

УДК 624.131 + 539.215

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОРИСТОУПРУГОГО НАСЫЩЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ СЛОЯ ГРУНТА

А. Н. ТРОФИМЧУК

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 26.03.98*

Рассмотрена задача о нестационарных колебаниях слоя пористоупругой насыщенной жидкостью среды, движение которой описывается системой дифференциальных уравнений Био. Используется численный метод конечных элементов для определения динамических перемещений твердой и жидкой фаз, порового давления и эффективных напряжений в твердой фазе. Проведен численный анализ одноосного нагружения слоя пористоупругого водонасыщенного грунта, изучены эффекты взаимодействия фаз в слое при различных значениях параметра проницаемости среды. Приведены численные результаты, показывающие, что процесс консолидации проходит медленнее при уменьшении проницаемости среды; для материала с высокой проницаемостью отмечается заметное демпфирование колебаний.

Розглянуто задачу про нестационарні коливання шару пористоупругого насиченою рідиною середовища, рух якого описується системою диференціальних рівнянь Біо. Застосовано чисельний метод скінечних елементів для знаходження динамічних переміщень твердої і рідкої фаз, порового тиску й ефективних напружень у твердій фазі. Проведено чисельний аналіз одноосового навантаження шару пористоупругого ґрунту, що насичений водою, досліджено ефекти взаємодії фаз у шарі при кількох значеннях параметра проникності середовища. Наведено чисельні результати, які показують, що процес консолідації проходить повільніше при зменшенні проникності середовища; для матеріалу з високою проникністю відзначається помітне демпфювання коливань.

Non-stationary oscillations of the fluid saturated poroelastic layer problem is considered. Motion is described by Biot system of differential equations. The numerical method of finite elements for calculation of dynamic movements of solid and liquid phases, porous fluid pressure and effective stresses in a solid phase is used. The numerical analysis of single-axis loading of a layer of poroelastic fluid saturated ground is conducted, the effects of interaction of phases in a layer are investigated at various values of permeability parameter. The numerical outcomes are adduced, indicating that the process of consolidation passes slower at decreasing of a permeability of media; for a material with a high permeability the noticeable damping of oscillations is marked.

### ВВЕДЕНИЕ

Современные проблемы геомеханики требуют изучения нестационарных явлений, возникающих при землетрясениях, волновых воздействиях и консолидации грунтов. Для этих случаев первоочередной интерес представляет связь между деформациями твердого скелета грунта или горной породы и движением поровой жидкости [1]. Кроме механики грунтов и горных пород, геофизики, подобные проблемы возникают в других областях, например, в порошковой металлургии [2], биомеханике [3]. В последнем случае твердой фазой может считаться живая ткань, а поровой жидкостью – циркулирующая кровь.

Анализ существующих моделей пористоупругой насыщенной жидкостью среды показывает, что в большинстве случаев они представляют собой модификации и обобщения модели М. Био [4], которая получила широкое экспериментальное обоснование. Параметры модели учитывают инерционное взаимодействие фаз и потери на вязкое трение при протекании жидкости по порам.

Как отмечается в обзоре [5], теория Био неудовлетворительна с современной точки зрения по ряду причин: отсутствуют четкие определения,

опущены некоторые члены в уравнениях равновесия. Сделанные допущения не всегда необходимы и сильно ограничивают теорию. Основной недостаток модели Био заключается в том, что в ее основу не заложены фундаментальные аксиомы и принципы механики и термодинамики, а некоторые выводы недостаточно четкие. Тем не менее, положительное влияние работ Био на развитие даже современной теории, как и практическое их значение, неоспоримо. В настоящее время продолжает разрабатываться строгая с точки зрения механики сплошной среды и термодинамики теория пористых сред на основе теории смесей с использованием концепции объемных частей. Сохранение этой концепции заключается в том, что все геометрические и физические величины, такие как движение, деформация и напряжения, определяются в общем для фаз объеме (в котором содержание жидкости может меняться) и могут интерпретироваться как среднестатистические величины реальных значений. Это же использовал и Био при выводе своих уравнений. В современной теории пористых сред устанавливается связь между свойствами материала фаз на макроуровне (для достаточно большого по сравнению с размером зерен грунта и диаметром пор объема) и на

микроуровне. Кроме уравнений равновесия и сохранения (масс, момента, энергии и других) для смеси в целом формулируется также неравенство энтропии. При замыкании системы уравнений используются соответствующие уравнения состояния. Полученные Прево [6] на основе современной теории и ряда допущений уравнения совпадают с уравнениями Био. Последние оказываются вполне корректными при сравнении результатов со строгими решениями, которые очень сложны для использования при численном анализе.

