

УДК 538.4

ТЕЧЕНИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ, ПОРОЖДАЕМОЕ ВРАЩАЮЩИМСЯ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В. П. ШАМОТА

Донбасская государственная академия строительства и архитектуры, Макеевка

Получено 25.05.98

Исследовано течение жидкого металла в цилиндрическом сосуде конечной длины, порождаемое вращающимся магнитным полем. Для описания течения использована полуэмпирическая модель "внешнего трения". Получено удовлетворительное согласование теоретических кривых и экспериментальных данных при различных режимах течения жидкости.

Досліджено течію рідкого металу, яка утворюється обертовим магнітним полем у циліндричній посудині обмеженої довжини. Для опису течії використано напівемпіричну модель "зовнішнього тертя". Отримано задовільне узгодження теоретичних кривих та експериментальних даних при різних режимах течії рідини.

The flow of a liquid metal caused by a rotating magnetic field in cylindrical vessel of a final length was investigated. The semiempirical "external friction" model was used for description of this flow. The satisfactory agreement of theoretical curve and experimental data at various regimes of this flow was received.

ВВЕДЕНИЕ

Для интенсификации процессов тепло- и массообмена в существующих и вновь создаваемых технологических процессах металлургии, литейного производства и энергетики удобно использовать методы магнитной гидродинамики [1]. Одним из перспективных по диапазону решаемых им технологических задач является метод, основанный на использовании вращающегося магнитного поля в процессах рафинирования и легирования, перемещения и дозирования жидких металлов, получения высококачественных монокристаллов, слитков и отливок и т.п. Традиционной задачей магнитной гидродинамики жидких металлов является получение данных, позволяющих учитывать действие электромагнитных сил на жидкий металл с целью как усовершенствования существующих производственных процессов, так и разработки новых технологических приемов.

В конечном счете эта задача сводится к выяснению тех изменений в гидродинамике жидких металлов, которые происходят под влиянием электромагнитных сил, так как трансформация гидродинамических параметров в значительной мере определяет характеристики магнитогидродинамических машин и ход процессов в технологических агрегатах.

Однако все еще бытует исторически сложившееся представление о том, что воздействие магнитного поля на поток приводит к своеобразному упрощению структуры течения, заключающемся в

основном лишь в выравнивании поля скоростей и гашении всякого рода возмущений.

Хотелось бы обратить внимание на ограниченность такого подхода и показать, что в условиях, характерных для практики, МГД-взаимодействие, как правило, приводит к более сложным и разнообразным изменениям в структуре течения, влияющим в свою очередь на электродинамические процессы в жидких металлах. Особенно это касается технологических устройств с переменным магнитным полем, к которым следует отнести индукторы вращающегося магнитного поля.

Важность изучения указанных проблем явилась причиной смещения акцентов в содержании исследований по магнитной гидродинамике в сторону изучения резко неоднородных турбулентных течений. Работа в этом направлении дает основание надеяться на обнаружение новых физических явлений, способных коренным образом изменить сложившиеся взгляды на природу и способы улучшения известных технологических процессов. Кроме того, возможность активного целенаправленного управления характеристиками жидкометаллических потоков открывает широкие перспективы для создания специфических МГД-устройств, принцип работы которых базируется на использовании особенностей движения жидкости в электромагнитном поле. Несмотря на все расширяющееся применение вращающегося магнитного поля в технологических процессах, МГД-явления в нем до настоящего времени изучены недостаточно. Немногочисленные работы в этой области в основном содержали приближенные решения одно-

мерных стационарных задач МГД-вращения, полученные для случая ламинарного течения жидкости и без учета влияния индукционных эффектов на течение и магнитное поле [2]. Такое весьма грубое описание не отражает все разнообразие явлений, возникающих в проводящей жидкости под действием вращающегося магнитного поля и определяющих технологическую пригодность МГД-воздействия.

С целью более глубокого объяснения МГД-явлений, происходящих в технологических устройствах под действием вращающегося магнитного поля, выполнен комплекс теоретических и экспериментальных исследований, результаты которых приведены в данной работе.

1. УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Система уравнений, описывающих процессы, протекающие при взаимодействии проводящей жидкости и вращающегося магнитного поля, состоит из уравнений Максвелла, записанных в предположении, что токами смещения и объемными зарядами можно пренебречь [3]:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial T}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{J}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad (4)$$

закона Ома

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{U} \times \vec{B}) \quad (5)$$

и уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости:

уравнения неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0 \quad (6)$$

и уравнения Навье - Стокса

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial T} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{U} + \vec{F}_s. \quad (7)$$

Здесь \vec{U} — скорость жидкости; ν — кинематическая вязкость жидкости; \vec{J} — плотность электрического тока; \vec{B} — магнитная индукция; \vec{E} — напряженность электрического поля; $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Гн/м}$ — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость жидкости; σ — проводимость жидкости; P — давление; \vec{F}_s — внешняя электромагнитная сила, приложенная к жидкой частице, отнесенная к единице массы жидкости.

В приложении к описанию течения проводящей жидкости во вращающемся магнитном поле эта система уравнений в тех или иных приближениях рассматривалась в работах [4 - 9]. Следует отметить, что несмотря на многочисленные попытки добиться удовлетворительного соответствия ламинарного приближения и экспериментальных данных путем учета трехмерного характера течения, вынужденного волнового движение жидкости под действием вращающегося магнитного поля и других явлений, порождаемых взаимодействием проводящей жидкости и вращающегося магнитного поля, не удается [10].

При описании турбулентных течений используется уравнение Рейнольдса для осредненной скорости течения жидкости \vec{U} , в котором учитываются напряжения трения, порождаемые турбулентными пульсациями скорости \vec{u} :

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial T} + (\vec{U} \nabla) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{U} - \nabla \overline{u_i u_j} + \vec{F}_s. \quad (8)$$

Если в системе уравнений (1) - (7) вместо уравнения Навье - Стокса (7) использовать уравнение Рейнольдса (8), то получающаяся система уравнений незамкнута и для ее замыкания применяются различные дополнительные предположения или полумпирические модели [11], основанные на экспериментальных исследованиях течения. Вообще говоря, и тензор напряжений Рейнольдса $-\rho \overline{u_i u_j}$, и связанные с ним силы трения являются некоторыми функциями осредненной скорости течения жидкости \vec{U} и ее производных и большинство полумпирических теорий основывается на предположениях относительно вида этой функциональной зависимости.

Следует отметить, что вращательное течение жидкости обладает целым рядом особенностей [12], связанных с периодичностью такого течения. Поэтому для описания вращательного течения, порождаемого вращением магнитного поля, оказалось возможным применить достаточно простую модель “внешнего трения” [13 - 15], в которой предполагается, что силы, порождаемые напряжениями Рейнольдса, можно представить в виде

$$\nabla \overline{u_i u_j} = k(\Omega, R, H) \vec{U}, \quad (9)$$

где k — коэффициент “внешнего трения”, зависящий от геометрических размеров области течения, физических свойств жидкости, частоты вращения магнитного поля и средней угловой скорости вращения жидкости. Такое предположение оправдывается тем, что в большей части экспериментов во вращательном течении жидкости можно выделить ядро, занимающее большую часть

области течения и достаточно тонкие пограничные слои вблизи боковых и торцевых поверхностей сосуда. Заметим, что в модели “внешнего трения” вовсе не предполагается линейный характер зависимости сил, порождаемых рейнольдсовыми напряжениями, от осредненной скорости течения жидкости, так как средняя угловая скорость вращения жидкости Ω определяется через осредненную скорость \bar{U} .

2. МГД-ВРАЩЕНИЕ

Предположим, что вязкая несжимаемая проводящая жидкость помещена в цилиндрический сосуд радиусом R_0 и высотой H с тонкими стенками из материала с малой магнитной восприимчивостью, который находится в однородном магнитном поле \vec{B} , вращающемся вокруг вертикальной оси симметрии. Проводящая жидкость подобно ротору асинхронного двигателя придет во вращательное движение вслед за вращением поля. Естественно, что скорость такого движения будет меньше скорости поля (в экспериментах средняя угловая скорость вращения жидкости не превышала 0.6 от угловой скорости вращения магнитного поля) из-за наличия большого числа механизмов диссипации энергии основного течения жидкости.

