ISSN 1561-9087 *Прикладна гідромеханіка. 1999. Том 1(73), N 2. С. 53 – 63*

УДК 530.162,532.1

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

П. П. Й. М. СХРАМ[*], **И. П. ЯКИМЕНКО**[**]

[*] *Эйндховенский технологический университет, Нидерланды*
[**] *Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев*

Получено 15.12.97

Получено общее аналитическое решение проблемы временных корреляций теории броуновского движения в суспензиях при учете сжимаемости жидкости и гармонического потенциала. С помощью этого решения сформулированы критерии для реализации режима диффузии на больших временах и выполнен последовательный переход к равновесному значению среднего квадрата скорости на малых временах. Найдены полные асимптотические разложения для корреляционных функций скорости и среднеквадратичных смещений броуновской частицы, описывающие так называемые устойчивые корреляции в сжимаемой вязкой жидкости.

Отримано загальне аналітичне рішення проблеми часових кореляцій теорії броунівського руху в суспензіях при врахуванні стисливості рідини та гармонійного потенціалу. За допомогою цього рішення сформульовано критерії для реалізації режиму дифузії на великих часах та виконано послідовний перехід до рівноважного значення середнього квадрату швидкості на малих часах. Знайдено повні асимптотичні розклади для кореляційних функцій швидкості та середньоквадратичних зміщень броунівської частинки, що описують так звані стійкі кореляції у стисливій вязкій рідині.

The general analytic solution of the problem of time correlations in the theory of Brownian motion is obtained taking into account the compressibility of fluid and the presence of the harmonic potential. With the help of this solution the criterions for the realisation of the diffusion regime on a large time scale have been formulated and the consistent limit procedure on a small time scale has been performed to approach the equilibrium value of the mean square velocity. The full asymptotic expansions have been found for the velocity autocorrelation functions and the mean square displacements of a Brownian particle which describe the so-called persistent correlations in a compressible viscous fluid.

ВВЕДЕНИЕ

Броуновское движение в суспензиях является предметом интенсивных исследований на протяжении почти всего 20-го столетия. Уместно считать, что новейшая история этих исследований началась на рубеже 60 – 70-х годов, когда были открыты знаменитые “хвосты” корреляционных функций скоростей броуновских частиц (так называемые устойчивые или долгоживущие корреляции). Сначала это было сделано методами компьютерного моделирования [1, 2], а в дальнейшем получило теоретическое [3 – 18] и экспериментальное [19 – 21] подтверждение. Это открытие разрушило привычные представления о том, что микроскопические и макроскопические процессы в жидкостях характеризуются хорошо разнесенными временными масштабами.

Уже в первых теоретических исследованиях (их достаточно полный обзор содержится в [18]) было показано, что для адекватного описания устойчивых корреляций в общепринятую схему ланжевеновского подхода к теории броуновского движения требовалось внести изменения принципиального характера. А именно, вместо δ-коррелированных источников классической теории были введены источники, корреляционные функции которых выражались через соответствующие функции отклика с помощью флуктуационно-диссипативных соотношений. Это была идея построения обобщенного уравнения Ланжевена, которая стала определяющей для всего последующего развития теории. Следует отметить, что фактически эта идея была выдвинута уже в работе [22] и лишь неправомерное использование теоремы Факсена в ее оригинальной формулировке [23] не позволило довести программу до конца.

Первые успешные попытки вывода обобщенных уравнений Ланжевена, исходя из принципов общей теории флуктуаций [24, 25], были выполнены в начале 70-х годов [11, 26 – 28]. Дальнейшее развитие теории шло по пути усложнения рассматриваемых моделей жидкости и (или) броуновских частиц за счет таких факторов как сжимаемость жидкости [29, 30], вращательное движение частиц [31 – 33], температурные эффекты [34 – 35], проницаемость частиц в моделях полимера [36] или капли [37], нелинейность [38, 39], гидродинамические взаимодействия [40], диполярность частиц [41], сложные потоки [42 – 45], турбулентность [46], двумерность системы [47, 48], пристеночные эффекты [49]. Следует отметить, что большинство упомянутых исследований было выполнено при существенном использовании метода индуцированных сил, который был предложен около 25 лет тому назад [50], но и сегодня находит применение при решении таких трудных проблем как, например, диффузия в однородном потоке [51] или вращательное броуновское движение несферических частиц [52].

В результате использования обобщенных уравнений Ланжевена для расчета корреляционных функций скоростей и пространственных смещений броуновских частиц было обнаружено немало факторов, которые могут радикально влиять на результаты теории, вплоть до нарушения общеизвестных представлений о статистических закономерностях броуновского движения. К их числу принадлежит, в частности, учет (или, наоборот, неучет) сжимаемости жидкости и воздействия на частицы суспензии гармонических сил. Так, в работах [16, 29] было показано, что лишь при учете сжимаемости жидкости удается разрешить известный парадокс теории флуктуаций в суспензиях броуновских частиц, который заключается в стремлении корреляционной функции скоростей при $t\to 0$ к k_BT/M, $M=m+m_0/2$ вместо физически корректной асимптотики k_BT/m, где m и m_0 – массы броуновской частицы и вытесненной ею жидкости, соответственно (T – температура жидкости и k_B – постоянная Больцмана). В то же время, при наличии потенциала среднеквадратическое смещение при $t\to\infty$ должно выходить на некоторое не зависящее ни от сжимаемости жидкости, ни от эффектов запаздывания стационарное значение вместо хорошо известного из классической теории [53] диффузионного режима. Существует, следовательно, и промежуточная область, в которой сказывается влияние как сжимаемости, так и потенциала.

Чтобы описать все эти явления в рамках единой теории, необходимо обобщить рассмотрение, выполненное в работе [45], на случай сжимаемой жидкости, что мы и делаем в настоящей работе. В разделе 1 воспроизводятся стохастические уравнения движения броуновских частиц и отвечающее им обобщенное уравнение Ланжевена для сжимаемой жидкости, полученное с помощью соответствующей теоремы Факсена. В разделе 2 записываются общие выражения для корреляционных функций скоростей и среднеквадратических смещений броуновской частицы, представленные в форме обратных преобразований Лапласа от заданных функций. Приводятся упрощенные выражения для этих функций, пригодные для анализа корреляций на больших и малых временах. Формулируется ряд утверждений математического характера, позволяющих значительно облегчить выполнение этого анализа. С помощью этих утверждений в разделе 3 прослеживается временная эволюция корреляций броуновских частиц в сжимаемой плазме с гармоническим потенциалом от времен, близких к нулю, до бесконечно больших времен, включая и область диффузионного режима, если она существует (условия существования устанавливаются также в этом разделе).

