ISSN 1561-9087 *Прикладна гiдромеханiка. 1999. Том 1 (73), N 2. С. 3 – 11*

УДК 532.526

ГРУППЫ ЛИ И АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ ПРАНДТЛЯ

А. А. АВРАМЕНКО

Институт технической теплофизики НАН Украины, Киев

Получено 15.10.98

Основываясь на теории групп Ли, получены автомодельные переменные, функции и дифференциальные уравнения, включая общее уравнение Блазиуса. Показано, что форма общего обыкновенного дифференциального уравнения определяется выбором параметрической переменной. Используя свойства симметрии, общее уравнение Блазиуса было редуцировано к уравнению первого порядка. Получено два новых автомодельных решения уравнений Прандтля. Показан способ трансформации однопараметрической алгебры Ли уравнений Прандтля, содержащей четыре подалгебры, к алгебре Прандтля с тремя подалгебрами, одна из которых является двухпараметрической.

Грунтуючись на теорiї груп Лi, були отриманi автомодельнi змiннi, функцiї i диференцiальнi рiвняння, включаючи загальне рiвняння Блазiуса. Показано, що форма загального звичайного диференцiального рiвняння визначається вибором параметричної змiнної. Використовуючи властивостi симетрiї, загальне рiвняння Блазiуса було редуцировано до рiвняння першого порядку. Було отримано два нових автомодельних рiшення рiвнянь Прандтля. Показано засiб трансформацiї однопараметричної алгебри Лi рiвнянь Прандтля, що мiстять чотири пiдалгебри, до алгебри Прандтля з трьомя пiдалгебрами, одна з яких є двопараметричною.

Basing on the Lie groups, various forms of automodelling variables, functions and differential equations have been obtained including the generalized Blasius equation. It has been shown that the form of the general ordinary differential equation is determined by the use of the parametric variable. Using the property of symmetry, the generalized Blasius equation has been redused to the first order. Two new automodelling solutions of the Prandtl equations have obtained. The way has been shown of ransforming the one-parameter Lie algebra of the Prandtl equations, consisting of four subalgebras, to the algebra with three subalgebras with one subalgebra one-parameter one.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих случаях исследования процессов гидродинамики пограничного слоя используются автомодельные представления уравнений Прандтля. В качестве примеров можно привести автомодельные решения Блазиуса для течения в пограничном слое около плоской пластины [1], решение Шлихтинга для течения в затопленной струе [1], решение для пристенной струи [2]. Однако при этом приходится угадывать вид автомодельных переменных и соответствующий вид искомых функций. В настоящей статье мы покажем как можно найти всевозможные формы автомодельных переменных и искомых функций, зная группы Ли, исследуемых уравнений.

Исследованию групповых свойств уравнений Прандтля пограничного слоя посвящено ряд работ. Впервые основная группа симметрии этих уравнений была получена в [3]. При этом давление рассматривалось как искомая функция. В работе [4] на основе данных [3] проведен анализ группового расслоения дифференциальных уравнений пограничного слоя. Групповое расслоение – это представление системы дифференциальных уравнений в виде объединения двух систем: автоморфной и разрешающей. Автоморфная система обладает тем свойством, что любое ее решение получается из одного решения с помощью преобразований из группы Ли, допускаемой основной системой уравнений. Разрешающая система не допускает никакого, кроме тождественного преобразования группы Ли, т.е. все преобразования из группы Ли являются для решений разрешающей системы тождественными преобразованиями. Далее в [4] показан процесс решения автоморфной и разрешающей систем. При этом разрешающая система представлена в переменных Крокко. Однако следует отметить, что по-прежнему обе системы остаются системами дифференциальных уравнений в частных производных. Переход же к автомодельным формам позволил бы получить обыкновенные дифференциальные уравнения, решение которых с помощью современных прикладных пакетов ("Mathcad ", "Maple" и др.) не представляет никаких трудностей.

В заключение краткого введения отметим, что в работах [4,5] приведены группы симметрии градиентного пограничного слоя при частных законах изменения давления в продольном направлении. В работах [6, 7] исследовались групповые свойства трехмерных пограничных слоев и пограничных слоев с моментными напряжениями.