На основе упрощенной модели Био аналитическими методами решались гармоническая [7] и нестационарная [8] задачи о колебаниях слоя насыщенного жидкостью грунта при различных сочетаниях значений проницаемости и сжимаемости поровой жидкости.

Численные решения задач об установившихся колебаниях слоя водонасыщенного грунта на основе модели Био развивались в [9]. Подробный анализ гармонических колебаний двухфазного слоя выполнен Б. И. Дидуком [7]. В качестве практических рекомендаций отмечается, что динамическое поведение среды в стабилизированной зоне может рассматриваться с использованием концепции эквивалентной двухфазной среды при соответствующей корректировке граничных условий. Однако наличие зоны неустановившегося взаимодействия фаз становится причиной опасных явлений разжижения и сдвига грунта. Для переходной зоны следует рассматривать более сложные уравнения состояния. При установившихся колебаниях размер указанных зон зависит от частоты воздействия и его амплитуды, геометрии области и свойств среды. В общем случае учет всего разнообразия условий требует применения численного моделирования.

В статье [10] рассмотрено возбуждение звуковых волн круглым жестким штампом, проходящих через слой из пористого материала, лежащий на непроницаемом основании. Представлены две методики и сравнительные численные результаты исследования звукового поля в зависимости от акустических характеристик пористого материала.

Работа [11] посвящена подробному изучению дисперсионных характеристик нормальных волн в двухфазном слое со свободными границами. Отмечается значительное усложнение волновой картины в среде Био, где распространяются продольные волны двух типов по сравнению с однофазной средой.

Нестационарные задачи динамики двухфазных

сред рассматриваются в ряде работ для различных приложений. В [12] приведены методики и алгоритмы решения задач динамики грунтовых оснований методом конечных элементов (МКЭ) и, в частности, для модели Био рассматривалась задача о мгновенно приложенном к бесконечной полосе воздействию. В рамках упрощенной модели Био в [13] исследовано решение одномерных задач фильтрационной консолидации грунтовых насыпей при действии расчетных нагрузок, включая динамические. Задача о распространении сферической волны в среде Био со сферической полостью рассматривалась в [14]. Поле напряжений в окрестности полости определяется продольной волной 1-го типа, а смещение стенок полости – 2-го типа. Аналитическое решение задачи о динамическом поведении водонасыщенного песчаного слоя (среда Био) с покрывающим его слоем воды использовано в [15] для определения смещений, напряжений и порового давления при действии максимальных штормовых нагрузок на донные отложения, проводилось сравнение результатов с данными модельного эксперимента.

Решению задач динамики сооружений, взаимодействующих с грунтовой средой при установившихся и нестационарных колебаниях на основе модели Био посвящена монография [16].

В результате достаточно интенсивных воздействий при определенных условиях происходит нарушение целостности пористого скелета, возникают необратимые деформации. Для прогноза поведения среды при этом разрабатываются методы решения нелинейных задач, использующих решение линейной задачи на малых интервалах времени, дающих начальное приближение для итераций.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ДЛЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

### 1.1. Уравнения динамики пористоупругой насыщенной жидкостью среды

Модель М. Био представляется системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + b \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) &= \frac{\partial \sigma_{ij}^s}{\partial x_j}; \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + b \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) &= \frac{\partial \sigma^f}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (1)$$

где в предположении изотропности и линейности пористой твердой фазы связь напряжений с де-

формациями принимается следующей:

$$\sigma_{ij}^s = A e \delta_{ij} + N \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + Q \varepsilon \delta_{ij};$$

