

УДК 532.9

ВОЛНОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ ОТ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТРУИ

И. Т. СЕЛЕЗОВ*, П. ХУК**, С. Г. ШПАКОВА*

* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

** Колледж морских исследований Робинсон Холл, Университет Делавэр, Ньюарк, США

Получено 20.05.98

Приведены постановка и решение новой задачи о волновых движениях жидкости при инъекции вертикальной осесимметричной струи в устойчивую стратифицированную жидкость, плотность которой линейно возрастает с глубиной. Течение в струе потенциальное, движение в стратифицированной жидкости описывается в приближении Буссинеска. Выведено и анализируется дисперсионное уравнение. Установлены условия существования волн и представлен анализ фазовых и групповых скоростей и волновых мод. Показано, что во внешней среде вдоль струи распространяются волновые возмущения, замеченные в экспериментах.

Приведено постановку та розв'язок нової задачі про хвильові рухи рідини при інжекції вертикального осесимметричного струменя в стійку стратифіковану рідину, густина якої лінійно збільшується з глибиною. Течія в струмені потенційна, рух в стратифікованій рідині описується в наближенні Бусинеска. Виведено і аналізується дисперсійне рівняння. Установлені умови існування хвиль та представлено аналіз фазових та групових швидкостей і хвильових мод. Показано, що в зовнішньому середовищі вздовж струменя поширюються збурення, які помітили в експериментах.

The statement and solution of a new problem are presented for fluid wave motions at the injection of vertical axisymmetric jet into a stable stratified fluid the density of which linearly increases with the depth. Flow in the jet is assumed to be potential, the motion of stratified fluid is described by Boussinesq's approximation. The dispersion equation is derived and analysed. The conditions of wave existence are found and the analysis of phase and group velocities and wave modes is presented. It is shown that in outer medium the wave disturbances propagate along the jet which have been observed in experiments.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема струйных течений имеет большое теоретическое и прикладное значение и была предметом многочисленных исследований.

Имеется много работ, посвященных различным аспектам анализа струй, таким как сверхзвуковые струи в газе, турбулентные струи, устойчивость струй, экспериментальные исследования. При этом значительное число работ посвящено плоским струям. Анализ этих работ выходит за рамки данной статьи.

Здесь мы ограничиваемся рассмотрением работ только для круглых струй в случаях ламинарного режима или потенциального течения в начальной стадии плавного направленного внедрения струи, когда струя ещё не успела расширяться и эволюционировать. Отмечаются также некоторые работы для струй при наличии поперечного (бокового) течения.

В большинстве теоретических работ приводятся некоторые автомодельные решения [1–6]. Например, в работе [1] получено автомодельное решение для случая больших радиальных неосесимметричных колебаний жидкой колонны-струи (плоская задача), так что граница области – неиз-

вестная функция, подлежащая определению. Жидкость предполагается невязкой несжимаемой.

Некоторые аналитические решения для круглых струй получены в [6–12]. В работе [9] развивается теория тонкой струи с поверхностным натяжением. Рассматривается потенциальное движение осесимметричной струи, ограниченной снаружи свободной поверхностью $r = R(x, t)$, давление снаружи принимается постоянным, учитывается поверхностное натяжение. Предполагается, что поверхность и течение изменяются очень плавно в осевом направлении, что характеризуется малым параметром ε – (отношение радиального и осевого масштабов). Потенциал φ и радиус R разлагаются в ряды по степеням ε^2 , в результате выводится дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, представляющее теорию тонких струй в терминах членов ведущего порядка. В работах [13, 14] исследуется развитие капиллярных волн в осесимметричной жидкой струе в нелинейной постановке. В [13] жидкость предполагается невязкой несжимаемой, течение потенциальным, влияние внешней среды на устойчивость струи не учитывается, что дает хорошее приближение для истечения вертикальной струи в атмосферу. Начальное осесимметричное возмущение поверхности предполагается заданным в виде сто-