ИФИНИТЕЗИМАЛЬНАЯ ОБРАЗУЮЩАЯ

Уравнения Прандтля имеют следующий вид:

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+V\frac{\partial u}{\partial Y}=\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},\qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0,$$

где u и v – компоненты скорости в направлениях x и y соответственно; $V=v/(\nu)^{0,5}$ и $Y=y/(\nu)^{0,5}$; ν – кинематическая вязкость. Масштабирование произведено для удобства дальнейших операций. Инфинитезимальная образующая групп Ли уравнений (1) приведена в работе [5], и имеет следующий вид:

$$q=(c_1+c_3Y)\partial_Y+(c_2+c_4x)\partial_x+(c_4-2c_3)u\partial_u-c_3V\partial_V.$$

Алгебра симметрий, таким образом, порождается полями

$$q_1=\partial_Y,$$
$$q_2=\partial_x,\qquad (2)$$
$$q_3=Y\partial_Y-2u\partial_u-V\partial_V,$$
$$q_4=x\partial_x+u\partial_u.$$

Теперь следует провести экспоненцирование указанных полей. Эта операция сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменной ε, которая в дальнейшем будет играть роль параметра преобразования групп Ли. Сами уравнения образуются следующим образом: их левая часть представляет собой производную от переменной частной производной каждого слагаемого вектора q (2) по ε, а правая - коэффициент при этой производной. Решение находится при условии, что искомая функция равна сама себе при $\varepsilon=0$. В качестве примера рассмотрим описанную операцию для вектора q_3. Система дифференциальных уравнений имеет вид

$$dY/d\varepsilon=Y,$$
$$du/d\varepsilon=-2u,$$
$$dV/d\varepsilon=-V,$$

а ее решения –

$$Y=Y\exp(\varepsilon),$$
$$u=u\exp(-2\varepsilon),$$
$$V=V\exp(-\varepsilon).$$

Теперь нам необходимо выделить "новый" независимый аргумент Y, который стоит в правой части первого соотношения, через "старый" (левая часть). В результате мы получим преобразование однопараметрической группы Ли, которая порождена вектором q_3:

$$Y\to Y\exp(-\varepsilon),$$
$$u\to u\exp(-2\varepsilon),$$
$$V\to V\exp(-\varepsilon).$$

Проделывая подобные операции с остальными векторами (2), получаем полный список групп Ли уравнений Прандтля. Этим группам (номер группы соответствует номеру вектора q) соответствуют следующие преобразования для образов точек (x,Y,u,V):

$$G_1:(x,Y-\varepsilon,u,V),$$
$$G_2:(x-\varepsilon,Y,u,V),$$
$$G_3:(x,Y\exp(-\varepsilon),u\exp(-2\varepsilon),V\exp(-\varepsilon)),$$
$$G_4:(x\exp(-\varepsilon),Y,u\exp(\varepsilon),V).$$

Таким образом, если $u=F(x,Y)$, $V=((x,Y)$ - решения уравнений Прандтля (1), то функции

$$u^{(1)}=F(x,Y-\varepsilon),$$
$$V^{(1)}=\Phi(x,Y-\varepsilon),$$

$$u^{(2)}=F(x-\varepsilon,Y),$$
$$V^{(2)}=\Phi(x-\varepsilon,Y),\qquad (3)$$

$$u^{(3)}=\exp(-2\varepsilon)F(x,Y\exp(-\varepsilon)),$$
$$V^{(3)}=\exp(-\varepsilon)\Phi(x,Y\exp(-\varepsilon)),$$

$$u^{(4)}=\exp(\varepsilon)F(x\exp(-\varepsilon),Y),$$
$$V^{(4)}=\Phi(x\exp(-\varepsilon),Y)$$

(здесь ε – произвольное число) тоже являются решениями уравнений Прандтля. В этом легко убедиться непосредственной подстановкой выражения (3) в (1). Следует отметить, что любые линейные комбинации векторных полей (2) также будут порождать группы симметрий уравнений (1). Однако существует такое понятие как оптимальная система инвариантных относительно s-параметрических групп решений системы диффренциальных уравнений, которая представляет собой набор решений $F(x_i)$. Эта система обладает тем свойством, что если $F^*(x_i)$ – любое другое решение, инвариантное относительно s-параметрической группы симметрии, то существует такая симметрия ситемы, которая отображает F^* в F из списка оптимальной системы. Для того, чтобы получить оптимальную систему решений, необходимо построить оптимальную систему векторных полей. С этой целью создается таблица так называемых присоединненых представлений. Присоединненое представление поля v относительно w определяется либо интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dw/d\varepsilon = adv\mid_w = [w, v], w(0) = w_0,$$

(здесь $[w, v]$ представляет собой коммутатор или скобку Ли) с решением

$$w(\varepsilon) = Ad(\exp(\varepsilon v))w_0,$$

либо суммированием рядов Ли:

$$Ad(\exp(\varepsilon v))w_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n/n!(adv)^n(w_0) =$$

$$= w_0 - \varepsilon[v, w_0] + \varepsilon^2/2[v, [v, w_0]] - \ldots$$

С помощью указанных операций строим таблицу присоединенных представлений для алгебры (2):

Ad	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	q_1	q_2	$q_3 - \varepsilon q_1$	q_4
q_2	q_1	q_2	q_3	$q_4 - \varepsilon q_2$
q_3	$q_1 \exp(\varepsilon)$	q_2	q_3	q_4
q_4	q_1	$q_2 \exp(\varepsilon)$	q_3	q_4