$$e = \div \bar{u}; \quad \varepsilon = \div \bar{v}; \quad (2)$$

$$\sigma^f = -m p_0 = Q e + R \varepsilon. \quad (3)$$

Здесь  $u_i, v_i$  – компоненты векторов перемещений твердой  $\bar{u}$  и жидкой  $\bar{v}$  фаз в декартовых координатах  $x_i, i = 1, 2, 3, m$ ;  $t$  – время, с;  $\rho_{11} = (1 - m)\rho_s - \rho_{12}$ ;  $\rho_{22} = m\rho_f - \rho_{12}$ ;  $\rho_s, \rho_f$  – плотности твердой и жидкой фаз, кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_{12}$  – коэффициент динамической связи фаз, кг/м<sup>3</sup>;  $m$  – пористость;  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Ламе пористоупругого скелета, Па;  $N = \mu$ ;  $A = \lambda + K_f a_0^2 S_0/m$ ;  $R = m K_f S_0$ ;  $Q = a_0 K_f S_0$ ;  $K_f$  – модуль объемной сжимаемости жидкости, Па;  $\theta_0$  – динамический коэффициент вязкости жидкости, Н с/м;  $S_0 = m K_r / (m K_r + a_0 K_f)$ ;  $a_0 = 1 - m - K_s/K_r$ ;  $K_s = \lambda + 2\mu/3$ ;  $K_r$  – истинный модуль сжимаемости твердой фазы, Па;  $b = m^2 \theta_0 / K_{pr} = gm^2 \rho_f / k_f$  – характеристика проницаемости, кг/м<sup>3</sup>с;  $K_{pr}$  – коэффициент проницаемости, м<sup>2</sup>;  $k_f$  – коэффициент фильтрации, м/с;  $g = 9.81$  м/с<sup>2</sup>;  $e$  – объемная деформация минерального скелета;  $\varepsilon$  – объемная деформация жидкой фазы;  $\sigma_{ij}^s$  – тензор напряжений в скелете при протекании жидкости;  $\sigma^f$  – сила, действующая на жидкость, отнесенная к единице поперечного сечения пористой среды;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Рассматриваются эффективные напряжения  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^s + (1 - m) p_0 \delta_{ij}$ , которые связаны с деформациями скелета грунта соотношениями теории упругости.

Данная работа посвящена численному решению задачи о нестационарных колебаниях слоя водонасыщенного грунта на жестком основании при действии на поверхности нестационарной нагрузки (рис. 1). Граничные условия задачи:

$$\left[ (A + 2N) \frac{\partial u(t)}{\partial x} + Q \frac{\partial v(t)}{\partial x} \right]_{x=0} = q_0 H(t); \quad (4)$$

$$u(t)|_{x=h} = v(t)|_{x=h} = 0, \quad (5)$$

где  $q_0$  – амплитуда давления на твердый скелет;  $H(t)$  – функция Хевисайда. Начальные условия задачи – нулевые.

### 1.2. Конечноэлементная формулировка уравнений Био

Согласно [17] здесь при использовании МКЭ на основе исходных уравнений (1) строится аппрок-

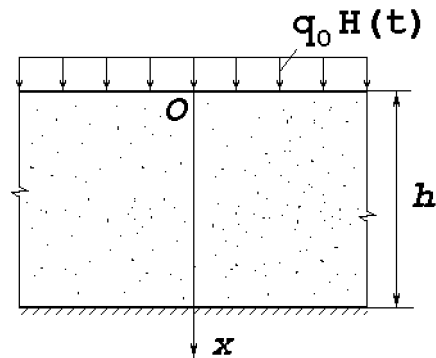


Рис. 1. Схема слоя водонасыщенного грунта на жестком основании при действии нестационарной вертикальной нагрузки

симация вида

$$u_x \approx \tilde{u}_x = \sum_{m=1}^M u_{xm} \mathcal{N}_m;$$

$$u_y \approx \tilde{u}_y = \sum_{m=1}^M u_{ym} \mathcal{N}_m;$$

$$U_x \approx \tilde{U}_x = \sum_{m=1}^M U_{xm} \mathcal{N}_m;$$

$$U_y \approx \tilde{U}_y = \sum_{m=1}^M U_{ym} \mathcal{N}_m, \quad (6)$$

где  $\{u_{xm}, u_{ym}, U_{xm}, U_{ym}\}^T$  – вектор узловых переменных для узла  $m$ ;  $\mathcal{N}_m$  – функции формы элемента для узла  $m$ ;  $M$  – число узлов на элементе;  $\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{U}_x, \tilde{U}_y$  – аппроксимация искомых функций в рассматриваемой двумерной (с координатами  $x, y$ ) области  $\Omega$  с границей  $\Gamma$ .