ячей синусоидальной волны. Решения для отклонения поверхности струи η и потенциала φ разыскиваются в виде разложения по малому параметру амплитуды заданной стоячей волны η_0 . В статье [7] приведена постановка и получено численное решение задачи для ламинарной осесимметричной струи. Рассматривается вертикальная стационарная струя, внедряющаяся со средней осевой скоростью в другую жидкость. Обе жидкости предполагаются несжимаемыми, несмешивающимися, ньютоновыми. Построены и анализируются профили скоростей. Численный и экспериментальный анализ ламинарной круглой струи с учетом вязкости и поверхностного натяжения проведен в [10, 11]. В работе [11] исследуется задача инъекции круглой вертикальной струи в покоящуюся жидкость. Рассматривается случай, когда на поверхности струи заданы стоячие волны в начальном состоянии. Обе жидкости предполагаются вязкими (ньютоновыми) и несжимаемыми. Решается начально – краевая задача с привлечением точного аналитического решения в замкнутой форме, полученного для невязких жидкостей в работе [15], а также аналитического решения для вязких жидкостей, полученного в работе [16].

Развивающаяся структура ускоряющейся струи в боковом потоке исследовалась в [17]. В работе [8] анализируется поведение струи в боковом потоке на основе асимптотического метода. Жидкость предполагается несжимаемой невязкой, течение потенциальным. Компоненты скорости внешнего течения, нормального к оси струи, принимаются малыми по сравнению со скоростью струи, что позволяет ввести малый параметр. Построены асимптотические решения в дальней и ближней зоне.

Экспериментальные исследования [18] обнаруживают, что вблизи входного сечения на начальном участке инъекции струи, даже при наличии бокового течения, струя не отклоняется от вертикального положения и сохраняет устойчивую форму, т.е. начальный участок может рассматриваться как зона потенциального устойчивого течения. Однако вдоль струи на поверхности раздела могут распространяться волны.

Ранее в работе [19] также отмечалось, что в потенциальной зоне линии тока существенно параллельны направлению струи, и можно считать, что боковое течение не искривляет струю, т.е. имеет место стабильность начального участка. В дальнейшем струя расширяется и отклоняется сначала в ламинарном режиме, затем в турбулентном и, наконец, распадается и сносится течением. Вместе с тем, в работе [18] были замечены волновые

возмущения в окрестности струи.

В данной статье исследуется начальная стадия инъекции струи, которая полагается осесимметричной в соответствии с соображениями, приведенными выше.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается осесимметричная задача инъекции вертикальной струи диаметром D в устойчиво стратифицированную по плотности жидкость. Задача решается в линеаризованной постановке. Со струей связана цилиндрическая система координат r, θ, z с осью oz , направленной вниз. Область, занимаемая струей, будет

$$\Omega^j = \{r, \theta, z | r \in [0, D/2], \theta \in (0, 2\pi), z \in (-\infty, \infty)\}.$$

Внешняя среда занимает область

$$\Omega = \{r, \theta, z | r \in [D/2, \infty), \theta \in (0, 2\pi), z \in (-\infty, \infty)\}.$$

Жидкость в струе рассматривается невязкой несжимаемой, невозмущенная скорость U_0 – равномерно распределенной по поперечному сечению струи. Это позволяет ввести полный потенциал Φ по формуле

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi^j$$

и в силу линейности задачи представить полное поле в виде суперпозиции невозмущенной и возмущенной составляющих [4]:

$$\Phi^j(r, z, t) = U_0 z + \varphi^j(r, z, t),$$

$$\frac{\partial \Phi^j}{\partial z} = U_0 + v_z^j,$$

$$\frac{\partial \Phi^j}{\partial r} = \frac{\partial \varphi^j}{\partial r} = v_r^j.$$

Возмущенное движение описывается потенциалом φ^j , удовлетворяющим уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi^j}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в } \Omega^j \quad (1)$$

За исходные уравнения движения стратифицированной среды принимаем линейные уравнения гидродинамики несжимаемой невязкой жидкости в приближении Буссинеска [20], записанные в цилиндрической системе координат в области Ω :