В данной таблице на (i, j)-ом месте указано $Ad(\exp(\varepsilon q_i))q_j$. В соответствии с рекомендациями [8] для отыскания оптимальной системы векторных полей поступаем следующим образом. Берем суммарное векторное поле

$$q_\Sigma = aq_1 + bq_2 + kq_3 + gq_4 \qquad (4)$$

и сначала предполагается, что $g \neq 0$. Растянув вектор (4), можно считать $g = 1$. Теперь будем воздействовать на вектор (4) преобразованиями из таблицы присоединенных представлений. Поочередное воздействие всеми преобразованиями показывает, что в данном случае вектор (4) упрощается до вида

$$q' = kq_3 + q_4.$$

На следующем шаге мы полагаем, что $g = 0$, а $k = 1$ в выражение (4) и повторяем процедуру воздействия присоединенными представлениями до максимального упрощения вектора (4). В результате имеем

$$q'' = bq_2 + q_3.$$

Продолжая дальнейшие исследования в том же ключе, находим оптимальну систему векторных полей:

$$q_1,$$

$$aq_1 + bq_2$$

$$bq_2 + kq_3,$$

$$kq_3 + gq_4.$$

Отсюда получаем оптимальную систему решений уравнений Прандтля (1):

$$u^{(1)} = F(x, Y - \varepsilon),$$

$$V^{(1)} = \Phi(x, Y - \varepsilon),$$

$$u^{(2)} = F(x - b\varepsilon, Y - a\varepsilon),$$

$$V^{(2)} = \Phi(x - b\varepsilon, Y - a\varepsilon), \qquad (5)$$

$$u^{(3)} = \exp(-2k\varepsilon)F(x - b\varepsilon, Y\exp(-k\varepsilon)),$$

$$V^{(3)} = \exp(-k\varepsilon)\Phi(x - b\varepsilon, Y\exp(-\varepsilon)),$$

$$u^{(4)} = \exp((g - 2k)\varepsilon)F(x\exp(-g\varepsilon), Y\exp(-k\varepsilon)),$$

$$V^{(4)} = \exp(-k\varepsilon)\Phi(x\exp(-g\varepsilon), Y\exp(-k\varepsilon)),$$

где a, b, k, g – произвольные постоянные. Теперь построим решение, порождаемое полным векторным полем (4). После промежуточных операций, описанных выше, имеем:

$$u^\Sigma = \exp((g - 2k)\varepsilon)F((b/g + x)\exp(-g\varepsilon)-$$

$$-b/g, (a/k + Y)\exp(-k\varepsilon) - a/k), \qquad (6)$$

$$V^\Sigma = \exp(-k\varepsilon)(((b/g + x)\exp(-g\varepsilon)-$$

$$-b/g, (a/k + Y)\exp(-k\varepsilon) - a/k).$$

Легко убедиться, что решения (5) и (6) действительно являются решениями уравнений Прандтля

(1). Векторные поля, которые порождают группы Ли, обладают тем замечательным свойством, что на их основе можно строить автомодельные переменные и, следовательно, приводить уравнения в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Рассмотрим, какие автомодельные переменные можно получить на основе полного векторного поля (4). Для этого перепишем его в следующем виде:

$$q_\Sigma = (a + kY)\partial_Y + (b + gx)\partial_x + \\ +(g - 2k)u\partial_u - kV\partial_V. \qquad (7)$$

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Автомодельные переменные определяется как инварианты векторного поля, т.е. как решения однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, порожденных полем (7). Для независимой автомодельной переменной имеем следующее уравнение:

$$(a + kY)\partial\eta/\partial Y + (b + gx)\partial\eta/\partial x = 0,$$

которое решаем, используя метод характеристик [9]. В результате имеем

$$\eta = C(a + kY)^g/(b + gx)^k,$$

где C – произвольная постоянная. При нахождении вида автомодельных искомых функций необходимо задаться параметрической переменной. Вначале выберем в качестве таковой x. Тогда определяющие уравнения для u и V имеют вид

$$(g - 2k)u\partial f'(\eta)/\partial u + (b + gx)\partial f'(\eta)/\partial x = 0,$$

$$-kV\partial\omega(\eta)/\partial V + (b + gx)\partial\omega(\eta)/\partial x = 0,$$

где штрих обозначает дифференцирование по η. В качестве искомой функции для u выбрана производная для удобства в дальнейших преобразованиях. Решение этих уравнений:

$$u = f'(\eta)(b + gx)^{1-2k/g}/m,$$

$$V = \omega(\eta)/(b + gx)^{k/g},$$

где m – произвольная константа. Используя уравнение неразрывности (1), найдем связь между $f'(\eta)$ и $\omega(\eta)$, которая выглядит следующим образом:

$$\omega(\eta) = C^{-1/g}[f'(\eta)\eta^{1/g} + \\ +(k - g)/(kg)\int\limits_0^\eta f'(\eta)\eta^{1/g-1}d\eta]/m.$$