2.1. Электродинамические процессы

Введем векторный потенциал электромагнитного поля \vec{A} с помощью соотношения

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (10)$$

Тогда с помощью несложных преобразований из системы (1) – (5) легко получается уравнение для векторного потенциала

$$\Delta \vec{A} = \mu \mu_0 \sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial T} - \vec{U} \times \text{rot} \vec{A} \right). \quad (11)$$

Перейдем к безразмерным величинам, для чего введем характерные масштабы длины R_0 , в качестве которого выберем радиус цилиндрического сосуда, скорости V_0 , в качестве которого выберем скорость вращения магнитного поля на поверхности сосуда $V_0 = \omega_0 R_0 / p$, магнитной индукции B_0 , в качестве которого выберем максимальное значение магнитной индукции на внешней поверхности сосуда, времени T_0 , в качестве которого выберем величину, равную отношению характерного размера к характерной скорости $T_0 = p / \omega_0$, плотно-

сти тока $J_0 = \sigma \omega_0 B_0 R_0$, векторного электромагнитного потенциала $A_0 = B_0 / R_0$, объемной электромагнитной силы $F_0 = J_0 B_0 / \rho$.

Тогда уравнение (11) преобразуется к безразмерному виду

$$\Delta \vec{a} = \bar{\omega} \left(\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot} \vec{a} \right). \quad (12)$$

Здесь $\bar{\omega} = \mu \mu_0 \sigma \omega_0 R_0^2 / p$ — относительная частота, имеющая физический смысл квадрата отношения радиуса сосуда к глубине проникновения магнитного поля в жидкий проводник.

Будем считать, что вращающееся магнитное поле создается азимутальной волной поверхностной плотности тока, распределенной на внешней поверхности цилиндрического сосуда, а внешнее пространство заполнено идеальным ферромагнетиком. При этом протяженность индуктора многократно превышает высоту столба проводящей жидкости и вектор плотности тока параллелен образующей цилиндрической поверхности. Тогда для описания электродинамических процессов в цилиндрической системе отсчета r, φ, z , ось z которой совпадает с осью симметрии цилиндрической поверхности, достаточно одной z — составляющей векторного потенциала $\vec{a} = a_z$, которая должна удовлетворять уравнению

$$\Delta a_z = \bar{\omega} \left(\frac{\partial a_z}{\partial t} + \frac{v}{r} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} \right). \quad (13)$$

Так как на границе раздела двух сред касательная составляющая магнитной индукции изменяется на величину поверхностной плотности электрического тока, то на внешней цилиндрической поверхности граничным условием для векторного потенциала в данном случае будет

$$\left. -\frac{\partial a_z}{\partial r} \right|_{r=1} = \cos p(t - \varphi). \quad (14)$$

В этом уравнении p — число пар полюсов индуктора вращающегося магнитного поля, определяющее порядок осевой симметрии магнитного поля.

На оси сосуда должно выполняться условие симметрии

$$\left. a_z \right|_{r=0} = 0. \quad (15)$$

В общем случае уравнение (13) должно решаться совместно с уравнениями движения жидкости. Однако в случае, когда относительная частота достаточно мала $\bar{\omega} < 1$ (безындукционное приближение), выражением, стоящим справа в этом уравнении можно пренебречь. Тогда электродинамическую часть задачи можно решать независимо от

гидродинамической части. И для поля идеального индуктора решение легко находится

$$a_z = -\frac{r^p}{p} \cos p(t - \varphi). \quad (16)$$

Зная a_z , нетрудно определить плотность электромагнитных сил, действующих на проводящую жидкость, помещенную во вращающееся магнитное поле:

$$f_\varphi = r^{2p-2}(r-v) \sin^2 p(t - \varphi), \quad (17)$$

$$f_r = \frac{1}{2} r^{2p-2}(r-v) \sin 2p(t - \varphi). \quad (18)$$

Из формул (17) и (18) видно, что азимутальная составляющая плотности электромагнитных сил имеет постоянную часть, не зависящую от времени,

$$f_\varphi = \frac{1}{2} r^{2p-2}(r-v) \quad (19)$$

и переменную, гармонически изменяющуюся часть.