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = N^2 w, \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = -\frac{\partial w}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z}, \quad (6)$$

где ρ и p - плотность и давление; w и v_r - компоненты скорости движения стратифицированной жидкости вдоль осей z и r соответственно; N - частота плавучести Брента-Вайсяля. После несложных преобразований система уравнений (2)-(6) может быть приведена к разрешающему уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + N^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] = 0. \quad (7)$$

Условия сопряжения на границе раздела жидкостей $r = 1/2$ имеют вид [21]

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial t \partial r} - U_0 \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_r}{\partial t} \right)_{r=1/2} = 0; \quad (8)$$

$$\rho_0^j \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \varphi^j}{\partial z} \right)_{r=1/2} = -p|_{r=1/2}, \quad (9)$$

где ρ_0^j - плотность жидкости в струе. Кроме того, задаем условия регулярности на оси и ограниченности функций на бесконечности:

$$\frac{\partial \varphi^j}{\partial r} = 0 \text{ при } r = 0, \quad v_r, w, p < \infty \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Следует отметить, что все величины, входящие в (1)-(10) и далее, безразмерные и вводятся по формулам (звездочки опускаются)

$$\begin{aligned} (r^*, z^*) &= \frac{1}{D}(r, z), \quad t^* = \sqrt{\frac{g}{D}}, \quad p^* = \frac{1}{\rho_{00} g D} p, \\ \omega^* &= \sqrt{\frac{D}{g}} \omega, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_{00}}, \quad \rho_0^{*j} = \frac{\rho_0^j}{\rho_{00}}, \\ (v_r^*, w, U_0^*) &= \frac{1}{\sqrt{g D}} (v_r, w, U_0), \quad k^* = D k, \\ N^{*2}(z^*) &= \frac{D}{g} N^2(z), \quad \varphi^* = \frac{1}{D \sqrt{g D}} \varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

где ρ_{00} - невозмущенная плотность стратифицированной среды.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ БЕГУЩИХ ВОЛН

Рассматриваем решения уравнений (1), (7) в классе бегущих волн вдоль оси z :

$$\{\varphi^j, w\} = \{\hat{\varphi}^j(r), \hat{w}(r)\} \exp[i(kz - \omega t)], \quad (12)$$

где k и ω - волновое число и круговая частота.

После подстановки выражения (12) в (1), (7), (8), (9), соответственно, получаем

$$\frac{d^2 \hat{\varphi}^j}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{\varphi}^j}{dr} - k^2 \hat{\varphi}^j = 0 \quad \text{в } \Omega^j, \quad (13)$$

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{w}}{dr} + \frac{k^2}{N^2/\omega^2 - 1} \hat{w} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (14)$$

$$\frac{d\hat{\varphi}^j}{dr} \Big|_{r=1/2} + \frac{k}{\omega} \left(U_0 - \frac{\omega}{k} \right) \hat{v}_r|_{r=1/2} = 0, \quad (15)$$

$$ik \rho_0^j \left(U_0 - \frac{\omega}{k} \right) \hat{\varphi}^j|_{r=1/2} = -\hat{p}|_{r=1/2}. \quad (16)$$

Учитывая условия регулярности на оси (10), решение уравнения (13) записывается в виде [22]

$$\hat{\varphi}^j(r) = C_1 I_0(kr). \quad (17)$$

Переходя к новой переменной

$$r_1 = k_1 r, \quad k_1 = \frac{k}{\sqrt{N^2/\omega^2 - 1}}, \quad (18)$$

уравнение (14) преобразуем к следующему виду:

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dr_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{d\hat{w}}{dr_1} + \hat{w} = 0. \quad (19)$$

Решение уравнения (19) может быть записано как в функциях Бесселя первого рода, так и в функциях Бесселя третьего рода, т.е. в функциях Ханкеля [22]. Решение в функциях Бесселя первого рода описывает стоячие поперечные волны, а в функциях Ханкеля - бегущие поперечные волны [23].