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ БРОУНОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим сферическую броуновскую частицу массой m и радиусом a, которая находится в сжимаемой жидкости с вязкостью η, объемной (второй) вязкостью η_v и равновесной плотностью ρ_e. Пусть $\boldsymbol{u}(t)$ и $\boldsymbol{r}(t)$ – скорость поступательного движения частицы и радиус-вектор ее центра. При учете лишь силы торможения частицы жидкостью ("драга") $\boldsymbol{K}(t)$ и гармонической силы $\boldsymbol{K}_H(t)$ эти величины удовлетворяют уравнениям движения

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{u}(t), \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}m\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}(t)+\boldsymbol{K}_H(t), \tag{2}$$

или в терминах Фурье-амплитуд ($\boldsymbol{f}(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}(t)\times$ $\times e^{i\omega t}dt$)

$$-i\omega\boldsymbol{r}(\omega)=\boldsymbol{u}(\omega), \tag{3}$$

$$-i\omega m\boldsymbol{u}(\omega)=\boldsymbol{K}(\omega)+\boldsymbol{K}_H(\omega), \tag{4}$$

Для конструктивного использования этих уравнений необходимо, конечно, иметь выражения для сил, которые фигурируют в правой части (4). Гармоническую силу мы запишем в обычном виде

$$\boldsymbol{K}_H(\omega)=-K\boldsymbol{r}(\omega), \tag{5}$$

где K – константа. Что же касается силы торможения жидкостью $\boldsymbol{K}(\omega)$, то в случае вязкой жидкости можно воспользоваться известными результатами гидродинамики с малыми числами Рейнольдса, изложенными в форме обобщенных теорем Факсена. Согласно такой теореме для сжимаемой жидкости [30]

$$\boldsymbol{K}(\omega)=-\zeta(\omega)\boldsymbol{u}(\omega)+\frac{12\pi\eta a(\alpha a)^2}{(i\omega a/c)^2A+2(\alpha a)^2B}\times$$
$$\times\left\{B\left[(1+\alpha a)\overline{\boldsymbol{v}}_0^s(\omega)+\frac{1}{3}(\alpha a)^2\overline{\boldsymbol{v}}_0^v(\omega)\right]+\right. \tag{6}$$
$$\left.+\frac{1}{9}\cdot\frac{i\omega}{\rho_e}\left[(i\omega a/c)^2A-(\alpha a)^2B\right]\overline{\boldsymbol{r}\rho}_0^v(\omega)\right\},$$

где $\zeta(\omega)$ – коэффициент трения для сферической частицы в сжимаемой жидкости [29, 30, 54, 55],

$$\zeta(\omega)=\frac{12\pi\eta a(\alpha a)^2}{(i\omega a/c)^2A+2(\alpha a)^2B}\times$$
$$\times\left[\left(1+\alpha a+\frac{1}{9}(\alpha a)^2\right)B-\frac{1}{9}(i\omega a/c)^2A\right]. \tag{7}$$

Величины A и B определяются соотношениями

$$A=1+\alpha a+\frac{1}{3}(\alpha a)^2, \tag{8}$$

$$B=1+i\omega a/c+\frac{1}{3}(i\omega a/c)^2, \tag{9}$$

где

$$\alpha=(-i\omega\rho_e/\eta)^{1/2},\qquad \mathbf{Re}\,\alpha>0, \tag{10}$$

$$c=\left[c_0^2-\frac{i\omega}{\rho_e}\left(\frac{4}{3}\eta+\eta_v\right)\right]^{1/2},\qquad \mathbf{Im}\,c>0, \tag{11}$$

c_0 – адиабатическая звуковая скорость.

Наконец, выражения типа $\overline{\boldsymbol{v}}_0^{s,v}$ означают усреднение соответствующих полевых величин по поверхности (s) и объему (v) броуновской частицы, причем нижние индексы (0) напоминают о том, что эти величины являются невозмущенными относительно наличия частиц. В качестве таких величин могут быть взяты, в частности, флуктуационные поля, которые существуют в жидкости до внесения броуновских частиц. Тогда уравнение (6) перепишется в виде

$$\boldsymbol{K}(\omega)=-\zeta(\omega)\boldsymbol{u}(\omega)+\boldsymbol{K}_R(\omega), \tag{12}$$

где $\boldsymbol{K}_R(\omega)$ – случайная сила, корреляционная функция которой может быть найдена, если известны корреляционные функции флуктуационных полей скорости и плотности невозмущенной (равновесной или неравновесной) жидкости. Последние в принципе могут быть рассчитаны в рамках теории флуктуаций в жидкости [25]. Таким способом можно показать, что в равновесном случае корреляционная функция для $\boldsymbol{K}_R(\omega)$ удовлетворяет флуктуационно-диссипативному соотношению

$$\langle\boldsymbol{K}_{R,i}(\omega)\boldsymbol{K}_{R,j}(\omega')\rangle=$$
$$=2k_BT\,\mathbf{Re}\,\zeta(\omega)\delta_{ij}2\pi\delta(\omega-\omega'). \tag{13}$$

Подстановка в уравнение (4) выражений для гармонической силы (5) с учетом (3) и силы торможения в виде (12) приводит к уравнению

$$-i\omega m\boldsymbol{u}(\omega)=-\left[\zeta(\omega)-\frac{K}{i\omega}\right]\boldsymbol{u}(\omega)+\boldsymbol{K}_R(\omega), \tag{14}$$

которое в комбинации с (7) представляет собой искомое обобщенное уравнение Ланжевена для скорости броуновской частицы в сжимаемой жидкости. Нетрудно убедиться в том, что при $c_0\to\infty$ (переход к приближению несжимаемой жидкости) это уравнение сводится к уравнению Стокса – Бассета – Бусинеска, дополненному гармонической и ланжевеновской силами [45, 56, 57].

Следует обратить внимание на то, что согласно (13) случайный процесс $\boldsymbol{K}_R(t)$ уже не является δ-коррелированным, как это постулируется в классической теории броуновского движения. Важные следствия, которые из этого вытекают (в частности, немарковский характер скорости броуновской частицы как случайного процесса) детально изучались в литературе [3 – 29].

2. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ СКОРОСТЕЙ И КООРДИНАТ БРОУНОВСКИХ ЧАСТИЦ

Как известно, для нахождения стационарных значений автокорреляционных функций скоростей и координат броуновских частиц можно воспользоваться непосредственно решениями обобщенного уравнения Ланжевена, записанного в терминах Фурье-преобразований, т. е. уравнения (14). Составляя соответствующие квадратичные формы и выполняя их статистическое усреднение с помощью (13), получим следующие корреляционные функции:

$$\Phi_{ij}(t)\equiv\langle u_i(0)u_j(t)\rangle=$$
$$=\delta_{ij}\frac{k_BT}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{Re}\,\zeta(\omega)e^{-i\omega t}d\omega}{|-i\omega m+\zeta(\omega)-K/(i\omega)|^2}\equiv \tag{15}$$
$$\equiv\delta_{ij}\Phi(t)$$

и

$$\Psi_{ij}(t)\equiv\langle r_i(0)r_j(t)\rangle=$$
$$=\delta_{ij}\frac{k_BT}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{Re}\,\zeta(\omega)e^{-i\omega t}d\omega}{\omega^2|-i\omega m+\zeta(\omega)-K/(i\omega)|^2}\equiv \tag{16}$$
$$\equiv\delta_{ij}\Psi(t).$$

Рассматриваемая нами система является диссипативной по определению, и поэтому выражения (15) и (16) можно трансформировать к виду, более удобному для конкретных расчетов, а именно:

$$\Phi(t)=\frac{k_BT}{2\pi}\int\limits_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}\frac{e^{-i\omega|t|}d\omega}{-i\omega m+\zeta(\omega)-K/(i\omega)} \tag{17}$$

и

$$\Psi(t)=\frac{k_BT}{2\pi}\int\limits_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}\frac{(e^{-i\omega|t|}+1)d\omega}{\omega^2[-i\omega m+\zeta(\omega)-K/(i\omega)]}, \tag{18}$$

где $\varepsilon\geq 0$, так что контур интегрирования лежит выше всех сингулярностей подынтегральных выражений в (17) и (18). Более того, с помощью замены $s=-i\omega$ выражения (17) и (18) сводятся к стандартным соотношениям теории преобразований Лапласа:

$$\Phi(t)=\frac{k_BT}{2\pi i}\int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\frac{se^{st}ds}{K+s\big(sm+\zeta(s)\big)} \tag{19}$$

и

$$\Psi(t)=\frac{k_BT}{2\pi i}\int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\frac{(e^{st}+1)ds}{s\big[K+s\big(sm+\zeta(s)\big)\big]}. \tag{20}$$

Используя уравнение (20), можно легко определить также среднеквадратичное смещение броуновской частицы в любом направлении, например:

$$\langle\Delta x^2(t)\rangle\equiv\langle[x(t)-x(0)]^2\rangle=$$

$$=\frac{k_BT}{\pi i}\int\limits_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}\frac{e^{st}ds}{s\big[K+s\big(sm+\zeta(s)\big)\big]}. \tag{21}$$

Приведенные выражения являются общими (для равновесной жидкости) и в принципе позволяют проследить за временной эволюцией корреляций скоростей и положений броуновских частиц на любых интервалах времени, начиная с времен, стремящихся к нулю, где решающую роль играет сжимаемость жидкости, и заканчивая большими временами, на которых доминирует гармонический потенциал. Соответствующие расчеты можно существенно упростить, используя наличие характерных параметров, свойственных рассматриваемой системе, которые позволяют разграничить области влияния различных эффектов и связанных с ними разных режимов поведения корреляций, таких как экспоненциальный распад, диффузия, долгоживущие (степенные) хвосты и др. Именно к таким параметрам относятся два характерных временных масштаба t_c и t_v, которые определяют времена прохождения расстояния, равного радиусу частицы, звуковой и поперечной волнами соответственно, т.е. [16, 25]

$$t_c=a/c_0 \tag{22}$$

и

$$t_v=a^2/\nu, \tag{23}$$

где $\nu=\eta/\rho_e$ – кинематическая вязкость жидкости. В случае сжимаемой жидкости к этим параметрам следует добавить еще один параметр, аналогичный (23), а именно:

$$t_v^{'}=a^2/\nu^{'}, \tag{24}$$

где $\nu^{'}=4\eta/3+\eta_v$. Жидкость принято называть “почти несжимаемой” [16], если упомянутые временные масштабы упорядочены так, что

$$t_v/t_c\ll 1,\qquad t_v^{'}/t_c\gg 1. \tag{25}$$

Наконец, укажем еще один параметр

$$\beta=Km/\zeta^2, \tag{26}$$

где $\zeta=6\pi\eta a$ – Стоксовский коэффициент трения. Как известно [45], этот параметр является определяющим для возможности реализации диффузионного режима в несжимаемой жидкости с потенциалом.

Рассмотрим теперь более детально величину c, переписав ее сначала в терминах параметров (22) – (24) как

$$c=-c_0[1+st_c(t_c/t_v^{'})]^{1/2}. \tag{27}$$

Мы видим, что в условиях существования временной иерархии (25) как в окрестности времени t_c, так и в окрестности времени t_v в принципе можно воспользоваться разложением этой величины в степенной ряд относительно безразмерной переменной $st_c(t_c/t_v^{'})$, что в конечном итоге позволяет получить изображения всех представляющих интерес корреляционных функций в виде отношений многочленов относительно $s^{1/2}$ или s, в зависимости от приближения, которое является приемлемым в том или ином временном интервале. При этом оказывается, что если интересоваться только ведущими по (t_c/t_v) и $(t_c/t_v^{'})$ вкладами в корреляционные функции, то в окрестности обеих упомянутых времен вместо c можно взять $(-c_0)$. Для получения таких вкладов на временном масштабе t_v удержим в (19) и (21) все члены по st_v и лишь ведущий член по st_c, что дает

$$\Phi(t) = \frac{k_B T}{2\pi i} \int\limits_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{s e^{st} ds}{R(s^{1/2})} \qquad (28)$$

и

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle = \frac{k_B T}{\pi i} \int\limits_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{e^{st} ds}{s R(s^{1/2})}, \qquad (29)$$

где $R(s^{1/2})$ – многочлен восьмой степени относительно $s^{1/2}$,

$$R(s^{1/2}) = K +$$
$$+ s\Big[\zeta(1+(st_v)^{1/2}) + M^* s - \frac{1}{2}\zeta(t_c/t_v)^2 \times \qquad (30)$$
$$\times\big[2(st_v)^{3/2} + \frac{5}{3}(st_v)^2 + \frac{2}{3}(st_v)^{5/2} + \frac{1}{9}(st_v)^3\big]\Big],$$

где введена виртуальная масса частицы

$$M^* = m + \frac{1}{2}m_0 - \frac{1}{2} z t_v^{1/2} (t_c/t_v)^2 \qquad (31)$$

и

$$z = 6\pi a^2 (\rho_e \eta)^{1/2} \equiv \zeta t_v^{1/2}. \qquad (32)$$

Обратим внимание на тот факт, что виртуальная масса (31) содержит дополнительный (по сравнению со случаем несжимаемой жидкости) вклад, частично отражающий влияние сжимаемости на динамику броуновских частиц. Другие проявления этого влияния связаны с эффектами памяти.

