учетом (45) следующим образом:

$$\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, z \in [-d_0, a + \alpha \zeta], x \in (-\infty, \infty),$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=-d_0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=a+\alpha \zeta} = 0, \quad (52)$$

$$\left\{ \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}_{z=a+\alpha \zeta} = 0.$$

Рассмотрим случай, когда длина распространяющейся волны существенно превышает глубину жидкости, а ее амплитуда является достаточно малой, так что $\beta \ll 1$ и $\alpha \ll 1$, причем $\alpha \sim \beta$. В этом случае потенциал скоростей φ естественно разложить в ряд Тейлора по глубине [1]:

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(z + d_0)^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} \beta^m. \quad (53)$$

Подставляя разложение (53) в (52) и выполняя преобразования, аналогичные [1], получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{2} \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \gamma \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t^2 \partial x} + O(\alpha \beta, \beta^2) = 0,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial [(1 + \alpha \zeta)u]}{\partial x} - \frac{1}{6} \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O(\alpha \beta, \beta^2) = 0.$$

Это вариант уравнений типа Буссинеска, который легко сводится к виду системы (49), (50) [1].

Стационарные решения уравнения (51) будем искать в виде

$$\zeta(x, t) = \zeta(\xi), \quad \xi = x - Ut. \quad (54)$$

Подставляя соотношения (54) в (51) и интегрируя его по ξ , получаем

$$\frac{\beta + 3\gamma}{6} \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2} + \frac{3}{4} \alpha \zeta^2 - (U - 1)\zeta = \frac{3}{2} A.$$

Умножая последнее уравнение на $d\zeta/d\xi$ и снова интегрируя его по ξ , имеем:

$$3S \left(\frac{d\zeta}{d\xi} \right)^2 = -\zeta^3 + 3C\zeta^2 + \frac{6A}{\alpha} + \frac{6B}{\alpha}, \quad (55)$$

где

$$S = \frac{\beta + 3\gamma}{9\alpha}, C = \frac{2(U - 1)}{3\alpha}.$$

Уравнение (55) аналогично уравнению (29), которое было подробно исследовано выше. В случае, когда полином правой части (55) имеет три различных вещественных корня $\zeta_3 > \zeta_2 > \zeta_1$, решение можно представить в виде

$$\zeta = \zeta_2 + (\zeta_3 - \zeta_2) \operatorname{cn}^2 \left[\sqrt{\frac{\zeta_3 - \zeta_1}{12S}} (x - Ut), s \right],$$

$$s = \sqrt{\frac{\zeta_3 - \zeta_2}{\zeta_3 - \zeta_1}}. \quad (56)$$

В случае, когда два из корней полинома равны, решение записывается следующим образом:

$$\zeta = \zeta_2 + (\zeta_3 - \zeta_2) \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{\zeta_3 - \zeta_1}{12S}} (x - Ut) \right]. \quad (57)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи построенных выше решений для кноидальных и уединенных волн.

Положим ζ_2 в уравнении (56) равным нулю, что эквивалентно отсутствию дополнительного подъема уровня воды и, следовательно, фиксирует начальную глубину жидкости. Из условия того, что безразмерная амплитуда равна единице, следует, что $\zeta_3 = 1$. Третий корень ζ_1 полинома правой части (55) должен быть отрицательным. Положим его равным $\zeta_1 = \alpha - 1$. Это соответствует условию того, что амплитуда кноидальной волны должна быть меньше глубины жидкости. Окончательно выражение (56), описывающее кноидальную волну, при сделанных предположениях запишется следующим образом:

$$\zeta = \operatorname{cn}^2 \left[\sqrt{\frac{2 - \alpha}{12S}} (x - Ut), s \right], \quad s = \sqrt{\frac{1}{2 - \alpha}}. \quad (58)$$

Скорость распространения этой волны, ее длина, период, волновое число и частота определяются выражениями

$$U = 1 + \frac{\alpha^2}{2}; \quad \lambda = 4U \sqrt{\frac{3S}{2 - \alpha}} \mathcal{K}(s);$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{3S}{2 - \alpha}} \mathcal{K}(s), \quad k = \frac{1}{2U} \sqrt{\frac{2 - \alpha}{3S}},$$

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 - \alpha}{3S}},$$

где $\mathcal{K}(s)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Рассмотрим уединенную волну, определяемую выражением (57). Предполагая, как и выше, что $\zeta_2 = 0$ и $\zeta_3 = 1$, получаем:

$$\zeta = \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3\alpha}{4(\beta + \gamma)}} (x - Ut) \right], \quad U = 1 + \frac{\alpha}{2}. \quad (59)$$

Из выражений (58) и (59) следует, что скорость распространения кноидальных и уединенных волн в море, покрытом битым льдом, зависит только от амплитуды и не зависит от сплоченности битого льда. В то же время длина волны и ее период зависят и от амплитуды волны и от характеристик битого льда.