Радиальная составляющая плотности электромагнитных сил, как видно, имеет только гармонически изменяющуюся часть.

Постоянная составляющая плотности электромагнитных сил порождает стационарное азимутальное движение проводящей жидкости, гармонически изменяющаяся часть порождает вынужденное волновое движение жидкости с частотой, вдвое превышающей частоту вращающегося магнитного поля, а также периодическое изменение давления в жидкости с той же частотой.

2.2. Течение жидкости

Предположим, что осредненная скорость течения имеет только одну φ -составляющую v , которая удовлетворяет безразмерным уравнениям движения, получающимся из выажений (8) и (9),

$$Re_\omega \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta_\varphi v + Ha_d^2 f_\varphi - \lambda v. \quad (20)$$

Здесь $Re_\omega = \omega_0 R_0^2 / \nu p$ – число Рейнольдса, построенное по скорости вращающегося магнитного поля; $Ha_d = B_d R_0 \sqrt{\sigma/\eta}$ – число Гартмана; $B_d = B_0/\sqrt{2}$; $\lambda = k Re_\omega / \omega$ – безразмерный коэффициент “внешнего трения”, являющийся, как это будет показано ниже, отношением турбулентного касательного напряжения трения к напряжению трения, обусловленному молекулярной вязкостью. Через коэффициент “внешнего трения” учитывается влияние вторичных течений на величину и распределение осредненной скорости течения.

Для случая стационарного движения жидкости, при котором осредненная скорость v не зависит от времени, уравнение (20) упрощается:

$$\Delta_\varphi v - \lambda \cdot v + Ha_d^2 f_\varphi = 0. \quad (21)$$

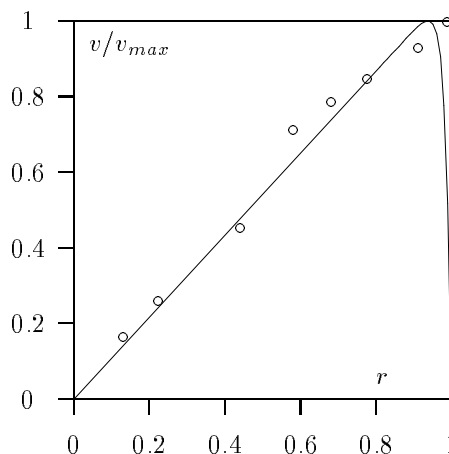


Рис. 1. Профиль скорости для $p = 1$, $Ha_d = 22.2$, $\delta_z = 4$, $Re_\omega = 7.36 \cdot 10^6$.

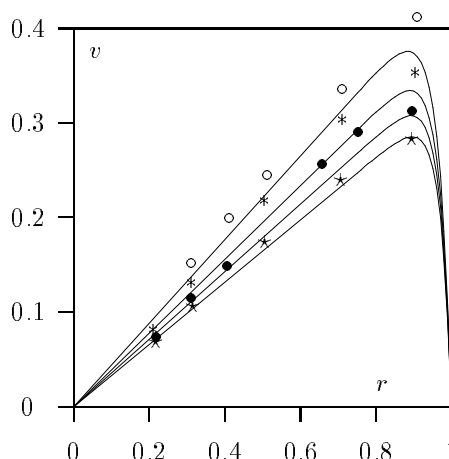


Рис. 2. Профили скорости для $p = 1$, $Ha_d = 13.9$, $\delta_z = 1$: \circ - $Re_\omega = 3.18 \cdot 10^4$; $*$ - $Re_\omega = 4.64 \cdot 10^4$; \bullet - $Re_\omega = 6.7 \cdot 10^4$; \star - $Re_\omega = 8.82 \cdot 10^4$.