Следовательно, выражение для нормальной компоненты скорости имеет вид

$$V = C^{-1/g}(b + gx)^{-k/g}[f'(\eta)\eta^{1/g} + \\ +(k - g)/(kg)\int\limits_0^\eta f'(\eta)\eta^{1/g-1}d\eta]/m.$$

Подставим u и V в первое уравнение (1). Тогда получим

$$(g - 2k)f'^2 + (k - g)f''\eta^{1-1/g}\int\limits_0^\eta f'\eta^{1/g-1}d\eta = \\ = m(kg)^2C^{2/g}\eta^{2-2/g}f''' + \\ +mk^2g(g - 1)C^{2/g}\eta^{1-1/g}f''. \qquad (8)$$

Это уравнение можно назвать обобщенным уравнением Блазиуса. Оно имеет интегро-дифференциальную форму. Однако его можно сделать чисто дифференциальным, если выделить интеграл, который стоит в левой части, и затем один раз продифференцировать. В результате получим дифференциальное уравнение четвертого порядка. В задачах пограничного слоя обычно принимается $g = 1$. В этом случае уравнение (8) существенно упрощается (здесь принимается, как обычно в задачах гидродинамического пограничного слоя, $f(0) = 0$):

$$(1 - 2k)f'^2 + (k - 1)f''f = m(kC)^2f'''.$$

Кроме того, также обычно принимается, что $a = b = 0$. Тогда объединив k и С в новую константу С*, перепишем предыдущее уравнение в следующей форме:

$$(1 - 2k)f'^2 + (k - 1)f''f = mC^{*2}f'''. \qquad (9)$$

Из уравнения (9) следуют всевозможные варианты исследованных ранее видов течения типа "пограничный слой". Если положить $k = 1/2$, $m = 1$, $C^* = 1$, то уравнение (9) превращается в уравнение Блазиуса, описывающее процессы течения в пограничном слое около лоской пластины и на границе раздела двух потоков [1]:

$$f''f + 2f''' = 0. \qquad (9a)$$

Если положить $C^* = (2)^{-0,5}$ при неизменных значениях оставшихся двух параметров, то коэффициент 2 в предыдущем уравнении исчезнет. При $k = 2/3$, $m = 3$ и $C^* = 1/3$ мы переходим к уравнению, которое описывает течение в плоской затопленной струе [1]:

$$f'^2 + f''f + f''' = 0.$$

Если при том же значении k принять $m = C^* = 1$, то получим уравнение

$$f'^2 + f''f + 3f''' = 0.$$

Это уравнение было использовано для описания той же струи в работе [2]. Уравнение (9) переходит в уравнение для плоской полуограниченной струи, если принять $k = 3/4$, $m = C^* = 1$ [2]:

$$2f'^2 + f''f + 4f''' = 0.$$

При $k = 1$ из уравнения (9) получаем

$$f'^2 + C^{*2}mf''' = 0. \qquad (10)$$

Это уравнение может быть проинтегрировано в конечном виде. Для этого последовательно сделаем две замены. С помощью первой замены $f' = \varphi$ понизим порядок уравнения (10) до второго, а с помощью второй $\varphi' = p(\varphi)$ ($\varphi'' = pp'$, где штрих означает дифференцирование по φ) – до первого:

$$pp' = -\varphi^3/(C^{*2}m).$$

Решение этого уравнения

$$p = d\varphi/d\eta = (C_1^* - 2\varphi^3/(3C^{*2}m))^{1/2},$$

откуда

$$d(i\eta/(6C^{*2}m)^{1/2}) = \int\limits_{\varphi}^{\infty}(4\varphi^3 - C_1)^{-1/2}d\varphi,$$

где i – комплексная единица. Обращение интеграла в последнем соотношении приводит к эллиптической функции Вейерштрасса. Таким образом, решение уравнения (10) можно представить в следующим виде:

$$f' = \varphi = -\vartheta(\eta/(6C^{*2}m)^{1/2} + C_2, h_2 = 0, h_3 = C_1),$$

где $\vartheta(\eta/(6C^{*2}m)^{1/2} + C_2, h_2 = 0, h_3 = C_1)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса, C_1 и C_2 – константы интегрирования, h_2 и h_3 – так называемые инварианты функции Вейерштрасса [10]. Выражая u и V через f', мы имеем

$$u = -\vartheta(\eta/(6C^{*2}m)^{1/2} + C_2, h_2 = 0, h_3 = C_1)/(mx),$$

$$V = -\vartheta(\eta/(6C^{*2}m)^{1/2} + C_2, h_2 = 0, h_3 =$$
$$= C_1)\eta/(C^*mx).$$

Следовательно, нами получено автомодельное решение уравнений Прандтля при $a = b = 0$, $g = k = 1$. Полученные решения согласуются с распределением скорости в следе за обтекаемым телом при турбулентном режиме течения. На основе этих профилей и индуктивной теории Г. Рейхардта [1] по экспериментальным данным можно получать информацию о турбулентной структуре потока.