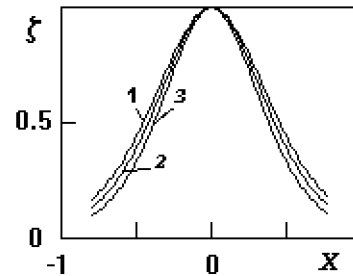


Рис. 5. Профиль уединенной волны для различных значений функции сплоченности битого льда: 1 – $N = 1$, 2 – $N = 0.5$, 3 – $N = 0$

На рис. 5 приведены расчеты отклонения поверхности раздела лед–вода по формуле (59) при следующих значениях параметров: $t = 0$; $h_0 = 0.15$; $\rho_1 = 0.917$; $\alpha = 0.35$; $\beta = 0.05$ для различных значений функции сплоченности N . При этом $N = 1$ соответствует случаю, когда поверхность жидкости полностью покрыта битым льдом, а $N = 0$ – случаю отсутствия льда. Из графика следует, что уединенные волны при наличии битого льда на поверхности воды имеют более пологий профиль.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные выше результаты показывают, что длинные нелинейные волны в море, покрытом льдом, существенным образом зависят от характеристик ледяного покрова. В случае битого льда, при увеличении его сплоченности, длина кноидальных волн увеличивается, а профиль уединенной волны становится более пологим. Это связано с тем, что плавающий битый лед вносит дополнительную дисперсию в процесс распространения волн. При этом скорость распространения этих волн зависит только от амплитуды, как на чистой воде, и не зависит от сплоченности битого льда. В случае сплошного льда влияние характеристик ледяного покрова более сильное. Во-первых, изгибно-гравитационные волны являются перевернутыми по сравнению с длинными нелинейными волнами на воде. Относительно уединенной волны это означает, что без изменения фор-

мы распространяется впадина, а не горб, как в случае чистой воды. Во-вторых, скорость распространения изгибно-гравитационных волн с ростом амплитуды уменьшается. Кроме того, из дисперсионных соотношений (39) следует, что длина изгибно-гравитационной волны растёт с увеличением цилиндрической жесткости пластины и уменьшается с ростом амплитуды. Таким образом, в рассматриваемых случаях отсутствия начального отклонения поверхности раздела характеристики изгибно-гравитационных волн определяются амплитудой и дисперсией изгибной жесткости пластины и не зависят, как в случае битого льда, от дисперсии воды и инерционных свойств ледяного покрова.

1. *Whitham C. B.* Linear and nonlinear waves.– London: A Wiley-Interscience Publication, 1974.– 624 p.
2. *Железняк М. И., Пелиновский Е. Н.* Физико-математические модели наката цунами на берег // Горький.– ИПФ АН СССР.– 1985.– С. 8–33.
3. *Букатов А. Е.* Влияние продольно сжатой упругой пластинки на неустановившееся волновое движение однородной жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1980.– N5.– С. 68–75.
4. *Букатов А. Е., Черкесов Л. В.* Влияние ледяного покрова на развитие внутренних волн от периодических возмущений // Морские гидрофизические исследования.– Севастополь.– 1976.– Т. 75, N4.– С. 5–16.
5. *Хейсин Д. Е.* Динамика ледяного покрова.– Л: Гидрометеоздат, 1967.– 216 с.
6. *Марченко А. В.* О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // ПМН.– 1988.– 52, Вып.2.– С. 230–234.
7. *Марченко А. В., Шрира В. И.* К теории двумерных нелинейных волн в жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1991.– N4.– С. 125–133.
8. *Гладун О. М., Федосенко В. С.* О нелинейном установившемся движении упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости бесконечной глубины // Изв. АН СССР, МФЖ.– 1987.– N2.– С. 119–123.
9. *Гладун О. М., Федосенко В. С.* Нелинейные стоячие колебания упругой пластины, плавающей на поверхности тяжелой жидкости бесконечной глубины // ПММ.– 1988.– 52, вып.3.– С. 460–464.
10. *Ткаченко В. А., Яковлев В. В.* Длинно-волновые нелинейно-дисперсионные модели трансформации поверхностных волн в море, покрытом льдом.– Исследования цунами: М, 1988.– N3 – с.41–46
11. *Ткаченко В. А., Яковлев В. В.* Цилиндрические изгибно-гравитационные волны в море, покрытом льдом // Устойчивость движения твердых и деформируемых систем.– Киев: Наук. думка, 1989.– 100–104 с.
12. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек.– М: Наука, 1972.– 432 с.
13. *Железняк М. И.* Численное моделирование трансформации волн в прибрежной зоне. Методы исследований и расчетов волновых воздействий // Л.– Энергия.– 1982.– С. 194–195.
14. *Peregrin D.H.* Long waves on a beach // J.Fluid Mech.– 1967.– V27.– P. pt.4.815–827
15. *Bhatnagar P. L.* Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems.– Oxford: Clarendon Press Oxford, 1979.– 136 p.