

УДК 533.6.013.16:533.6.013.02

## НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОТЫ ХВОСТОВОГО ПЛАВНИКА ДЕЛЬФИНА

А. В. ШЕХОВЦОВ\*

\* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 25.03.99

Для построения нелинейной математической модели работы хвостового плавника дельфина применен подход, основанный на теории потенциалов двойного и вихревого слоев, а также на теории сингулярных интегральных уравнений. При этом эффектами трехмерности и телесности плавника, а также вязкости среды пренебрегалось. При помощи усовершенствованного метода дискретных вихрей построена нелинейная нестационарная двумерная численная модель работы хвостового плавника дельфина, хорошо описывающая известные особенности его работы. Обнаружено, что основной режим плавания дельфинов характеризуется минимальным вкладом подсосывающей силы в силу тяги.

Для побудови нелінійної математичної моделі роботи хвостового плавника дельфіна застосовано підхід, який ґрунтується на теорії потенціалів подвійного та вихревого шарів, а також на теорії сингулярних інтегральних рівнянь. При цьому ефектами трьохвимірності та тілесності плавника, а також в'язкості середовища нехтувалося. За допомогою удосконаленого методу дискретних вихорів побудовано нелінійну нестационарну двовимірну чисельну модель роботи хвостового плавника дельфіна, яка добре описує відомі особливості його роботи. Виявлено, що основний режим плавання дельфінів характеризується мінімальним внеском підсмоктувальної сили в силу тяги.

For construction of non-linear mathematical model of dolphin tail fin motion an approach based on the double and vortical layers potentials theory, and also on the singular integral equations theory was applied. At that the three-dimensional effects and influence of thickness of the fin, and also of viscosity of the medium was neglected. Using the improved method of discrete vortices a non-linear, non-stationary, two-dimensional numerical model of dolphin tail fin motion, well describing known features of its work was constructed. It was revealed, that main mode of dolphin's swimming is characterized with minimal contribution of suction force into the thrust.

### ВВЕДЕНИЕ

Со времени становления бионики как науки и по настоящее время интерес ученых к проблеме познания механизмов передвижения гидро- и аэробий не ослабевает. Список публикаций по исследованию пропульсивных характеристик колеблющегося крыла насчитывает сотни наименований и продолжает пополняться. Вследствие высокой степени сложности задачи, связанной с ее нелинейностью и нестационарностью, в подавляющем числе теоретических работ использовались линейные приближения, которые дали возможность получить аналитические решения, однако эти решения носят ограниченный характер и необоснованная их экстраполяция может привести к существенным ошибкам.

В отличие от человека, природа уже десятки миллионов лет использует плавниковый движитель (ПД), причем наиболее совершенным ее творением является хвостовой плавник дельфина. Именно у дельфинов геометрические, кинематические и структурные характеристики всего тела и самого хвостового плавника подчинены основной задаче – возможности достижения максимальной скорости и маневренности при минимуме энергетических потерь. Дельфины способны развивать наибольшую среди млекопитающих скорость пла-

вания по отношению к длине своего тела, имеют отличную маневренность, стартовую скорость и высокую эффективность. По коэффициенту гидродинамического совершенства дельфины в 25–30 раз превосходят подводные суда [1].

Под ПД будем понимать колеблющееся крыло, у которого среднее за период скалярное произведение главного вектора внешних сил и вектора скорости перемещения в некотором выделенном направлении положительно.

В дальнейшем будет фигурировать параметр  $\delta$ , отвечающий за фазовый сдвиг между поступательными и вращательными колебаниями крыла. Так как его знак зависит от того, какую тройку векторов образуют знакоположительный вектор задаваемой скорости поступательных колебаний крыла  $\vec{v}^+(t)$ , вектор вынужденной скорости поступательного движения оси колебаний крыла  $\vec{u}$  и перпендикулярный им знакоположительный вектор угловой скорости крыла  $\vec{\omega}^+(t)$ , для определенности здесь и далее будем предполагать, что они образуют правую тройку  $(\vec{v}^+(t), \vec{u}, \vec{\omega}^+(t))$ . Это будет соответствовать положительному отсчету угла перекадки крыла против часовой стрелки при движении крыла с точки зрения внешнего наблюдателя справа налево. (Соответственно, при движении крыла с точки зрения внешнего наблюдателя слева направо, положительный отсчет угла

перекладки производится по часовой стрелке).