На масштабе t_c следует, наоборот, удержать лишь ведущие члены по st_v и члены всех порядков по st_c. К тому же при $\beta \ll 1$ (как правило, это отвечает условиям эксперимента [45]) в этой области времен можно, как нетрудно убедиться, полностью пренебречь ролью потенциала, т. е. положить $K=0$. В результате вместо выражений (28) и (29) получим

$$\Phi(t) = \frac{k_B T}{2\pi i} \int\limits_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{r_1(s)}{s r_2(s)} e^{st} ds \qquad (33)$$

и

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle = \frac{k_B T}{\pi i} \int\limits_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{r_1(s)}{s^3 r_2(s)} e^{st} ds, \qquad (34)$$

где

$$r_1(s) = 2(1 + st_c) + (st_c)^2 \qquad (35)$$

и

$$r_2(s) = 2M(1 + st_c) + m(st_c)^2. \qquad (36)$$

Наконец, имеется еще одна интересная область времен, требующая специального исследования, а именно область времен не просто малых, но близких к нулю в том смысле, что выполняется неравенство $0 \leq t \ll t_c$. Здесь для того, чтобы корректно выполнить принципиально важный переход $t \to 0$, следует взять, по меньшей мере, два первых члена разложения

$$\frac{1}{c} = -\frac{1}{c_0}\left\{\frac{1}{[st(t_c/t_v')]^{1/2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{[st(t_c/t_v')]^{3/2}} + \ldots\right\} \qquad (37)$$

и уже нельзя ограничиться учетом лишь ведущих по st_v слагаемых. В результате получим

$$\Phi(t) = \frac{k_B T}{2\pi i} \int\limits_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{R_1(s^{1/2})}{s R_2(s^{1/2})} e^{st} ds \qquad (38)$$

и

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle = \frac{k_B T}{\pi i} \int\limits_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{R_1(s^{1/2})}{s^3 R_2(s^{1/2})} e^{st} ds, \qquad (39)$$

где

$$R_1(s^{1/2}) = -1 + \big[2 + (t_v'/t_v)\big] \times$$
$$\times (t_c/t_v')^{3/2} (st_c)^{1/2} + (t_c/t_v')(st_c) \qquad (40)$$

и

$$R_2(s^{1/2}) = -m + \big[2M + (m + 2m_0)(t_v'/t_v)\big] \times$$
$$\times (t_c/t_v')^{3/2} (st_c)^{1/2} + m(t_c/t_v')(st_c). \qquad (41)$$

Мы видим, что во всех случаях изображения Лапласа функций, которые нас интересуют, имеют вид

$$F(s) = g(z)/f(z), \qquad (42)$$

где $g(z)$ и $f(z)$ – известные многочлены относительно $z=s$ или $z=s^{1/2}$. Тем самым проблема нахождения оригинала сводится к разложению (42) на элементарные дроби, что в принципе всегда можно выполнить стандартными методами [58]. Однако, опираясь на эти методы, можно сначала сформулировать некоторые утверждения общего характера, которые оказываются очень полезными при практическом использовании указанной процедуры. Например, в случае, когда среди корней многочлена $f(z)$ отсутствуют кратные корни, это утверждение формулируется следующим образом.

Пусть $f(z)$ – многочлен (действительный или комплексный) степени n относительно z,

$$f(z) \equiv a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \qquad (43)$$

и $(-z_k)$, $k=\overline{1,n}$ – его корни. Тогда функция $1/f(z)$ может быть представлена в виде

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(z+z_k)}, \qquad (44)$$

где

$$A_k = (-1)^{n-1} a_n^{-1} \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k_1=1 \\ (k_1 \neq k)}}^{n} (z_k - z_{k_1})}, \qquad (45)$$

причем коэффициенты A_k удовлетворяют таким соотношениям:

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^m A_k = \begin{cases} 0, & m < n-1, \\ (-1)^{n-1} a_n^{-1}, & m = n-1; \end{cases} \qquad (46)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{z_k^m} = a_0^{-1}(-1)^{m-1} C_{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots, \qquad (47)$$

где

$$\begin{aligned} C_0 &= 1, \\ C_1 &= -a_0^{-1} a_1, \\ C_2 &= -a_0^{-1}(C_1 a_1 + a_2), \\ C_3 &= -a_0^{-1}(C_2 a_1 + C_1 a_2 + a_3), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_k &= -a_0^{-1} \sum_{k_1=1}^{k} C_{k-k_1} a_{k_1}, \qquad k > 0. \end{aligned} \qquad (48)$$

Кроме того, следует иметь в виду еще такие общие соотношения:

$$\frac{a_{n-k}}{a_n} = S_k, \qquad k = \overline{1,n}, \qquad (49)$$

где S_k – элементарные симметрические функции, которые определяются [58] как суммы всех

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

произведений, каждое из которых содержит k множителей z_j с несовпадающими индексами.

Применение этих утверждений к выражениям (28) и (29), (33) и (34), (38) и (39) позволяет сразу переписать каждое из них в виде, который содержит лишь стандартные преобразования Лапласа. В качестве примера приведем результат такой трансформации для корреляционной функции (28):

$$\Phi(t) = k_B T \sum_{k=1}^{8} A_k \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \frac{s e^{st} ds}{s^{1/2} + z_k}, \qquad (50)$$

где величины A_k определяются формулой (45) при $n=8$, а коэффициенты a_k, которые фигурируют в соотношениях (45) – (50), вытекают из представления многочлена (30) в общем виде (43), что дает

$$\begin{aligned} &a_0 = K, \quad a_1 = 0, \\ &a_2 = \zeta, \quad a_3 = z, \quad a_4 = M^*, \\ &a_5 = -z t_v (t_c/t_v)^2, \quad a_6 = -\frac{5}{6} z t_v^{3/2} (t_c/t_v)^2, \\ &a_7 = -\frac{1}{3} z t_v^2 (t_c/t_v)^2, \quad a_8 = -\frac{1}{18} z t_v^{5/2} (t_c/t_v)^2. \end{aligned} \qquad (51)$$

3. ВРЕМЕННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ КОРРЕЛЯЦИЙ В РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ

Для того, чтобы найти выражения, описывающие временную эволюцию корреляционных функций скоростей и среднеквадратических смещений броуновских частиц, необходимо сначала найти оригиналы выражений типа (50) с помощью таблиц обратных преобразований Лапласа [59], а затем воспользоваться приведенными в предыдущем разделе общими утверждениями относительно коэффициентов A_k, в частности, формулами (46) и (47). Таким способом, отправляясь от уравнения (50) и аналогичного соотношения для $\langle \Delta x^2(t) \rangle$, получим следующие выражения:

$$\Phi(t) = k_B T \sum_{k=1}^{8} (-z_k^3) A_k \exp(z_k^2 t) \operatorname{erfc}(z_k t^{1/2}) \qquad (52)$$

и

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle = 2 k_B T \left\{ \frac{1}{K} - \sum_{k=1}^{8} \frac{A_k}{z_k} \times \right. \\ \left. \times \exp(z_k^2 t) \operatorname{erfc}(z_k t^{1/2}) \right\}. \qquad (53)$$