Рассмотрим решение (19) в функциях Ханкеля. С учетом условия (10), решение записывается в виде

$$\hat{w}(r) = C_3 H_0^{(1)}(k_1 r). \quad (20)$$

Подставляя это выражение в (2) - (4), определяем остальные искомые функции:

$$\hat{\rho}(r) = i \frac{N^2}{\omega} C_3 H_0^{(1)}(k_1 r), \quad (21)$$

$$\hat{v}_r(r) = -i \frac{k}{k_1} C_3 H_1^{(1)}(k_1 r), \quad (22)$$

$$\hat{p}(r) = -\frac{\omega k}{k_1^2} C_3 H_0^{(1)}(k_1 r). \quad (23)$$

Следует отметить, что записывая решение в функциях Ханкеля, мы тем самым исключаем из рассмотрения мнимые значения волнового числа k [24]. Подкоренное выражение в коэффициенте k_1 (18) всегда положительное, поскольку внутренние волны могут существовать только с частотой $\omega < N$ [20, 25].

После подстановки решений (17), (22), (23) в условия сопряжения (15), (16) получаем дисперсионное уравнение вида

$$\frac{I_1(k/2)}{I_0(k/2)} + \frac{\rho_0^j (U_0/c - 1)^2 H_1^{(1)}(k_1/2)}{\sqrt{N^2/\omega^2 - 1} H_0^{(1)}(k_1/2)} = 0. \quad (24)$$

Иследуем это дисперсионное уравнение. При любых k первый член в (24) всегда положителен: $I_0(k/2)/I_1(k/2) > 0$. Коэффициент при отношении функций Ханкеля, в силу $N^2/\omega^2 - 1 > 0$, тоже всегда положителен. Поэтому уравнение (24) может быть записано в виде

$$1 + A \frac{H_1^{(1)}(k_1/2)}{H_0^{(1)}(k_1/2)} = 0, \quad (25)$$

где A – положительное выражение. Представляя функции Ханкеля через функции Бесселя по формуле

$$H_m^{(1)}(\gamma) = J_m(\gamma) + iY_m(\gamma) = 0, \quad (m = 0, 1),$$

уравнение (25) может быть приведено к системе двух уравнений

$$J_0(k_1/2) \left[1 + A \frac{J_1(k_1/2)}{J_0(k_1/2)} \right] = 0, \quad (26)$$

$$Y_0(k_1/2) \left[1 + A \frac{Y_1(k_1/2)}{Y_0(k_1/2)} \right] = 0. \quad (27)$$

Имеем четыре случая разрешимости этой системы.

Случай 1.

$J_0(k_1/2) = 0$; $Y_0(k_1/2) = 0$. Из теории функций Бесселя известно, что положительные корни двух линейно независимых действительных цилиндрических функций одного порядка перемежаются [22]. Отсюда следует, что не существует такого $k_1 > 0$, при котором одновременно $J_0(k_1/2) = 0$ и $Y_0(k_1/2) = 0$.

Случай 2.

$$1 + A \frac{J_1(k_1/2)}{J_0(k_1/2)} = 0; \quad 1 + A \frac{Y_1(k_1/2)}{Y_0(k_1/2)} = 0. \quad (28)$$

Рассмотрим вронскиан [22]

$$J_1(\gamma)Y_0(\gamma) - J_0(\gamma)Y_1(\gamma) = \frac{2}{\pi\gamma}, \quad (29)$$

который преобразуем к виду

$$J_0(\gamma)Y_0(\gamma) \left[\frac{J_1(\gamma)}{J_0(\gamma)} - \frac{Y_1(\gamma)}{Y_0(\gamma)} \right] = \frac{2}{\pi\gamma}. \quad (30)$$

Поскольку вронскиан (29) отличен от нуля, то всегда

$$\frac{J_1(\gamma)}{J_0(\gamma)} \neq \frac{Y_1(\gamma)}{Y_0(\gamma)}.$$

Таким образом, не существует таких действительных значений $k_1 > 0$, при которых равенства в (28) одновременно обращаются в нуль.