Одна из первых работ, в которой изучались пропульсивные характеристики ПД с использованием линейных приближений, является работа Хаскинда [2]. В предположении малости углов атаки, линейной и угловой амплитуд и линейности следа получены формулы для коэффициента силы тяги  $C_T$ , коэффициента затраченной мощности  $C_W$  и коэффициента полезного действия (КПД)  $\eta$  бесконечно тонкого крыла, способного совершать вращательно–поступательные колебания. Представлены зависимости  $C_T$ ,  $C_W$  и  $\eta$  от числа Струхала  $p^*$  для случая вращательных колебаний крыла вокруг произвольной оси вращения.

Позже, Лайтхиллом [3], при тех же упрощающих предположениях, на основе метода линеаризации Прандтля, для случая, когда вращательные колебания отстают от поступательных на угол  $\pi/2$ , были получены зависимости  $C_T(p^*)$ ,  $C_W(p^*)$  и  $\eta(p^*)$  для различных значений безразмерного комплекса, являющегося комбинацией продольной скорости движения, частоты вращения, линейной и угловой амплитуд (так называемого “параметра флюгирования”).

Ву [4] в линейном приближении рассмотрел вращательно–поступательные колебания жесткой плоской пластины, а также деформации гибкой пластины по закону прогрессивной волны для двумерного случая.

Чопрой [5, 6] предложена двумерная линеаризованная теория плавания животных с серповидным хвостовым плавником, которая для особых режимов движения крыла позволяет рассчитывать пропульсивные характеристики для произвольных линейных амплитуд колебаний. Эта теория является развитием линейных подходов, разработанных Карманом и Сирсом, Кюсснером, Теодорсеном на случай непрямолинейного движения оси вращения профиля крыла. Основные ограничения – малые углы атаки и независимость формы образующегося вихревого следа от времени. Преимущество теории Чопры по сравнению с теориями Лайтхилла [3] и Ву [4] в том, что она дает оценку интенсивности вихрей в следе профиля, колеблющегося с конечной амплитудой.

Кац и Вейхс [7], для таких же ограничений по углу атаки и форме вихревого следа, как и в теории Чопры, рассмотрели колебательное движение профиля крыла с переменной упругостью вдоль хорды. Однако, в отличие от [5, 6], след моделировался дискретными вихрями, а циркуляция на профиле находилась с использованием разложения в ряд Фурье. На каждом временном шаге итерационно решалась динамическая задача. Получено,

что КПД упругого крыла может превзойти КПД жесткого на 20%, но при этом тяга уменьшается в 4 раза.

Подчеркнем, что нестационарные теории [5–7], разработанные для больших амплитуд колебаний, не способны учесть влияние мгновенного угла атаки на пропульсивные характеристики крыла и являются по своей сути все же линейными моделями, применимыми в достаточно узкой области. Чтобы отличать от традиционных линейных подходов, будем их называть квазилинейными теориями.

Д.Н. Горелов [8], в рамках линейных ограничений, рассмотрел колебания крыла бесконечного размаха при различных положениях оси вращения и сдвиге фаз. Были получены интересные результаты по поведению пропульсивных характеристик.

Отдельно остановимся на работах, в которых данная проблема рассматривалась в пространственной постановке.

Первым, кто предпринял попытку такого рода, был Чопра [9, 10]. Он развил теорию Лайтхилла [3] на случай тонкого крыла прямоугольной формы в плане. Проведенные расчеты для удлинений, равных 4, показали хорошее соответствие с данными Лайтхилла. Несколько позже, Чопра и Камбэ [11] продолжили эти исследования, рассмотрев колебания тонких крыльев большого удлинения различной формы в плане.

Лэном [12] предложен метод расчета неустановившегося движения тонкого крыла произвольной формы в плане, который является аналогом известного метода подковообразных вихрей, разработанного С.М. Белоцерковским в шестидесятых годах. Приводятся результаты расчетов пропульсивных характеристик для прямоугольного и стреловидного крыльев, а также моделируется полет мухи–дракона, крылья которой расположены последовательно.

К.В. Рождественским и В.А. Рыжовым [13] в линейном приближении, на основе метода коллокаций, рассматривались вращательно–поступательные колебания тонкого прямоугольного крыла конечного размаха на малых расстояниях от твердой и жидкой поверхности. Изучалось влияние величины сдвига фаз, частоты колебаний, положения оси вращения и удлинения крыла на величину отношения средней силы тяги при вращательно–поступательных колебаниях к средней силе тяги при поступательных колебаниях.

Впервые в нелинейной постановке данная задача была рассмотрена А.А. Зайцевым и А.А. Федотовым [14]. Применялся метод вихревых поверх-

ностей (МВП). Использовались лагранжевые переменные. Сравнительные расчеты с известными экспериментальными данными показали хорошее их соответствие.