Записываются аппроксимирующие уравнения метода взвешенных невязок в форме метода Галеркина, для записи слабой формулировки используется формула Грина. После понижения порядка системы получена конечно-элементная формулировка и система уравнений принимает следующий общий вид:

$$[M] \{\dot{\varphi}\} + [C] \{\dot{\varphi}\} + [K] \{\varphi\} = \{P\}, \quad (7)$$

где  $[M], [C], [K]$  – соответственно матрицы масс, демпфирования, жесткости, которые ассемблируются из подматриц узлов [18] и элементов согласно глобальной нумерации узлов. В подматрицу для узла входят: коэффициенты при узловых значениях ускорений (причем в случае слабой связи фаз, при  $\rho_{12} = 0$ , эта подматрица становится диагональной), коэффициенты при узловых значениях

скоростей и коэффициенты при узловых значениях перемещений

Размерность подматрицы элемента соответствует его типу числу переменных в узле, она наряду с глобальной нумерацией узлов определяет ширину диагонали матриц  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  и, таким образом, влияет на время выполнения программы для решения систем уравнений на ЭВМ. Функции формы элемента связывают узловые значения переменных с их значениями в точке с произвольными координатами, принадлежащей элементу. Выбор числа и формы элементов определяется формой области, распределением неоднородностей и предварительной оценкой величин градиентов искомого величин в рассматриваемой области. Степень аппроксимирующего полинома должна быть в данном случае равна 2 для перемещений, тогда деформации и напряжения между узлами будут вычисляться в виде линейных функций координат. При численной реализации используется изопараметрический прямоугольный элемент сирендипова типа с 8-ю узлами [17].

Вектор правой части системы уравнений  $\{P\}$  включает заданные граничные условия в напряжениях и объемные силы. При решении задачи о действии нестационарной нагрузки в вектор правой части включаются дополнительные слагаемые, определяемые методом интегрирования по времени.

Таким образом, выполнена формулировка для двумерной области с квадратичными функциями формы. Глобальные матрицы могут составляться с учетом неоднородностей среды (изменяющихся от элемента к элементу упругих констант, проницаемости, плотности и др.) на основе деления области на элементы и соответствующих исходных данных. При построении глобальных матриц учитываются все узловые неизвестные. Затем следует учесть начальные и граничные условия путем исключения строк и столбцов с заданными нулевыми условиями для компонент перемещений.

При решении системы используются процедуры, учитывающие для ускорения вычислений диагональную структуру общей матрицы.

В общем случае рассматриваемая нагрузка – динамическая нестационарная. При анализе эффективных напряжений следует учесть статическое деформирование слоя от действия собственного веса грунта (с учетом взвешивающей силы для несвязных грунтов) и заданной вертикальной нагрузки. Статическая нагрузка учитывается при вычислении деформаций. Задача определения статических перемещений и напряжений численно ре-

шается в составе программы моделирования нестационарных динамических процессов в грунте.

Моделирование условных границ расчетной области с пропусканием волн может быть осуществлено методами, описанными в [12] и других публикациях.

Переход от дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от времени, к уравнениям с постоянными коэффициентами осуществляется при использовании аппроксимации скорости и ускорения конечно-разностными соотношениями для перемещений и скоростей. При вычислениях используется устойчивая схема интегрирования Ньюмарка, согласно которой формируется эффективная матрица масс для конечноэлементной области:

$$[\tilde{M}] = [M] + \beta \Delta t [C] + \alpha \Delta t^2 [K], \quad (8)$$

где  $\alpha \geq 0.25$  и  $\beta \geq 0.5$  – коэффициенты схемы интегрирования Ньюмарка. На каждом шаге по времени вычисляется вектор сил  $\{\tilde{P}\}_{t+\Delta t}$  и находится решение уравнения для вектора ускорений фаз:

$$[\tilde{M}]\left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right\} = \{\tilde{P}\}_{t+\Delta t}. \quad (9)$$

Затем определяется средняя скорость за период  $\Delta t$  и перемещения в конце рассматриваемого интервала. Определив деформации, находим эффективные напряжения и поровое давление.

Численное поведение конечных элементов различного типа в задачах динамики двухфазных сред и консолидации грунтов изучено в ряде специальных исследований, например [6, 8, 19], где описаны процедуры сглаживания и компенсации вычислительных погрешностей.

Данная методика апробировалась при решении задачи о гармонических колебаниях слоя [20] и сравнивалась с аналитическим решением [21].