Используя найденную величину объемной электромагнитной силы (19), окончательно получаем уравнение движения

$$\Delta_\varphi v - \beta^2 r^{2p-2} \cdot v = -Ha_d^2 r^{2p-1}, \quad (22)$$

где $\beta^2 = \lambda + Ha_d^2$.

Точное решение уравнения (22) легко находится:

$$v = \frac{Ha_d^2}{\beta^2} \left[r - \frac{I_{1/p}(\beta r^p/p)}{I_{1/p}(\beta/p)} \right], \quad (23)$$

где $I_\nu(x)$ – функция Бесселя. Отметим, что при $\lambda \rightarrow 0$ получается решение задачи о ламинар-

ном одномерном течении проводящей жидкости под действием вращающегося магнитного поля [6].

На рис. 1, 2 представлены профили скорости, найденные по формуле (23), и их сравнение с экспериментами [16 – 17].

2.3. Средняя угловая скорость вращения жидкости

Определим среднюю угловую скорость вращения жидкости как

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_0^1 |\text{rot } \vec{v}| r dr. \quad (24)$$

Используя это определение и уравнение (22), легко получаем алгебраическое уравнение для Ω :

$$C_1 e^{C_2 \varepsilon} Re_\omega^{1-\varepsilon} \Omega^{2-\varepsilon} + Ha_d^2 (\Omega - 1) \delta_z = 0, \quad (25)$$

где C_1, C_2 – эмпирические постоянные; ε – параметр, определяющий структуру течения и принимающий значения 1, 1/2 и 0; $\delta_z = H/2R_0$ – отношение высоты столба жидкости к диаметру сосуда.

Сравнение теории с экспериментами по измерению скорости течения жидкости показало, что наиболее приемлемое соответствие получается, если коэффициент “внешнего трения” λ определять по формуле

$$\lambda = C_1 e^{C_2 \varepsilon} (Re_\omega \Omega)^{1-\varepsilon} / \delta_z, \quad (26)$$

при условии, что эмпирические постоянные принимают следующие значения: $C_1 = 0.02$, $C_{2_1} = 10.4$, $C_{2_2} = 12.0$. Два значения постоянной C_2 соответствуют двум экспериментально найденным переходам между режимами с различными значениями параметра ε .

Уравнение (25) порождает семейство пересекающихся поверхностей, линии пересечения которых в модели “внешнего трения” рассматриваются как кривые нейтральной устойчивости различных режимов течения [19]. Уравнения этих кривых

$$Re_1 = \frac{e^{2C_{2_1}}}{e^{C_{2_2}}} \left(1 + \frac{C_1 e^{C_{2_1}}}{Ha_d^2 \delta_z} \right), \quad (27)$$

$$Re_2 = e^{C_{2_2}} \left(1 + \frac{C_1 e^{C_{2_2}}}{Ha_d^2 \delta_z} \right) \quad (28)$$

соответствуют двум переходам от ламинарно-вихревого течения ($\varepsilon = 1$) к квазиламинарному режиму течения с преобладанием волнового механизма диссипации энергии основного течения

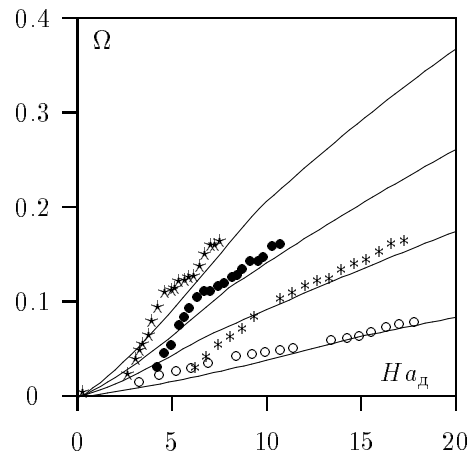


Рис. 3. Зависимость средней угловой скорости вращения жидкости от величины магнитной индукции для $p = 1$: \circ - $\delta_z = 1$, $\bar{\omega} = 0.37$; $*$ - $\delta_z = 4.92$, $\bar{\omega} = 0.374$; \bullet - $\delta_z = 6.67$, $\bar{\omega} = 0.204$; $*$ - $\delta_z = 8.82$, $\bar{\omega} = 0.116$;