Эти выражения описывают корреляции броуновских частиц на временах $t \geq t_v$. При $t \gg t_v$, когда $|z_k|^2 t \gg 1$, можно воспользоваться асимптотическими разложениями интеграла вероятностей [60]:

$$\exp(z_k^2 t) \operatorname{erfc}(z_k t^{1/2}) \sim \\ \sim (\pi z_k^2 t)^{-1/2} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2 z_k^2 t)^m} \right\}. \qquad (54)$$

Подстановка (54) в (52) и (53) с учетом общих соотношений (46) и (47) приводит к выражениям

$$\Phi(t) = \frac{k_B T}{K\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^{8} (-1)^{m+1} \frac{(2m+1)!!}{2^{m+1}} \times \\ \times C_{2m-1} t^{-m-3/2} \qquad (55)$$

и

$$\langle \Delta x^2(t)\rangle = 2k_BT\left\{\frac{1}{K}+\frac{1}{K\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{8}(-1)^m\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(2m-1)!!}{2^m}C_{2m+1}t^{-m-1/2}.\right. \qquad (56)$$

Перепишем эти (еще довольно общие) выражения, принимая во внимание явный вид коэффициентов C_k, рассчитанных согласно (48) при определении величин a_k с помощью (51), что дает

$$\Phi(t) = \frac{k_BTz}{\sqrt{\pi}K^2}\left\{\frac{15}{8}t^{-7/2}+\right.$$
$$\left.+\frac{105}{16}\frac{\zeta}{K}\left(2+\frac{Kz^2}{\zeta^3}(t_c/t_v)^2\right)t^{-9/2}+\ldots\right\} \qquad (57)$$

и

$$\langle \Delta x^2(t)\rangle = \frac{2k_BT}{K}\left\{1+\frac{z}{2\sqrt{\pi}K}\left[t^{-3/2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{3}{2}\frac{\zeta}{K}\left(2+\frac{Kz^2}{\zeta^3}(t_c/t_v)^2\right)t^{-5/2}+\ldots\right]\right\} \qquad (58)$$

Следует отметить, что наличие сжимаемости жидкости не влияет, как это видно из выражения (58), на естественный вывод относительно того [45], что при $t\to\infty$ эффекты памяти и виртуальной массы не приводят к каким-либо изменениям известного выражения для среднеквадратического смещения броуновской частицы, полученного в приближении Стокса [61]. Более того, в системе с потенциалом вкладом сжимаемости в долгоживущие хвосты корреляционных функций (57) и (58), можно вообще пренебречь, поскольку этот вклад пропорционален не только квадрату отношения (t_c/t_v), но еще и новому параметру

$$\gamma = Kz^2/\zeta^3, \qquad (59)$$

который также обычно является малым (по крайней мере, при условии $\beta\ll 1$).

Рассмотрим теперь предельный переход к случаю отсутствия потенциала и связанный с ним вопрос о возможности существования диффузионного режима. Конечно, осуществить этот переход непосредственно в асимптотических формулах (57) и (58) невозможно, поскольку при $K\to 0$ нарушаются уже исходные условия справедливости асимптотических разложений, а именно, два из корней z_k, скажем, z_p и z_q, вступают в противоречие с общим требованием $|z_k|^2t\gg 1$, так как при $K\to 0$ они должны стремиться к нулю на любых временах. Следовательно, мы можем поставить вопрос о существовании такого временного интервала, на котором $|z_k|^2t\gg 1$ при $k\neq p,q$, но $|z_{p,q}|^2t\ll 1$.

Для практического выполнения перехода $K\to 0$ выделим в суммах, фигурирующих в правых частях соотношений (52) и (53), члены с $k=p,q$ и применим к ним разложения в ряды [60]:

$$\exp(z_{p,q}^2t)\,\mathrm{erfc}\,(z_{p,q}t^{1/2}) =$$
$$= 1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}z_{p,q}t^{1/2}+z_{p,q}^2t-\ldots \qquad (60)$$

Остальные шесть членов сохраним в общем виде, но учтем, что при $z_{p,q}\to 0$ и $K\to 0$ согласно (45) будет

$$A_k = \frac{A_k'}{z_k^2}, \qquad k\neq p,q, \qquad (61)$$

где A_k' определяются соотношениями (45) – (47) при $n=6$ с новыми коэффициентами a_k', связанными простым образом с прежними коэффициентами a_k как

$$a_k' = a_{k+2}, \qquad k=\overline{1,6}. \qquad (62)$$

Подставляя выражения (60) и (61) в (52) и (53), и используя затем (46) – (49) при $n=6$ и замене a_k на a_k', придем к следующим окончательным результатам:

$$\Phi(t) = k_BT\sum_{k=1}^{6}(-z_k)A_k'\exp(z_k^2t)\,\mathrm{erfc}\,(z_kt^{1/2}) \qquad (63)$$

и

$$\langle \Delta x^2(t)\rangle = 2D\times$$
$$\times\left[t-\frac{2}{\sqrt{\pi}}t_v^{1/2}t^{1/2}+\frac{z^2-\zeta M^*}{\zeta^2}-\right.$$
$$\left.-\zeta\sum_{k=1}^{6}\frac{A_k'}{z_k^3}\exp(z_k^2t)\,\mathrm{erfc}\,(z_kt^{1/2})\right], \qquad (64)$$

где использовано соотношение Эйнштейна [53]

$$D = k_BT/\zeta. \qquad (65)$$

Теперь можно легко найти асимптотические разложения (63) и (64) с помощью той же процедуры, которая уже привела к разложениям (57) и (58). В результате получим

$$\Phi(t) = \frac{D}{2\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(2m-1)!!}{2^m}\times$$
$$\times C_{2m-1}'t^{-m-1/2} \qquad (66)$$

и

$$\langle \Delta x^2(t)\rangle = 2D\times \\ \times\left[t-\frac{2}{\sqrt{\pi}}t_v^{1/2}t^{1/2}+\frac{z^2-\zeta M^*}{\zeta^2}+ \right. \\ \left. +\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(2m-1)!!}{2^m}C'_{2m+3}t^{-m-1/2}\right], \qquad (67)$$

где коэффициенты C'_k определяются общей формулой (48) при замене a_k на a'_k. В результате подсчета нескольких первых коэффициентов и подстановки их в (66) и (67) придем к следующим выражениям:

$$\Phi(t)=\frac{D}{2\sqrt{\pi}}\left\{t_v^{1/2}t^{-3/2}- \right. \\ -\frac{1}{6}\left(7-\frac{4\rho_P}{\rho_e}\right)t_v^{3/2}t^{-5/2}+\frac{5}{6}\left(1-\frac{\rho_P}{\rho_e}\right)\times \\ \left.\times\left[\frac{2}{3}\left(4-\frac{\rho_P}{\rho_e}\right)+(t_c/t_v)^2\right]t_v^{5/2}t^{-7/2}-\ldots\right\} \qquad (68)$$