## 2. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ СЛОЯ ГРУНТА

Численные примеры рассмотрены для слоя водонасыщенного несвязного грунта со следующими характеристиками:  $\lambda + 2\mu = 1.01 \cdot 10^8$  Па;  $m = 0.4$ ; коэффициент Пуассона минерального скелета  $\nu = 0.3$ ;  $\rho_s = 2700$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_f = 1018$  кг/м<sup>3</sup>;  $K_0 = 2.5 \cdot 10^8$  Па;  $\rho_{12} = 0.0$ ;  $\theta_0 = 1.23 \cdot 10^{-3}$  Нс/м;  $K_r = 10^{11}$  Па, т. е. твердые частицы практически несжимаемы. Рассматривается ряд значений параметра  $b$ .

На рис. 2 показано изменение эффективного напряжения и порового давления (обезразмеренных

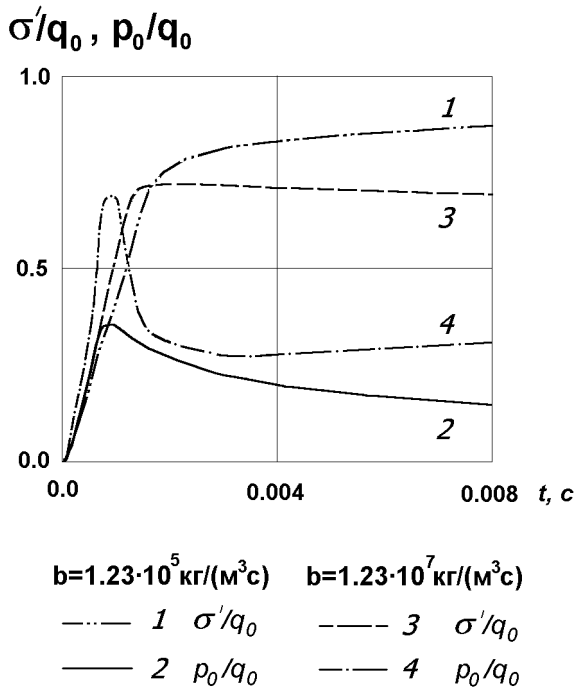


Рис. 2. Безразмерные напряжения в скелете грунта  $\sigma_0/q_0$  и безразмерное поровое давление  $p_0/q_0$  при  $x = 0.3125 \text{ м}$

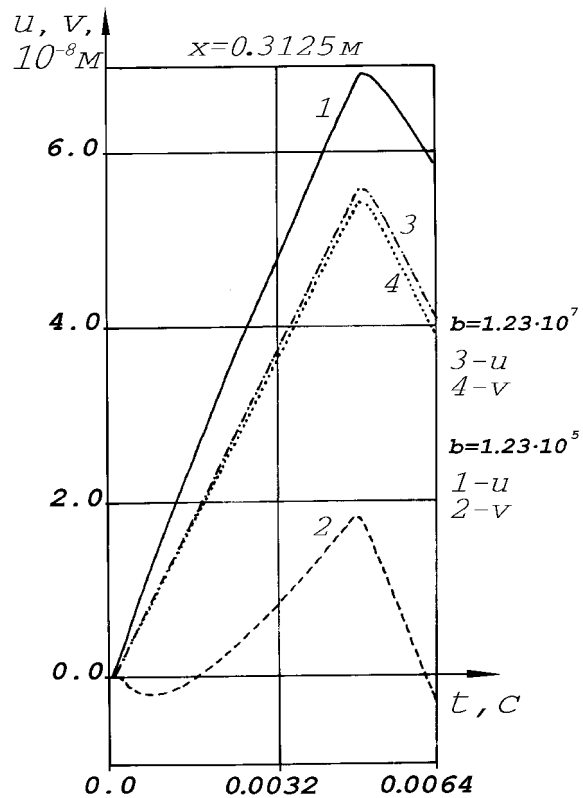


Рис. 3. Перемещения фаз,  $x = 0.3125 \text{ м}$

по  $q_0$ ) во времени для точки  $x = 0.3125 \text{ м}$ . На графиках иллюстрируется развитие процесса консолидации грунта. В момент прихода упругой волны наблюдается резкий рост порового давления: жидкость из пор еще не успевает отфильтровываться, а сжимаемость воды мала. Таким образом, в начальный момент нагрузка передается на поровую воду. Затем происходит передача нагрузки на скелет грунта, а поровое давление снижается.