Теперь покажем, как можно упростить уравнение (9), используя его группы симметрии. Сначала понизим порядок уравнения (9), используя следующую замену:

$$f' = p(f),$$
$$f'' = pp',$$
$$f''' = pp'^2 + p^2p'',$$

где штрих возле p обозначает дифференцирование по f. Подставляя приведенные соотношения в (9), получаем

$$(1 - 2k)p + (k - 1)p'f = mC^{*2}(pp'' + p'^2). \qquad (11)$$

Можно предположить, что группой симметрии данного уравнения является группа растяжений:

$$G : (f, p) \to (f\exp(\varepsilon), p\exp(n\varepsilon)). \qquad (12)$$

Для определения n подставим образы f и p в выражение (11). Из условия сокращения экспоненты, находим, что $n = 2$. Следовательно, инфинитезимальная образующая выглядит следующим образом:

$$q = f\partial_f + np\partial_p = f\partial_f + 2p\partial_p.$$

Зная инфинитезимальную образующую, можно редуцировать уравнение (11) несколькими способами. Рассмотрим их. Однако во всех случаях нам понадобятся инварианты нашей группы растяжений. Непосредственный инвариант группы (12) z определяется как решение однородного дифференциального уравнения в частных производных, составленного по инфинитезимальной образующей q:

$$f\partial_f z + 2p\partial_p z = 0.$$

Следовательно,

$$z = p/f^2.$$

В дальнейшем z будет играть роль одной из новых переменных. Для нахождения второй новой переменной w используется условие

$$q(w) = 1,$$

из которого находим

$$w = \ln f, f = \exp(w), dw/df = 1/f = \exp(-w).$$

Первый из способов, которые будут рассмотрены, заключается в том, что в качестве новой искомой функции выбирается z, а в качестве нового аргумента - w. Тогда уравнение (11) принимает вид

$$(k-1)z' - kz = mC^{*2}(zz'' + 4zz' + z'^2 + 2z^2),$$

где штрих около z означает дифференцирование по w. Полученное уравнение не содержит аргумента и, следовательно, его порядок может быть понижен с помощью замены $z' = t(z)$, $z'' = tt'$. Окончательно имеем

$$(k-1)t - kz = mC^{*2}(ztt' + 4zt + t^2 + 2z^2),$$

где штрих обозначает дифференцирование по z. Таким образом, нам удалось понизить порядок исходного уравнения Блазиуса (9) с третьего до первого. Второй способ упрощения уравнения (11) заключается в том, что, используя те же новые переменные, поменять их местами, т.е. в качестве функции выбрать w, а в качестве аргумента – z. В этом случае уравнение (11) трансформируется в выражение

$$(k-1-z)w' = mC^{*2}(7zw'^2 + 6z^2w'^3 - zw''),$$

где штрих около w означает дифференцирование по z. Данное уравнение не содержит функции. Используя замену $w' = s(z)$, получаем уравнение первого порядка

$$(k-1-z)s = mC^{*2}(7zs^2 + 6z^2s^3 - zs').$$

Следующий метод, который мы используем – это метод дифференциальных инвариантов. Суть его заключается в отыскании инвариантов продолжения нашего поля $q - pr^{(n)}q$, где порядок продолжения соответствует порядку исследуемого дифференциального оператора. В нашем случае $n = 2$. Таким образом, сначала определяется инварианты самого поля q, затем его первого продолжения и, наконец, второго. Найдем первое продолжение поля q. Оно определяется по формуле

$$pr^{(1)}q = q + \varphi^f \partial/\partial p_f = f\partial_f + 2p\partial_p + \varphi^f \partial/\partial p_f,$$