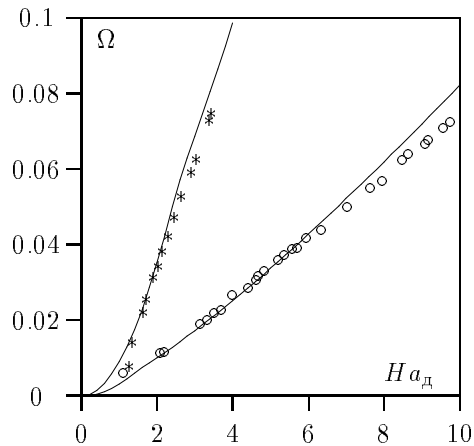


Рис. 4. Зависимость средней угловой скорости вращения жидкости от величины магнитной индукции для $p = 1$: \circ - $\delta_z = 2.03$, $\bar{\omega} = 0.91$; $*$ - $\delta_z = 6$, $\bar{\omega} = 0.91$;

($\varepsilon = 1/2$) и от последнего к развитому турбулентному режиму течения ($\varepsilon = 0$). Такая последовательность смены режимов течения наблюдается экспериментально [12].

На рис. 3 – 5 приведено сравнение результатов измерений средней угловой скорости вращения жидкости, описанных в работах [10, 15] с вычисленными по формуле (25) кривыми. Отметим, что при указанных выше значениях постоянных C_1, C_{2_1} и C_{2_2} получается наиболее точное соответствие всех известных экспериментальных данных и теоретических кривых.

Так как с увеличением частоты вращения поля увеличивается и выбранная нами характерная скорость, для более точного отражения характера изменения средней угловой скорости вращения жидкости при увеличении частоты на рис. 5 показана зависимость числа Рейнольдса, построенного

по средней угловой скорости вращения жидкости $Re = \omega R_0^2 / \nu = \Omega \cdot Re_\omega$, от относительной частоты $\bar{\omega}$.

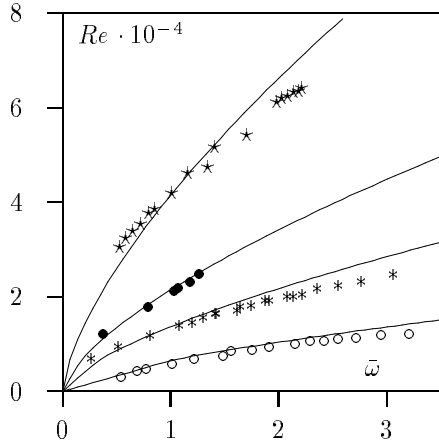


Рис. 5. Изменение средней угловой скорости вращения жидкости при увеличении частоты вращения магнитного поля $p = 2$, $\delta_z = 1.02$: \circ - $Ha_d = 2$, $*$ - $Ha_d = 3.5$, \bullet - $Ha_d = 4.9$, \ast - $Ha_d = 8.2$.

Отметим также хорошее совпадение теоретических кривых к данными экспериментов, описанных в [18].

2.4. Напряжения трения

В рассматриваемой одномерной модели уравнение движения жидкости (20) получится, если предположить, что касательное напряжение Рейнольдса τ_r находится по формуле

$$\tau_r = \frac{\rho}{R} \int k R U_\varphi dR. \quad (29)$$

Как видим, в отличие от вязкого напряжения трения, причиной которого является взаимодействие молекул жидкости, турбулентное напряжение трения является некоторой интегральной характеристикой течения.