На процесс консолидации в переходном слое влияет проницаемость. При  $b = 1.23 \cdot 10^5 \text{ кг/(м}^3\text{с)}$  (кривые 1 и 2) происходит быстрое снижение порового давления (кривая 2), и напряжения в скелете (кривая 1) приближаются к величине внешней нагрузки  $q_0$ . В случае, если задано  $b = 1.23 \cdot 10^7 \text{ кг/(м}^3\text{с)}$  (соответственно кривые 3 и 4, малая проницаемость), процесс консолидации проходит медленнее.

Рассмотрим перемещения фаз при заданной единичной величине  $q_0$ . На рис. 3 приведены графики перемещений в зависимости от времени в точке слоя вблизи поверхности,  $x = 0.3125 \text{ м}$ . Перемещения по глубине слоя в момент времени  $t = 0.05 \text{ с}$ , когда возмущение достигает дна, представлены на рис. 4. Показано, что при увеличении проницаемости различие перемещений фаз у поверхности и глубина переходной зоны увеличи-

вается. На рис. 5 представлены графики зависимости от времени перемещения поверхности  $x = 0$  слоя. Приложенная нагрузка вызывает распространение возмущения, которое попеременно отражается от границ слоя. При учете диссипации, при более высоком коэффициенте фильтрации, амплитуда колебаний со временем заметно уменьшается; перемещения приближаются к статическому значению для слоя, сжатого постоянной нагрузкой.

## ВЫВОДЫ

В рамках развития методики численного решения методом конечных элементов задач динамики насыщенных пористых сред рассмотрена нестационарная задача для слоя из двухфазного материала с пористоупругим скелетом и сжимаемой поровой жидкостью на жестком основании в условиях одноосного нагружения внезапно приложенным постоянным давлением к твердому скелету на свободной грани слоя. Проведен численный анализ влияния параметра проницаемости в модели М. Био на изменение во времени эффектив-

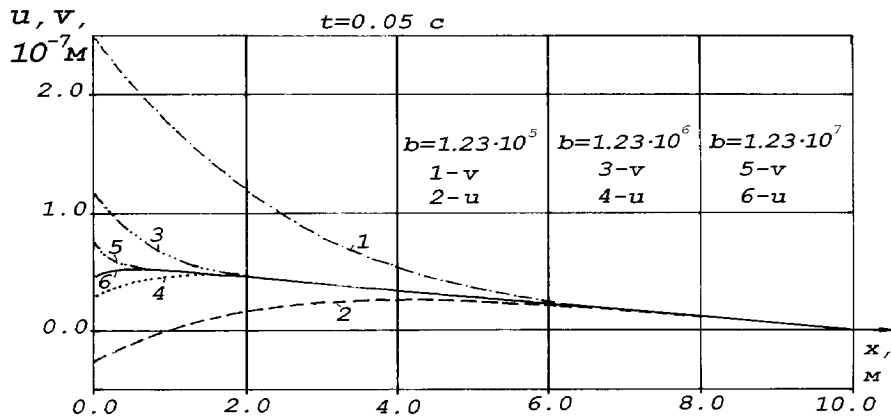


Рис. 4. Перемещения фаз  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  в слое  $h = 10$  м при  $t = 0.05$  с

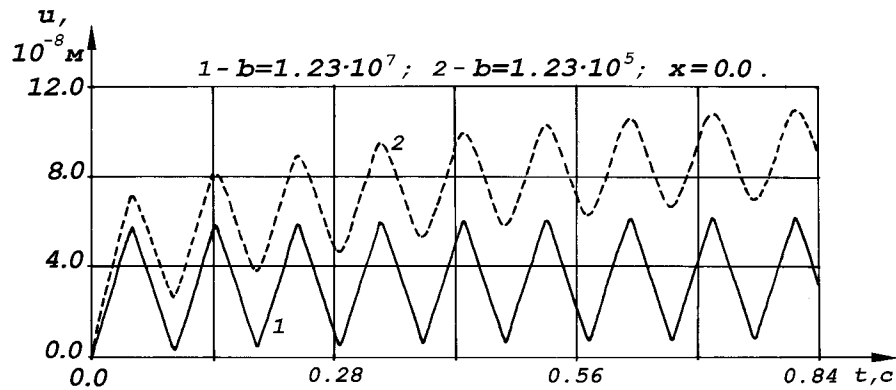


Рис. 5. Перемещения поверхности слоя

ных напряжений, порового давления, перемещений фаз. Основные эффекты сводятся к следующему: в переходной зоне, связанной с нестационарным нагружением водонасыщенного грунта, происходит перераспределение нагрузки, воспринимаемой вначале поровой жидкостью, а затем передаваемой на твердый скелет грунта; продолжительность процесса консолидации увеличивается при уменьшении проницаемости среды; для материала с высокой проницаемостью отмечается заметное демпфирование колебаний.