где коэффициент $\varphi^f = p' = p_f$ отыскивался по зависимости [4]. Окончательно имеем

$$pr^{(1)}q = f\partial_f + 2p\partial_p + p_f \partial/\partial p_f.$$

Инварианты первого продолжения определяются так же, как и самого поля. Они выглядят следующим образом:

$$z = p/f^2, r = p'/f.$$

Для нахождения инвариантов второго продолжения необязательно строить второе продолжение. Можно поступить иначе. Согласно работе [8], если z и r – дифференциальные инварианты n-порядка, то производная dr/dz является дифференциальным инвариантом группы G порядка $n+$ $+1$. Пользуясь этим правилом и выражениями для первых инвариантов z и w, находим инвариант второго порядка:

$$r' = \frac{dr}{dz} = \frac{dr/df}{dz/df} = \frac{(fp'' - p')f}{(fp' - 2p)}.$$

Выражая отсюда p'' и подставляя полученное соотношение в (11), находим

$$(1-2k)z + (k-1)r = mC^{*2}(zr'(r-2y) + zr + r^2).$$

Таким образом, применение трех различных методов позволило редуцировать уравнение Блазиуса третьего порядка к трем различным по форме уравнениям первого порядка, используя свойства симметрии исходного уравнения. Посмотрим, как изменится форма автомодельного уравнения, если изменить параметрическую переменную. Напомним, что в предыдущем случае в качестве параметрической переменной использовался x. Теперь в качестве таковой используем Y. Проведем исследование при условии, что $a = b = 0$, так как это практически не влияет на полученные результаты. Итак, если мы используем в качестве параметрической переменной Y, то наши искомые функции будут выглядеть так:

$$u = f'(\eta)Y^{g/k-2},$$

$$V = \omega(\eta)/Y.$$

Здесь для простоты принято, что $m = 1$. Используя уравнение неразрывности, находим выражение для V:

$$V = k\eta^{1/g}\int_0^\eta f''\eta^{1/k-1/g}d\eta/(YgC^{1/k}).$$

Подставим u и V в уравнение (1). Тогда имеем

$$-kf'f''\eta^{1+1/k}/C^{1/k} + k\eta^{1/g}\int_0^\eta f''\eta^{1/k-1/g}d\eta\times$$

$$\times[f''\eta + (g/k-2)f']/(gC^{1/k}) =$$
$$= f'''\eta^2 + f''[(g/k+g-3)\eta + (g/k-2)f''\eta] +$$
$$+(g/k-2)(g/k-3)f'. \qquad (13)$$

Это уравнение также имеет интегро-дифференциальную форму и также может быть преобразовано к дифференциальному уравнению четвертого порядка как и уравнение (8). Как можно легко видеть, уравнение (8) становится чисто дифференциальным при условии $k = g$. В этом случае мы имеем

$$-\eta^{1/g} f'^2/C^{1/k} = f'''\eta^2 + f''[(k-2)\eta - f''\eta] + 2f'.$$

Порядок этого уравнения может быть понижен до второго с помощью замены $f' = p(\eta)$. В случае $k = 1$ предыдущее уравнение упрощается до вида

$$-\eta f'^2/C = f'''\eta^2 - f''\eta[1 + f''] + 2f',$$

а при $k = 2$ до вида

$$-\eta^{1/2} f'^2/C^{1/2} = f'''\eta^2 - f''^2\eta + 2f'.$$

Последние два уравнения также можно свести к уравнениям второго порядка. Если же в уравнении (13) принять $1/k - 1/g = 1$, $k = 1/2$, $g = 1$, то мы приходим к классическому уравнению Блазиуса (9а). Рассмотрим, как изменится вид автомодельных уравнений, если возьмем для искомых функций различные параметрические переменные: "крест на крест". Сначала возьмем для u в качестве параметрической переменной Y, а для V - x, т.е.

$$u = f'(\eta) Y^{g/k-2},$$

$$V = \omega(\eta)/x^{k/g}.$$

Здесь принято, что $a = b = 0$ и $m = 1$, так как это не влияет на форму получаемых уравнений. Из уравнения неразрывности находим, что

$$V = kC^{1/g-1/k} \int\limits_0^\eta f''\eta 1/k - 1/g d\eta/(x^{k/g} g).$$

Домножая и деля последнее выражение на Y, получаем такое же выражение для V как и в предыдущем случае, т. е. как в случае, когда в качестве параметрической переменной использовался Y. Таким образом, вид автомодельного уравненеия будет иметь форму (13), т.е. не будет отличаться от предыдущего случая. Если поступить наоборот, т.е. в качестве параметрической переменной для u использовать x, а для V – Y, то мы придем к автомодельному уравнению в форме (8). Из рассмотренных примеров видно, что форма обыкновенного автомодельного уравнения определяется выбором параметрической переменной для функции u, а вид выражения для V, который получается из уравнения неразрывности, может быть скорректирован, используя саму автомодельную переменную. Перейдем к рассмотрению следующего случая. Положим в выражении суммарного вектора (7) $k = b = 0$. Тогда определяющий вектор инфинитезимальной образующей будет выглядеть следующим образом:

$$q = a\partial_Y + gx\partial_x + gu\partial_u = aq_1 + gq_4.$$

Отсюда находим, если в качестве параметрической перменной выбираем Y:

$$\eta = x\exp(-gY/a), u = f'(\eta)\eta^2 \exp(gY/a).$$

В выражении для u вместо $f'(\eta)$ используется $f'(\eta)\eta^2$ для удобства интегрирования уравнения неразрывности. Это интегрирование при условии $f(0) = 0$ дает