Выберем в качестве масштаба для напряжений трения величину $\tau_0 = \eta V_0 / R_0 = \eta \omega_0 / p$. Тогда для вязкого напряжения трения можно ввести его безразмерный аналог

$$\tau_v = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (30)$$

Для касательного напряжения трения, являющегося следствием перемешивания слоев жидкости из-за упорядоченного или хаотичного вихревого движения отдельных ее частей, как следует из формулы (29), получится выражение

$$\tau_t = \frac{1}{r} \int \lambda r v dr. \quad (31)$$

В дальнейшем для краткости будем называть τ_t турбулентным напряжением трения.

Отметим, что характерным масштабом турбулентного напряжения трения будет $\lambda \rho \nu \omega / p = \lambda \tau_0$, т.е. введенный коэффициент “внешнего трения” λ является отношением масштабов турбулентного и вязкого напряжений трения.

Используя полученное решение (23), найдем величину касательного напряжения трения на боковой поверхности сосуда:

$$\tau = \tau_v + \tau_t, \quad (32)$$

где

$$\tau_v = \frac{Ha_d^2}{\beta^2} \left[1 - \frac{\beta I_{1/p}'(\beta/p)}{p I_{1/p}(\beta/p)} \right],$$

$$\tau_t = \lambda \int_0^1 r^{2p-1} v dr.$$

Сравнение теоретических кривых зависимости напряжения трения на боковой поверхности сосуда от величины магнитной индукции и частоты вращающегося магнитного поля с экспериментальными данными приведены на рис. 6, 7.

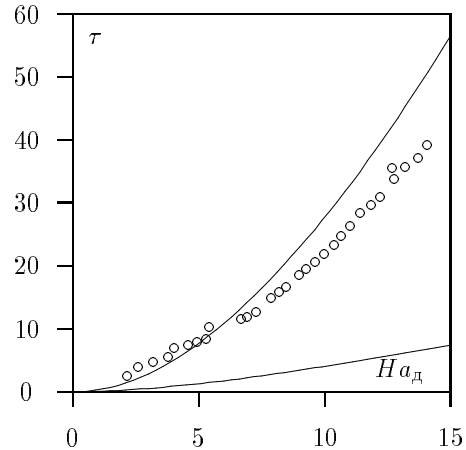


Рис. 6. Зависимость напряжения трения от величины магнитной индукции для $p = 1$, $\delta_z = 7.4$, $\bar{\omega} = 0.116$, $Re_\omega = 8.29 \cdot 10^5$.

В экспериментах напряжение трения определялось по углу поворота сосуда с проводящей жидкостью, подвешенного на упругой нити. На рис. 6 нижняя кривая соответствует вязкому напряжению трения, верхняя рассчитана по формуле (32). Как видим, “турбулентные” напряжения трения значительно превышают вязкие и в большей степени определяют угол поворота сосуда. Что касается зависимости напряжений трения от частоты, то, как показывают результаты расчетов и

выполненные эксперименты, безразмерное напряжение трения незначительно возрастает при увеличении частоты, т.е. размерное напряжение и угол поворота сосуда почти линейно зависят от частоты, по крайней мере при достаточно малых частотах.

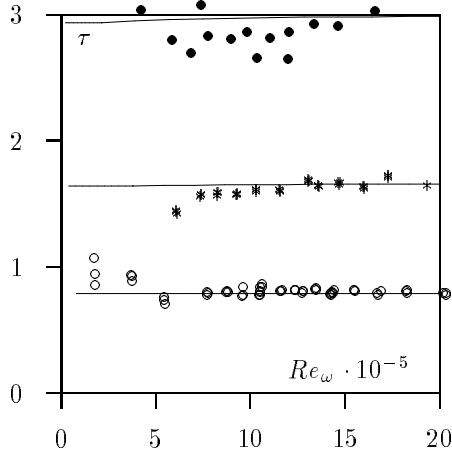


Рис. 7. Зависимость напряжения трения от частоты при $p = 2$, $\delta_z = 1.4$: \circ - $Ha_d = 2$, $*$ - $Ha_d = 2.9$, \bullet - $Ha_d = 3.9$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные сравнения распределения скорости, зависимости средней угловой скорости и напряжения трения на поверхности сосуда от величины магнитной индукции и частоты магнитного поля позволяют заключить, что данная модель достаточно точно описывает течение проводящей жидкости во вращающемся магнитном поле в широком, хотя и ограниченном, диапазоне изменения как магнитной индукции, так и частоты магнитного поля. Хотелось бы особо подчеркнуть, что данная модель не ограничивается каким-то одним режимом течения жидкости, а охватывает весь спектр возможных режимов – от ламинарно-вихревого до развитого турбулентного течения. Условия смены различных режимов течения естественным образом вытекают из исходных уравнений модели.