1. Николаевский В. Н. Геомеханика и флюидодинамика. – М.: Недра, 1996. – 447 с.
2. Мартыненко М. Д., Роман О. В., Селяк В. В. Некоторые задачи контактного взаимодействия пористоупругих тел // Порошковая металлургия. – 1986. – N 10. – С. 91-95.
3. Новински Д., Дэвис К. Распространение продольных волн в круговых цилиндрических элементах из костного материала // Тр. Америк. общ-ва инж.-мех. ПМ. – 1971. – 38, N 3. – С. 1-7.
4. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid // J. Acoust. Soc. Amer. – 1956. – 28, N 2. – P. 168-191.
5. de Boer R. Highlights in the historical development of the porous media theory: Toward a consistent macroscopic theory // Appl. Mech. Rev. ASME. – 1996. – 49, N 4. – P. 201-262.
6. Prevost J. H. Wave propagation in fluid-saturated porous media: an efficient finite element procedure // Soil. Dyn. and Earthquake Eng. – 1985. – 4, N 4. – P. 183-202.
7. Дидух Б. И. Упругопластическое деформирование грунтов. – М.: Издательство УДН, 1987. – 166 с.
8. Simon B. R., Zienkiewicz O. C., Paul D. K. An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids // Int. J. Numer. and Anal. Meth. Geomech. – 1984. – 8, N 4. – P. 381-398.
9. Мишель А. Г., Шульман С. Г. Решение задач динамики двухфазных грунтовых сред методом конечных элементов // Изв. ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. – 1982. – Т. 156. – С. 9-13.
10. Amédin C. K., Berry A., Champoux Y., Allard J.-F. Sound field of a baffled piston source covered by a porous medium layer // J. Acoust. Soc. Amer. – 1995. – 98, N 3. – P. 1757-1766.
11. Городецкая Н. С. Симметричные колебания пористо-упругой полосы со свободными поверхностями

- для случая закрытых пор // Акустичний вісник.– 1998.– 1, N 1.– С. 17–24.
12. Ильичев В. А., Лихоцев В. М. Исследование закономерностей деформирования грунтов на основе численных методов. // В кн.: Программное обеспечение исследований по механике грунтов и фундаментостроению: Пер с англ. и яп. / Под ред. В. М. Лиховцева.– М.: Стройиздат, 1991.– 527 с.
  13. Pariseau W. G. Poroelastic settlement of hydraulic fill // Int. J. Rock. Mech. and Mining. Sci. and Geomech. Abstr.– 1998.– 35, N 2.– P. 255–259.
  14. Xu Changjie, Wu Shiming Spherical wave propagation in saturated soils // Appl. Math. and Mech. Eng. Ed.– 1998.– 19, N 3.– P. 243–256.
  15. Zhang Gende, Gu Xiaoyun The response of finite thickness sand-bed to wave loading // Lixue xuebao.– 1993.– 25, N 1.– P. 56–68.
  16. Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах.– Киев: Наук. думка, 1990.– 224 с.
  17. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ.– М.: Мир, 1975.– 541 с.
  18. Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Численный анализ межфазного взаимодействия в пористоупругой насыщенной жидкостью среде // Обчислювальна та прикладна математика.– 1997.– Вип. 82.– С. 84–89.
  19. Nasri Verva, Magnan Jean Comportement numérique des éléments finis dans l'analyse des problèmes de consolidation des sols // Bull. lab. ponts. et chaussées.– 1997.– N 210.– P. 41–53, 146, 148, 150.
  20. Трофимчук А. Н. Численное моделирование динамического поведения пористоупругой насыщенной жидкостью среды // Доповіді НАН України.– 1998.– N 11.– С. 44–48.
  21. Динамика сплошных сред в расчетах гидротехнических сооружений / Под ред. В. М. Лятхера и Ю. С. Яковлева.– М.: Энергия, 1976.– 392 с.