$$V = a/g(f'(\eta)\eta + f(\eta)).$$

Как видим, составляющая скорости V не зависит от параметрической переменной. Этого и следовало ожидать, так как она не входит в определяющий вектор. Подстановка соотношений для u и V в уравнение (1) приводит к выражению

$$\eta f'^2 - ff''\eta - ff' = (g/a)^2(f'''\eta^2 + 3f''\eta + f').$$

Если же в качестве параметрической координаты выбрать x, то выражение для u удобно записать в виде

$$u = f'(\eta)\eta x.$$

При этом вид второй составляющей скорости не изменится, как и форма автомодельного дифференциального уравнения. Т. е. в данном случае можно сделать вывод, что форма автомодельного уравнения не зависит от выбора параметрической переменной. Следующий случай: $a = g = 0$. Определяющий вектор выглядит следующим образом:

$$q = kY\partial_Y + b\partial_x - 2ku\partial_u - kV\partial_V = bq_2 + kq_3.$$

Автомодельная переменная в этом случае будет

$$\eta = Y\exp(-kx/b).$$

Вид же искомых функций определяется выбором параметрической переменной. Если в качестве таковой взять x, то

$$u = f'(\eta)\exp(-2kx/b),$$

$$V = (k/b)(f'(\eta)\eta + f(\eta))\exp(-kx/b).$$

Для параметрической переменной Y

$$u = f'(\eta)\eta/Y^2,$$

$$V = (k/b)(f'(\eta)\eta + f(\eta))/Y.$$

Как и в предыдущем случае, вид обыкновенного автомодельного дифференциального уравнения не зависит от выбора параметрической переменной и имеет вид

$$-2f'^2 + f''f = (b/k)f'''.$$

Это уравнение с точностью до постоянных коэффициентов совпадает с уравнением (9) и, следовательно, может быть редуцировано до уравнения первого порядка, используя способы, описанные выше. Последний случай, который мы рассмотрим – это случай, когда $k = g = 0$, т.е.

$$q = a\partial_Y + b\partial_x = aq_1 + bq_2.$$

Как видно, инфинитезимальная образующая не содержит искомых функций и, следовательно, эти функции не зависят от параметрических переменных. Автомодельные переменные имеют вид

$$\eta = bY - ax,$$

$$u = f'(\eta),$$

$$V = (a/b)(f'(\eta) - f'(0)).$$

С учетом приведенных соотношений из (1) получаем

$$-af''f'(0) = b^3 f'''.$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$f = C_1 b^6 \exp(-f'(0)a\eta/b^3)/(a^2 f'(0)^2) + C_2\eta + C_3,$$

где C_1, C_2, C_3 – константы интегрирования. Частный случай исследуемого уравнения имеет место при условии $f'(0) = 0$, которое часто выполняется в задачах гидродинамического пограничного слоя. Тогда

$$f''' = 0,$$

так что

$$f = C_1\eta^2/2 + C_3.$$

В данном случае константа интегрирования C_2, которая является коэффициентом около линейного члена η, должна быть равна нулю, чтобы выполнялось условие $f'(0)$. Таким образом, наше автомодельное решение при $f'(0) \neq 0$ выглядит так:

$$u = f' = C_1 b^3 \exp(-f'(0)a\eta/b^3)/(af'(0)) + C_2,$$

$$V = (a/b)(C_1 b^3 \exp(-f'(0)a\eta/b^3)/(af'(0)) + C_2 - f'(0)).$$

При $f'(0) = 0$ имеем

$$u = C_1\eta$$

$$V = (a/b)C_1\eta.$$

Если в экспонециальном распределении скорости положить a, $b \sim i$ (комплексная единица), мы получим решение в виде двумерной бегущей волны. Такое решение удобно использовать при исследовании ламинарно-турбулентного перехода. Данное решение напоминает классические волны перехода Толлмина-Шлихтинга, однако в отличии от них, носит двумерный характер [11]. Это позволяет изучать более сложные явления перехода.

Систематизированные полученные результаты сведены в таблицу.