Случай 3.

$$J_0(k_1/2) = 0; \quad 1 + A \frac{Y_1(k_1/2)}{Y_0(k_1/2)} = 0.$$

Из графиков и таблиц функций Бесселя $J_m(\gamma), Y_m(\gamma)$ ($m = 0, 1$) видно [22, 26], что корни рассматриваемых функций Бесселя располагаются следующим образом: если $k_1/2$ является корнем функции $J_0(\gamma)$, то значения функций $Y_0(\gamma), Y_1(\gamma)$ в этой точке либо одного знака, либо $k_1/2$ также является корнем функции $Y_1(\gamma)$, а поэтому второе выражение будет отлично от нуля. Следовательно, и для этого случая система не имеет решения.

Случай 4.

$$Y_0(k_1/2) = 0; \quad 1 + A \frac{J_1(k_1/2)}{J_0(k_1/2)} = 0.$$

В этом случае наблюдается картина, аналогичная рассмотренной в предыдущем варианте. Если $k_1/2$ является корнем функции $Y_0(\gamma)$, то значения функций $J_0(\gamma), J_1(\gamma)$ в этой точке либо одного знака, либо $k_1/2$ также является корнем функции $J_1(\gamma)$, и второе выражение опять будет отлично от нуля.

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод, что система уравнений (26), (27) неразрешима, т.е. дисперсионное уравнение (24) не имеет решения в области действительных значений $k_1 > 0$.

Запишем теперь решение уравнения (19) в функциях Бесселя первого рода. Прделав аналогичные выкладки, получаем дисперсионное уравнение вида

$$\frac{I_1(k/2)}{I_0(k/2)} + \frac{\rho_0^j (U_0/c - 1)^2 J_1(k_1/2)}{\sqrt{N^2/\omega^2 - 1} J_0(k_1/2)} = 0. \quad (31)$$

В уравнении (31) перейдем от круговой частоты ω и волнового числа k к фазовой скорости c и длине волны λ по формулам $k = 2\pi/\lambda, \omega = c2\pi/\lambda$:

$$\sqrt{(N\lambda/2\pi c)^2 - 1} \frac{I_1(\pi/\lambda)}{I_0(\pi/\lambda)} J_0 \left(\frac{\pi/\lambda}{\sqrt{(N\lambda/2\pi c)^2 - 1}} \right) +$$

$$+ \rho^j \left(\frac{U_0}{c} - 1 \right)^2 J_1 \left(\frac{\pi/\lambda}{\sqrt{(N\lambda/2\pi c)^2 - 1}} \right) = 0. \quad (32)$$

3. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИИ ВОЛН

Для упрощения последующего анализа дисперсионного уравнения (32) введем замену

$$x = \frac{\pi/\lambda}{\sqrt{(N\lambda/2\pi c)^2 - 1}} \quad (33)$$

и преобразуем уравнение (32) к виду

$$J_1(x) + \varepsilon(x)J_0(x) = 0, \quad (34)$$

где

$$\varepsilon(x) = \frac{N^2 \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^3 x}{\rho_0^j \left[2U_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\pi}x\right)^2} - N \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 x\right]^2} \frac{I_1\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)}{I_0\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)}. \quad (35)$$

Коэффициент $\varepsilon(x)$, входящий в дисперсионное уравнение (34), всегда положительный. Следовательно, левая часть уравнения (34) может изменить знак только при различных знаках величин $J_0(x), J_1(x)$. Из графиков функций $J_0(x), J_1(x)$ видно [27], что действительный корень уравнения (34) находится между корнями функций Бесселя $J_0(x), J_1(x)$. Тогда из уравнения (32) получаем оценку для границ фазовой скорости:

$$\frac{N \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}{2\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 + 1/(\chi_{0i})^2}} < c < \frac{N \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}{2\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 + 1/(\chi_{1i})^2}} \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (36)$$

где χ_{0i}, χ_{1i} ($i = 1, 2, \dots$) - корни функций Бесселя $J_0(x), J_1(x)$. Из формулы (36) видно, что фазовая скорость зависит от длины волны, частоты плавучести N и значения корней функций Бесселя.