и

$$\langle \Delta x^2(t)\rangle = 2D\left\{t-\frac{2}{\sqrt{\pi}}t_v^{1/2}t^{1/2}+ \right. \\ +\left[\frac{2}{9}\left(4-\frac{\rho_P}{\rho_e}\right)+\frac{1}{2}(t_c/t_v)^2\right]t_v- \\ -\frac{1}{9\sqrt{\pi}}\left(7-\frac{4\rho_P}{\rho_e}\right)t_v^{3/2}t^{-1/2}+ \\ +\frac{1}{9\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{\rho_P}{\rho_e}\right)\times \\ \left.\times\left[\frac{2}{3}\left(4-\frac{\rho_P}{\rho_e}\right)+(t_c/t_v)^2\right]t_v^{5/2}t^{-3/2}-\ldots\right\}, \qquad (69)$$

где ρ_P – объемная плотность броуновской частицы.

Формулы (68) и (69) описывают не что иное, как диффузионный режим корреляции в сжимаемой жидкости. Обратим внимание на тот факт, что вклад сжимаемости жидкости в корреляционную функцию скоростей (68) начинается лишь с членов порядка $t^{-7/2}$ в противоположность тому, что в корреляционных функциях случайных источников в уравнении Ланжевена такой вклад имеется, как известно [29], уже в членах порядка $t^{-5/2}$. Причину этого нетрудно понять, заметив, что в общем асимптотическом разложении (66) член порядка $t^{-5/2}$ определяется коэффициентом C'_3. Согласно (48), этот коэффициент можно записать как

$$C'_3=-{a'_0}^{-1}(-{a'_0}^{-2}{a'_1}^{-3}-2{a'_0}^{-1}a'_1a'_2+a'_3). \qquad (70)$$

Сжимаемость входит в это выражение через коэффициенты

$$a'_2=M^*, \qquad a'_3=-\zeta t_v^{3/2}(t_c/t_v)^2, \qquad (71)$$

которые отвечают эффектам виртуальной массы и памяти (запаздывания) соответственно. Оказывается, что интерференция этих эффектов деструктивна в том смысле, что их суммарный вклад в уравнение (70) равен нулю, благодаря чему член порядка $t^{-5/2}$ остается неизменным по отношению к случаю несжимаемой жидкости. Отметим также, что в соответствии с формулой (68) сжимаемость влияет на член порядка $t^{-7/2}$ всегда, за исключением вырожденного случая $\rho_P=\rho_e$, когда этот член равен нулю тождественно в любой жидкости [21].

Остается обсудить условия существования диффузионного режима, что в контексте нашего рассмотрения эквивалентно выяснению вопроса об условиях, выполнение которых обеспечивает переход от формул (52) и (53) к формулам (63) и (64). Это можно сделать с помощью общих соотношений (49), переписывая элементарные симметрические функции S_k, $k=\overline{1,8}$ в виде

$$S_k=S'_k+\Delta S_k, \qquad k=\overline{1,6}, \\ S_7=S'_6x_1+S'_5x_2, \\ S_8=S'_6x_2, \qquad (72)$$

где $x_1=z_p+z_q$, $x_2=z_pz_q$. Ясно, что в диффузионном режиме должно быть

$$\Delta S_k \ll S_kS'_k, \qquad k=\overline{1,6}, \qquad (73)$$

а это в комбинации с последними двумя соотношениями из (72) и при учете (51) немедленно приводит к оценкам

$$x_1\approx K/\zeta, \qquad x_2\approx -zK/\zeta^2. \qquad (74)$$

В терминах этих величин неравенства (73) приобретают вид

$$(x_1S'_{k-1}+x_2S'_{k-2})\ll S'_k, \qquad k=\overline{1,6}, \qquad (75)$$

где $S'_{-1}=0$, $S'_0=1$, а S'_k, $k=\overline{1,6}$, выражаются через коэффициенты a'_k согласно (49) при $n=6$. Принимая во внимание явный вид этих коэффициентов, который определяется формулами (62) и (51), нетрудно убедиться, что для выполнения всех неравенств (75), а значит, и для возможности существования диффузионного режима, достаточно, чтобы выполнялись всего два условия:

$$\zeta^2\gg KM^* \qquad (76)$$

и

$$\zeta^3 \gg Kz^2, \tag{77}$$

а это равносильно утверждению о том, что величины (26) и (59) должны быть малы.

Отметим, что при $K \neq 0$ только что рассмотренный режим эволюции, строго говоря, не является диффузионным в обычном понимании уже хотя бы потому, что он существует (если существует вообще) лишь на протяжении более или менее ограниченного времени, а потом разрушается за счет воздействия потенциала. В связи с этим в литературе для обозначения этого режима часто используется термин "диффузионно-подобный режим".

В отличие от перехода $K \to 0$, переход к случаю несжимаемой жидкости не требует специального рассмотрения во всех случаях, включая и асимптотические разложения корреляционных функций скоростей и среднеквадратических смещений. Действительно, достаточно положить $(t_c/t_v)^2 = 0$ в формулах (57) и (58) или (68) и (69), чтобы убедиться в их полном согласии с известными результатами для несжимаемой жидкости [45, 17, 21, 63, 64]. Уместно отметить также, что полученные выше асимптотические разложения могут быть воспроизведены с помощью альтернативной техники, основанной непосредственно на применении известных теорем об асимптотических разложениях оригиналов изображения Лапласа (таких как теорема 41.1 из [65]).

Рассмотрим теперь некоторые аспекты описания корреляций в сжимаемой жидкости на малых временах. Основной интерес здесь вызывает временная эволюция корреляционной функции скоростей $\Phi(t)$ с выходом на ее корректное значение k_BT/m при $t = 0$. Для начала построим оригинал этой функции по изображению (33), используя при этом формулы (43) и (45) – (49) для представления $1/r_2(s)$ в виде (44), а затем табличными значениями обратных преобразований Лапласа. В результате получим

$$\Phi(t) = \frac{k_BT}{M}\left[1 - \frac{1}{2} m_0 t_c^2 \sum_{k=1}^{2} A_k z_k \exp(-z_k t)\right], \tag{78}$$