В заключение покажем как можно заменить однопараметрическую алгебру Ли (2), состоящую из четырех подалгебр, на алгебру содержащую одну двухпараметрическую и две однопараметрические подалгебры. Для этого перепишем третье и четвертое преобразование (3) в общем виде:

$$u = \exp(-A\varepsilon)F(x\exp(-B\varepsilon), Y\exp(-D\varepsilon)),$$

$$V = \exp(-H\varepsilon)\Phi(x\exp(-B\varepsilon), Y\exp(-D\varepsilon)).$$

Чтобы найти связь между вновь введенными коэффициентами, подставим приведенные соотношения в уравнения (1). В результате имеем следующие условия:

$$A + B = H + D = 2D,$$

$$A + B = H + D.$$

Отсюда находим

$$H = D, B = 2D - A.$$

Таким образом, двухпараметрические выражения

$$u = \exp(-A\varepsilon)F(x\exp((2D - A)\varepsilon), Y\exp(-D\varepsilon)),$$

$$V = \exp(-D\varepsilon)\Phi(x\exp((2D - A)\varepsilon), Y\exp(-D\varepsilon))$$

являются решением уравнений Прандтля при произвольных A и D. Суммарный вектор при этом приобретает вид

$$q_\Sigma = (a + c(2D - A)x)\partial_x + g(b + DY)\partial_Y - Au\partial_u - DV\partial_V.$$

Он порождает следующее решение:

$$u = \exp(-A\varepsilon)F(((a + c(2D - A)x)\exp(-c(2D - A)\varepsilon) -$$

$$-a)/(c(2D - a)), ((b + DY)\exp(-gD\varepsilon) - b)/D),$$

$$V = \exp(-D\varepsilon)((((a + c(2D - A)x)\exp(-c(2D - A)\varepsilon) -$$

$$-a)/(c(2D - a)), ((b + DY)\exp(-gD\varepsilon) - b)/D).$$

Вектор	Автомодельная переменная η	Параметрическая переменная	u	V	Условия существования точного решения
q_Σ	$C\frac{(a+kY)^g}{(b+gx)^k}$	x	$f'(\eta)(b+ +gx)^{1-k/g}/m$	$\omega(\eta)/(b+ +gx)^{k/g}$	g=1: k=2/3, k=3/4, k=1
kq_3+gq_4	$C(kY)^g/(gx)^k$	x	$f'(\eta)(b+ +gx)^{1-k/g}$	$\omega(\eta)/(gx)^{k/g}$	g=1: k=2/3, k=3/4, k=1
тот же	та же	Y	$f'(\eta)Y^{g/k-2}$	$\omega(\eta)/Y$	
aq_1+gq_4	$\eta=x\exp(-gY/a)$	Y	$f^{2\prime}\eta\exp(gY/a)$	$a/g(f'\eta+f)$	
тот же	та же	x	$f'(\eta)\eta x$	та же	
bq_2+kq_3	$Y\exp(-kx/b)$	x	$f'(\eta)\exp(-2kx/b)$	$(k/b)(f'\eta+f)* *\exp(-kx/b)$	
тот же	та же	Y	$f'(\eta)\eta/Y^2$	$(k/b)(f'\eta+f)/Y$	
aq_1+bq_2	$\eta=bY-ax$		$f'(\eta)$	$(a/b)(f'(\eta)- -f'(0))$	для любых a,b

ВЫВОДЫ

Подводя итоги проведенных исследований, можно сделать следующие выводы:

1. На основе групп Ли уравнений Прандтля получены различные формы автомодельных переменных, искомых функций и дифференциальных уравнений, в том числе обобщенное уравнение Блазиуса.

2. Показано, что форма обыкновенного автомодельного дифференциального уравнения определяется выбором параметрической переменной.

3. Используя свойства симметрии, обобщенное уравнение Блазиуса редуцировано до первого порядка.

4. Получены два новых точных автомодельных решения уравнений Прандтля.

5. Показано как можно трансформировать однопараметрическую алгебру Ли уравнений Прандтля, состоящую из четырех подалгебр, в алгебру с тремя подалгебрами, одна из которых является двухпараметрической.

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1974.– 712 с.
2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1978.– 736 с.
3. *Павловский Ю.Н.* Исследования некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя // Журнал выч. математики и мат. физики.– 1961.– 1, N 2.– С. 280–294.
4. *Овсянников Л.В.* Групповое расслоение уравнений пограничного слоя // Динамика сплошной среды.– 1969.– Вып. 1.– С. 24–35.
5. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.– М.: Наука, 1978.– 400 с.
6. *Ланкерович М.Я.* Групповые свойства уравнений трехмерного пограничного слоя на произвольной поверхности // Динамика сплошной среды.– 1971.– Вып. 7.– С. 12–24.
7. *Нгуен В.Д.* Об уравнениях пограничного слоя жидкости с моментными напряжениями // Прикл. мат. и мех.– 1968.– 32, N 4.– С. 748–753.
8. *Олвер П.* Приложение групп Ли к исследованию дифференциальных уравнений.– М.: Мир, 1989.– 639 с.
9. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.– М.: Наука, 1966.– 260 с.
10. Справочник по специальным фунуциям/ Под редакцией М. Абрамовица и И. Стигана.– М.: Наука, 1979.– 832 с.
11. *Жигулев В.Н., Тумин А.М.* Возникновение турбулентности.– Новосибирск: Наука, 1987.– 282 с.