Оценим порядок коэффициента $\varepsilon(x)$ по данным, приведенным в [18]: частота плавучести $N \cong 0.1$, плотность струи $\rho_0^j \cong 1$, и скорость течения $U_0 \cong 6$. В этом случае отношение

$$\frac{I_1(\pi/\lambda)}{I_0(\pi/\lambda)} \leq 1 \quad \text{и} \quad \frac{I_1(\pi/\lambda)}{I_0(\pi/\lambda)} = 1 \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow 0,$$

$$\frac{I_1(\pi/\lambda)}{I_0(\pi/\lambda)} \rightarrow \frac{1}{2}\pi/\lambda \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\varepsilon(x) \cong \frac{N^2 \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^3 x}{4\rho_0^j U_0^2} \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (37)$$

$$\varepsilon(x) \cong \frac{1}{2\rho_0^j x \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2} \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Значения коэффициента $\varepsilon(x)$ были найдены в большом диапазоне изменения длины волны λ . В результате вычислений установлено, что в рассматриваемом диапазоне изменения λ величина $\varepsilon(x)$ не превосходит порядка 10^{-5} . Это дает возможность с погрешностью, не превышающей порядка 10^{-5} , за решение уравнения (28) взять значение корня функции Бесселя $J_1(x)$. Таким образом, с этой же степенью точности может быть определена и фазовая скорость c

$$c = \frac{N\chi_{1i}(\lambda/\pi)^2}{2\sqrt{1 + (\lambda\chi_{1i}/\pi)^2}}. \quad (38)$$

Групповую скорость определяем по формуле

$$c_g = -\frac{c}{1 + (\lambda\chi_{1i}/\pi)^2}. \quad (39)$$

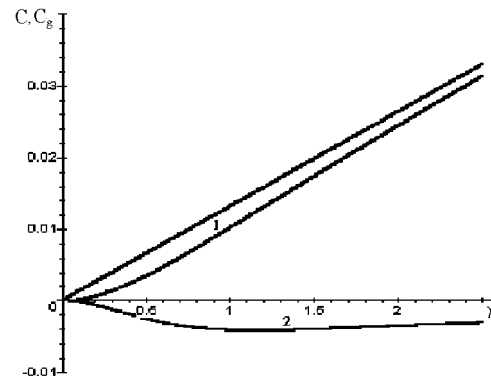


Рис. 1. Зависимость фазовой C (кривая 1) и групповой C_g (кривая 2) скоростей от длины волны λ

Из анализа дисперсионного уравнения следует, что плоскость $c(\lambda), \lambda$ (рис. 1) разбивается на две области прямой $c = N\lambda/(2\pi)$. В верхней области $c > N\lambda/(2\pi)$ решения не существуют, в нижней области кривая $c(\lambda)$ близка к асимптоте, причем, при изменении λ от 0 до ∞ вначале $c(\lambda)$ отклоняется вниз от асимптоты, затем имеет точку перегиба и далее асимптотически приближается к прямой $c = N\lambda/(2\pi)$.

Из анализа групповых скоростей можно обнаружить, что при распространении волн в положительном направлении групповая скорость отрицательная. Отсюда следует, что перенос энергии имеет место в отрицательном направлении, т.е. существует обратная волна.