1. Акименко А.Д., Орлов Л.П., Скворцов А.А., Шендеров Л.Б. Непрерывное литье во вращающемся магнитном поле.– М.: Металлургия, 1971.– 177 с.

2. Гельфгат Ю.М., Приеде Я. МГД течения во вращающемся магнитном поле (обзор) // Магнитная гидродинамика.– 1995.– Т. 32, N 2.– С. 214–230.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред.– М.: Наука, 1982.– 620 с.

4. Smith P. The rotation of conducting liquid in uniform transverse magnetic field // ZAMM, 44.– 1964.– Н. 10/11.– Р. 495–502.

5. Moffatt H.K. On fluid flow induced by a rotating magnetic field // J. Fluid Mech.– 1965.– vol. 22, part 3.– Р. 521–528.

6. Капуста А.Б. Движение проводящей жидкости под действием вращающегося магнитного поля // Магнитная гидродинамика.– 1968.– N 2.– С. 71–76.

7. Капуста А.Б. Двухмерное нестационарное течение проводящей жидкости, возбуждаемое вращающимся магнитным полем // Магнитная гидродинамика.– 1977.– N 3.– С. 77–83.

8. Капуста А.Б., Зибольд А.Ф. Некоторые результаты численного моделирования ламинарного течения жидкости во вращающемся магнитном поле // Магнитная гидродинамика.– 1980.– N 4.– С. 43–48.

9. Davidson P.A. Swirling flow in an axisymmetric cavity of arbitrary profile, driven by a rotating magnetic field // J. Fluid Mech.– 1992.– vol. 245.– Р. 669–699.

10. Доронин В.И., Дремов В.В., Капуста А.Б. Измерение характеристик МГД-течения ртути в закрытом цилиндрическом сосуде // Магнитная гидродинамика.– 1973.– N 3.– С. 139–140.

11. Методы расчета турбулентных течений/Под ред. В. Кольмана .– М: Мир, 1984.– 454 с.

12. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей.– Л.: Гидрометеиздат, 1975.– 304 с.

13. Гледзер Е.Б., Должанский Ф.В., Обухов А.М. Системы гидродинамического типа и их применение.– М.: Наука, 1981.– 368 с.

14. Капуста А.Б., Шамота В.П. Квазиламинарные и турбулентные течения проводящей жидкости, возбуждаемые вращающимся магнитным полем // Магнитная гидродинамика.– 1996.– Т. 32, N 3.– С. 43–49.

15. Шамота В.П. Вращение проводящей жидкости электромагнитным полем // Магнитная гидродинамика.– 1997.– Т. 33, N 1.– С. 52–55.

16. Капуста А.Б., Дремов В.В., Доронин В.И. Экспериментальное исследование движения ртути во вращающемся магнитном поле // Техническая электромагнитная гидродинамика.– Донецк, 1970.– Труды N 20 (4).– С. 187–191.

17. Poirier Y. Contribution a l'etude experimentale de la magnetodynamique des liquides // Alger. Sciences Physiques.– 1960.– Tome VI, N 1.– Р. 5–101.

18. Robinson T., Larsson K. An experimental investigation of magnetically driven rotating liquid - metal flow // J. Fluid Mech.– 1973.– vol. 60, part 4.– Р. 641–664.

19. Капуста А.Б., Шамота В.П. О неустойчивости квазиламинарных течений, порождаемых вращающимся магнитным полем // Магнитная гидродинамика.– 1996.– Т. 32, N 1.– С. 50–55.