где A_k определяется из общих соотношений (45) – (47) с коэффициентами a_k, вытекающими из представления $r_2(s)$ в общем виде (43). При выводе (78) мы воспользовались одним из этих соотношений, которое задается формулой (47) при $m = 1$, а также возможностью упрощения $r_1(-z_k)$ к виду

$$r_1(-z_k) = \frac{m_0}{2M}(z_k t_c)^2. \tag{79}$$

В соотношении (78) нетрудно распознать хорошо известный результат, полученный ранее в работе [16]. Одним из его следствий является формально правильное значение для $\Phi(t)$ при $t \to 0$, равное k_BT/m (у нас это очевидно в силу нижнего из соотношений (46) с $n = 2$). И все же нельзя забывать, что получение этого вывода на основании использования формулы (78), отвечающей временам $t \geq t_c$, последовательно только в предельном случае невязкой сжимаемой жидкости. При учете вязкости эта цель может быть достигнута с помощью иной формулы, специально предназначенной для использования в области аномально малых времен, т. е. из формулы (38), дополненной соотношениями (40) и (41). Действуя по тем же рецептам, что и выше, мы немедленно получим оригинал соответствующего изображения Лапласа в виде

$$\begin{aligned}\Phi(t) = k_BT \sum_{k=1}^{2} A_k \times \\ \times \Big\{ b_0 z_k^{-1}\left[1 - \exp(z_k^2 t)\,\mathrm{erfc}\,(z_k t^{1/2})\right] + \\ + (b_1 - b_2 z_k)\exp(z_k^2 t)\,\mathrm{erfc}\,(z_k t^{1/2}) \Big\},\end{aligned} \tag{80}$$

где коэффициенты A_k и корни z_k связаны с многочленом (41), а b_k – с многочленом (40). Для интересующего нас перехода $t \to 0$ достаточно положить

$$\exp(z_k^2 t)\,\mathrm{erfc}\,(z_k t^{1/2}) \approx 1 \tag{81}$$

и снова воспользоваться формулой (46), чтобы получить

$$\lim_{t\to 0} \Phi(t) = k_BT \frac{b_2}{a_2}, \tag{82}$$

что после подстановки коэффициентов b_2 и a_2, вытекающих из (40) и (41), дает

$$\lim_{t\to 0} \Phi(t) = \frac{k_BT}{m}, \tag{83}$$

как и должно быть.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе в рамках ланжевеновского подхода к теории флуктуаций в жидкости рассчитаны корреляционные функции скоростей и среднеквадратичных смещений сферической броуновской частицы, движущейся в сжимаемой вязкой жидкости под воздействием гармонического потенциала. Сформулированы математические утверждения общего характера, с помощью которых получены асимптотические разложения, описывающие так называемые хвосты устойчивых временных корреляций в произвольном порядке по $t^{-n/2}$. Показано, что вследствие деструктивной интерференции эффектов памяти и виртуальной массы при учете сжимаемости эти разложения начинаются с членов порядка $t^{-7/2}$. Изучен режим диффузии на больших временах и найдены условия для возможности реализации такого режима в системе с потенциалом. В то же время, на противоположной шкале малых времен продемонстрирован непротиворечивый переход к известному выражению для одновременной корреляционной функции скорости, отвечающему закону о равнораспределении энергии по степеням свободы.

1. *Rahman A.* Correlations in the motion of atoms in liquid argon // Phys. Rev.– 1964.– **136**.– P. 405–411.
2. *Alder B. J., Wainwright T. E.* Velocity autocorrelations for hard spheres // Phys. Rev. Let.– 1967.– **18**.– P. 988–990.
3. *Alder B. J., Wainwright T. E.* Decay of the velocity autocorrelation functions // Phys. Rev.– 1970.– **A1**.– P. 18–21.
4. *Ernst M. H., Hauge E. H., Van Leeuwen J. M. J.* Asymptotic time behavior of correlation functions // Phys. Rev. Let.– 1970.– **25**.– P. 1254–1256.
5. *Dorfman J. R., Cohen E. G. D.* Velocity correlation functions in two and three dimensions // Phys. Rev. Let.– 1970.– **25**.– P. 1257–1260.
6. *Zwanzig R., Bixon M.* Hydrodynamic theory of the velocity correlation function // Phys. Rev.– 1970.– **A2**.– P. 2005–2012.
7. *Widom A.* Velocity fluctuations of a hard-core Brownian particle // Phys. Rev.– 1971.– **A3**.– P. 1394–1396.
8. *Case K. M.* Velocity fluctuations of a body in a fluid // Phys. Fluids.– 1971.– **14**.– P. 2091–2095.
9. *Ailawadi N., Berne B. J.* Cooperative phenomena and the decay of the angular momentum correlation function at long times // J. Chem. Phys.– 1971.– **54**.– P. 3569–3571.
10. *Mazo R. M.* Theory of Brownian motion. IV. A hydrodynamic model for the friction factor // J. Chem. Phys.– 1971.– **54**.– P. 3712–3713.
11. *Chow T. S., Hermans J. J.* Effect of inertia on the Brownian motion of rigid particles in a viscous fluid // J. Chem. Phys.– 1972.– **56**.– P. 3150–3154.
12. *Hynes J. T.* On hydrodynamic models for Brownian motion // J. Chem. Phys..– 1972.– **57**.– P. 5612–5613.
13. *Nelkin M.* Inertial effects in motion driven by hydrodynamic fluctuations // Phys. Fluids.– 1973.– **15**.– P. 1685–1690.
14. *Murphy T. J.* Note on the diffusion of Brownian particles in two dimensions // Phys. Letters.– 1974.– **48A**.– P. 409–410.
15. *Dufty J. W., McLennan J. A.* Persistent correlations in diffusion // Phys. Rev.– 1974.– **A9**.– P. 1266–1272.
16. *Zwanzig R., Bixon M.* Compressibility effects in the hydrodynamic theory of Brownian motion // J. Fluid Mech.– 1975.– **69**.– P. 21–25.
17. *Hinch E. J.* Application of the Langevin equation to fluid suspensions // J. Fluid. Mech.– 1975.– **72**.– P. 499–511.
18. *Pomeau Y., Resibois P.* Time dependent correlation functions and mode-mode coupling theories // Phys. Rep.– 1975.– **19**.– P. 63–139.
19. *Bouiller A., Boon J. P., Deguent P.* Photon Correlation Study of Brownian Motion // J. Physique.– 1978.– **39**.– P. 159–165.
20. *Fedele P. D., Kim Y. W.* Direct Measurement of the Velocity Autocorrelation Function for a Brownian Test Particle // Phys. Rev. Let.– 1980.– **44**.– P. 691–694.
21. *Paul G. L., Pusey P. N.* Observation of a long-time tail in Brownian motion // J. Phys. A: Math. Gen.– 1981.– **14**.– P. 3301–3327.
22. *Zwanzig R.* Hydrodynamic fluctuations and Stokes' law friction // J. Res. Nat. Bur. Stand.– 1964.– **B68**.– P. 143–145.
23. *Faxen H.* // Arkiv Mat. Astron. Fys.– 1924.– **18**.– P. 52.
24. *Green M. S.* Markoff random processes and the statistical mechanics of time-dependet phenomena. II. Irreversible processes in fluids // J. Chem. Phys.– 1954.– **22**.– P. 398–413.
25. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: Механика сплошных сред // М.– Гостехиздат.– 1954.– P. 458.
26. *Fox R. F., Uhlenbeck G. E.* Contributions to non-equilibrium thermodynamics. I. Theory of hydrodynamic fluctuations // Phys. Fluids.– 1970.– **13**.– P. 1893–1902.
27. *Hauge E. H., Martin-Lof A.* Fluctuating hydrodynamics and Brownian motion // J. Stat. Phys.– 1973.– **7**.– P. 259–281.
28. *Bedeaux D., Mazur P.* Brownian motion and fluctuating hydrodynamics // Physica.– 1974.– **76**.– P. 247–258.
29. *Chow T. S., Hermans J. J.* Brownian motion of a spherical particle in a compressible fluid // Physica.– 1973.– **65**.– P. 156–162.
30. *Bedeaux D., Mazur P.* A generalization of Faxen's theorem to nonsteady motion of a sphere through a compressible fluid in arbitrary flow // Physica.– 1974.– **78**.– P. 505–515.
31. *Chow T. S.* Simultaneous translational and rotational Brownian movement of particles of arbitrary shape // Phys. Fluids.– 1973.– **16**.– P. 31–34.
32. *Hills B. P.* A generalized Langevin equation for the angular velocity of a spherical Brownian particle from fluctuating hydrodynamics // Physica.– 1975.– **80A**.– P. 360-368.
33. *Hills B. P., Deutch J. M.* Renormalization of the rotational diffusion coefficient in a fluctuating fluid // Physica.– 1976.– **83A**.– P. 401–410.
34. *Mazur P., Van der Zwan G.* Brownian motion in a fluid close to its' critical point // Physica.– 1978.– **92A**.– P. 483–500.
35. *Van der Zwan G., Mazur P.* Brownian motion in a fluid near its critical point. II: The fluctuation-dissipation theorem // Physica.– 1979.– **98A**.– P. 169–188.