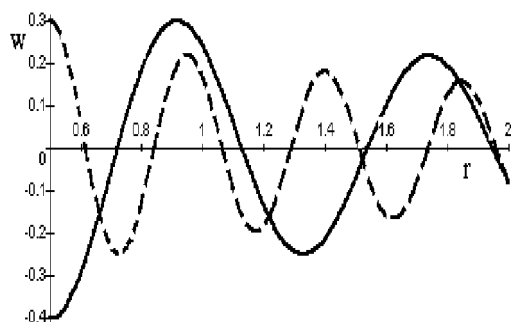


Рис. 2. Поведение нормальной моды в радиальном направлении во внешней среде
Сплошная кривая – 1-я мода, штриховая – 2-я мода

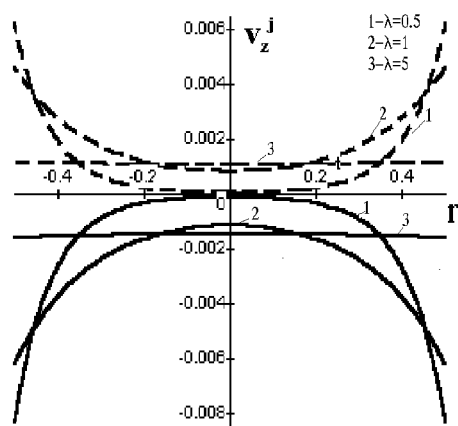


Рис. 3. Изменение нормальной моды в струе v_z^j в радиальном направлении
Сплошные кривые – 1-я мода, штриховые – 2-я мода

На рис. 2, 3 изображены волновые моды. Необходимо отметить, что волновые моды в струе и во внешней области существенно различны. Формы волновых мод в струе зависят от длины волны, в то время как волновые моды во внешней среде не зависят от λ . Внешняя мода убывает, осциллируя, как $1/\sqrt{r}$, и на расстоянии $20D/2$ от поверхности струи уменьшается в 5 раз. Кроме того, амплитуды моды в струе на несколько порядков меньше, чем во внешней среде (10^{-3}). Отсюда можно заключить, что перенос волновой энергии в струе существенно меньше, чем во внешней области, прилегающей к струе.

На рис. 4 изображена зависимость дисперсионной кривой от волнового числа k . Как видно из графика, дисперсионная кривая, также как и груп-

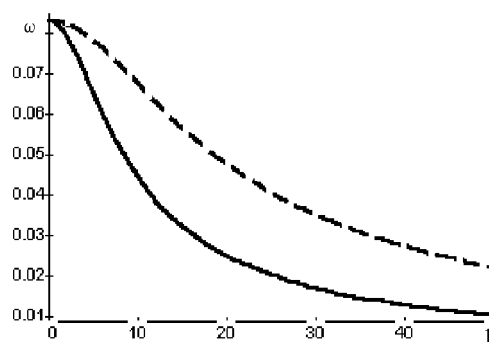


Рис. 4. Зависимость частоты ω от волнового числа k
Сплошная кривая – 1-я мода, штриховая – 2-я мода

повая скорость c_g , монотонно убывает с ростом k . Аналогичная картина поведения наблюдается для инерционных волн [20]. Отсюда можно заключить, что рассматриваемая постановка задачи в рамках модели Буссинеска позволяет описать инерционные волны, а частоте Кориолиса соответствует частота плавучести Брента - Вайсяля.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье приведены постановка и решение новой задачи о распространении волн в стратифицированной жидкости, генерируемых внедрением в нее вертикальной струи. Выведено дисперсионное уравнение и проведен анализ фазовых и групповых скоростей и волновых мод. Найдены зависимости фазовой и групповой скоростей от длины волны λ и частоты плавучести Брента - Вайсяля N .

Показано, что для действительных величин круговой частоты ω и волнового числа k не существует решений в классе бегущих волн, распространяющихся в стратифицированной жидкости от струи в радиальном направлении. Однако существуют локализованные возле струи волновые возмущения, которые распространяются вдоль струи.

Из полученных результатов следует, что во внешней среде вблизи поверхности струи распространяются волны, которые были замечены в экспериментах [18].

Показано, что групповая скорость отрицательна, т.е. установлено, что энергия переносится в направлении, обратном относительно направления распространения волн. Кроме того, перенос энергии в струе существенно меньше, чем во внешней приструйной области.