36. *Jones R. B.* Fluctuation-dissipation theorem for the Brownian motion of a polymer in solution // Physica.– 1980.– **100A**.– P. 417–430.

37. *Kaneda Y.* Brownian motion of an almost spherical drop of viscous fluid and fluctuating hydrodynamics // Physica.– 1980.– **101A**.– P. 423–430.

38. *Hermans J. J.* Stochastic processes with nonlinear dissipation: Brownian motion in Oseen's approximation // Physica.– 1981.– 109A.– P. 293–304.

39. *Jones R. B.* Hydrodynamic fluctuation forces // Physica.– 1981.– **105A**.– P. 395–416.

40. *Mazur P.* On the motion and Brownian motion of n spheres in a viscous fluid // Physica.– 1982.– **110A**.– P. 128–146.

41. *Perez-Madrid A., Rubi J. M.* Friction, diffusion and Brownian motion in suspensions of dipolar spherical particles // Physica.– 1985.– **132A**.– P. 438–456.

42. *Rubi J. M., Bedeaux D.* Brownian motion in a fluid in elongational flow // J. Stat. Phys.– 1988.– **53**.– P. 125–135.

43. *San Miguel M., Sancho J. M.* Brownian motion in shear flow // Physica.– 1979.– **99A**.– P. 357–364.

44. *Van den Broek C., Sancho J. M., San Miguel M.* Harmonically bound Brownian motion in flowing fluids // Physica.– 1974.– **116A**.– P. 448–461.

45. *Clercx H. J. H., Schram P. P. J. M.* Brownian particles in shear flow and harmonic potentials: A study of long-time tailes // Phys. Rev.– 1992.– **A46**.– P. 1942–1950.

46. *Felderhof B. U., Ooms G.* Effect of inertia, friction and hydrodynamic interactions on turbulent diffusion // Eur. J. Mech., B / Fluids.– 1990.– **9**.– P. 349–368.

47. *Varley R. L., Zhou R.-L.* A generalized Faxen theorem for two-dimensional Brownian motion // Physica.– 1984.– **127A**.– P. 363–387.

48. *Cichocki B., Felderhof B. U.* Self-diffusion of interacting Brownian particles in a plane // J. Phys.: Condens. Matter.– 1994.– **6**.– P. 7287–7302.

49. *Jones R. B., Alavi F. N.* Rotational diffusion of a tracer colloid particle. IV. Brownian dynamics with wall effects // Physica.– 1992.– **A187**.– P. 436–455.

50. *Mazur P., Bedeaux D.* A generalization of Faxen's theorem to nonsteady motion of a sphere through an incompressible fluid in arbitrary flow // Physica.– 1974.– **76**.– P. 235–246.

51. *Miyazaki K., Bedeaux D.* Diffusion of a sphere in homogeneous flow // Physica.– 1995.– **A219**.– P. 39–55.

52. *Hernandez-Contreras M., Medina-Noyola M., Alarcon-Waess O.* Generalized Langevin equation for non-spherical colloidal particles // Physica.– 1996.– **A231**.– P. 62–72.

53. *Einstein A.* Uber die von der molecularkinetischen Theorie der Warme geforderie Bewegung von in ruhenden Flussigheiten suspendierten Teilchen // Ann. Phys. (Leipzig).– 1905.– **17**.– S. 549–560.

54. *Гитерман М. Ш., Герценштейн М. Е.* К теории Броуновского движения и возможности его использования для исследования критического состояния чистого вещества // ЖЭТФ.– 1966.– **50**.– С. 1084–1094.

55. *Burgess R. E.* Brownian motion and the equipartition theorem // Phys. Let.– 1973.– **A42**.– P. 395–396.

56. *Basset A. B.* A Treatise of Hydrodynamics. Vol. 2.– New York: Dover, 1961.– 328 p.

57. *Boussinesq J.* Traite Analytique de la Chaleur. Vol. 2.– Paris: Gauthier-Villeurs, 1903.– 224 p.

58. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике.– М.: Наука, 1977.– 831 с.

59. *Бейтмен Г. и Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина.– М.: Наука, 1969.– 343 с.

60. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям.– М.: Наука, 1979.– 830 с.

61. *Uhlenbeck G. E., Ornstein L. S.* On the Theory of the Brownian Motion // Phys. Rev.– 1930.– **36**.– P. 823–841.

62. *Wang M. C., Uhlenbeck G. E.* On the theory of the Brownian Motion. II // Rev. Mod. Phys.– 1945.– **17**.– C. 323–342..

63. *Weitz D. A., Pine D. J., Pusey P. N., Tough R. J. A.* Nondiffusive Brownian motion studied by diffusing-wave spectroscopy // Phys. Rev. Let.– 1989.– **63**.– C. 1747–1750.

64. *Felderhof B. U.* Motion of a sphere in a viscous incompressible fluid at low Reynolds number // Physica.– 1991.– **A175**.– C. 114–126.

65. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа.– М.: Наука, 1965.– 287 с.