1. *Lamb H.* Hydrodynamics. 6 th ed.– Cambridge: Cambridge University Press, 1932.– 738 p.
2. *Milne-Thomson L.M.* Theoretical hydrodynamics.– Forth Edition. London: Macmillan and Co. LTD, New York, St. Martin's Press, 1960.– 532 p.
3. *Бай Ши-И.* Теория струй.– М.: ГИФМЛ, 1960.– 326 с.
4. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Ч.1.– М.: ГИФМЛ, 1963.– 584 с.
5. *Рауэ Х.* Механика жидкости.– М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1967.– 390 с.
6. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1974.– 712 с.
7. *Gospodinov P., Radev S., Penchev I.* Velocity profiles and form of a laminar jet in immiscible liquid-liquid systems // Int. J. Multiphase Flow.– 1979. – 1, N 1. – P. 87-99.
8. *Needhan D. I., Ridley N., Smith J. H. B.* A jet in crossflow // J. Fluid Mech.– 1988.– 188.– P. 159-184.
9. *Ting Lu, Keller J. B.* Slender jets and thin sheets with surface tension // SIAM, J. Appl. Math.– 1990.– 50, N 6.– P. 1533 - 1546.
10. *Richards J. R., Beris A. N., Lenhoff A. M.* Steady laminar flow of liquid-liquid jets at high Reynolds numbers // Phys. Fluids, A.– 1993.– A 5, N 7.– P. 1703-1717.
11. *Richards J. R., Lenhoff A. M., Beris A. N.* Dynamic breakup of liquid-liquid jets // Phys. Fluids, A.– 1994.– 6, N 8.– P. 2640-2655.
12. *Longmire E. K., Webster D. R., Gefron D. L., Lowengrub J.S.* Dynamics of pinch-off in liquid jets flowing into immiscible liquid ambients.– Minnesota: University of Minnesota. Supercomputer Inst. Res. Report. UMSI 98/101, May 1998.– 7 p.
13. *Yuen M. C.* Non-linear capillary instability of a liquid jet // J. Fluid Mech.– 1968.– 33, part 1.– P. 151-163.
14. *Маркова М. П., Шкадов В. Я.* О нелинейном развитии капиллярных волн в струе жидкости // Изв. АН ССР. МЖГ.– 1972.– N 3.– С. 30-37.
15. *Christiansen R. M., Hixson A. N.* Breakup of liquid jet in a denser liquid // Ind. Eng. Chem.– 1957.– 49.– P. 1017 -1024.
16. *Tomotika S.* On the instability of a cylindrical thread of a viscous liquid surrounded by another viscous fluid // Proc. R. Soc. London. Ser. A.– 1935.– 150.– P. 322 -337.
17. *Eroglu A., Breidenthal R. E* Exponentially accelerating jet in crossflow // AIAA Journal.– 1998.– 36, N 6.– P. 1002-1009.
18. *Huq P.* Observations of jets in density stratified crossflows // Atmospheric Environment.– 1997.– 31, N 13.– P. 2011-2022.
19. *Pratte B. D., Baines W. D.* Profiles of the round turbulent jets in a crossflow // J. Hydraulic Division, ASCE.– 1967.– 93, N 1. – P. 53-64.
20. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред.– М.: Наука, 1982.– 336 с.
21. *Selezov I. T., Huq P.* Asymptotic-heuristic analysis of nonlinear water wave propagation in two- and three-layer fluids // State Marine Techn. Univ.– St.-Petersburg, 1997.– P. 237-244.
22. *Handbook of Mathematical Functions. With Formulas, Graphs and Mathematical Tables* Ed. by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun.– Issued: National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55, 1964.– 832 p.
23. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т.3, Ч.2.– М.: ГИФМЛ, 1958.– 674 с.
24. *Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З.* Основы теории дифракции.– М.: Наука, 1982.– 272 с.
25. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане.– Л.: Гидрометеоздат, 1981.– 304 с.
26. *Таблицы нулей функций Бесселя* БМТ.– М.: ВЦ АН СССР, 1967.– 95 с.
27. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции.– М.: Наука, 1968.– 344 с.