В этой же работе предпринята попытка моделирования движения хвостового плавника дельфина. Геометрические характеристики модельного крыла были следующие: бесконечно тонкое (плоское), удлинения 4, передняя кромка скруглена; абсолютно жесткое. В соответствии с данными работы [15], траектория движения оси вращения задавалась в виде синусоиды, а вращательные колебания – с задержкой по отношению к поступательным на угол  $\pi/2$ . Рассчитаны коэффициент силы тяги и КПД крыла для различных положений оси вращения и частот колебаний при линейной амплитуде, сравнимой с хордой. На оставшемся пятом свободном параметре – угловой амплитуде, следует остановиться более детально.

Угол перекадки в работе [14] задавался опосредованно, как разность между углом наклона касательной к траектории движения оси вращения и некоторым углом, который авторы именовали углом атаки и задавали в виде синусоиды с амплитудой  $10^\circ$ . Прибегая к такому приему, авторы стремились ограничиться известным [15] предельным значением угла атаки, характерным для работы хвостового плавника дельфина. Однако, в случае совместных вращательно–поступательных колебаний, когда ось вращения не находится на передней кромке, угол скоса потока будет зависеть еще и от угловой скорости. Поэтому реальный угол атаки на передней кромки может сильно отличаться от угла, вычисленного без учета вклада угловой скорости. Такое приближение может быть оправдано лишь для довольно малых угловых амплитуд и частот либо когда ось вращения находится на передней кромке. Заметим, однако, что даже для этих случаев, при относительных скоростях крыла  $\lambda_p < 1$ , поведение угла перекадки будет значительно отличаться от синусоидального, что противоречит натурным наблюдениям [15].

Таким образом, данный способ моделирования по углу перекадки (равно, по углу атаки) не является корректным, так как может повлечь за собой неконтролируемый выход за критические углы атаки. Этим, в частности, объясняются существенные изменения величин пропульсивных характеристик, рассчитанных в работе [14], в зависимости от положения оси вращения.

Эта методологическая ошибка присуща и работам [6, 7]. В них контроль за углом атаки был необходим в силу ограничений линейной теории, однако авторы, опираясь на вывод Лайтхилла [3] о

предпочтении задней кромки перед передней при выборе положения оси вращения, косвенно вошли в противоречие с требованием теории о малости углов атаки. Возможно, поэтому Чопре [6] понадобилась апелляция к экспериментальным данным по волнистым ставридам, хотя его теория вполне подходит для моделирования работы хвостового плавника дельфина, у которого рабочий диапазон относительной скорости вдвое больше, полученного Чопрой.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### 1.1. Предварительные замечания

Для создания адекватной и в то же время достаточно простой гидродинамической модели работы хвостового плавника дельфина проанализируем известные натурные данные. Главным отличием хвостового плавника дельфина от рыбьего состоит в том, что у рыб он расположен вертикально и при махах движется из стороны в сторону, а у дельфинов и других китообразных – горизонтально и, соответственно, движется вверх–вниз. Другой характерной особенностью является то, что у дельфинов задняя оконечность тела (хвостовой стебель) приплюснута с боков. Эти два фактора приводят к меньшей раскачке корпуса при интенсивных махах плавником и минимизации возмущений потока перед ним. Уменьшению раскачки корпуса способствуют также два грудных плавника, которые, кроме стабилизации, выполняют еще функции рулей глубины и тормозов.

В работе [16] приводятся траектории движения характерных точек тела двух видов черноморских дельфинов: белобочки и азовки, которые были получены с применением киносъемки их медленного плавания в большом кольцевом, с остекленным участком, бассейне Морского гидрофизического института НАН Украины. Все траектории имели синусоидальный характер, а амплитуды колебаний развилки хвостового плавника, центра тяжести и носа для каждого животного соотносились примерно как 1 : 0.05 : 0.4. То есть, центры тяжести дельфинов перемещались почти прямолинейно.

Корпус дельфинов и их плавники имеют хорошо обтекаемые формы и обтекаются безотрывно. В поперечном сечении корпус дельфинов имеет эллиптическую форму и сильное сужение перед хвостовым плавником. Максимальная толщина пограничного слоя (в конце хвостового стебля) составляет примерно несколько процентов от толщины корпуса дельфина. Зафиксированы наблю-

дения, как ночью в условиях биолюминесцентного тихого моря за быстро плывущим дельфином оставались лишь два светящихся шнура, а за тюленем – широкий светящийся след. В то же время, основываясь на натуральных данных и используя эмпирический метод оценки влияния корпуса на хвостовой плавник, было получено, что влияние корпуса на работу хвостового плавника пренебрежимо мало [1]. Эта удивительная особенность плавания дельфинов усиливается тем, что величина числа Рейнольдса, вычисленного по длине тела и средней скорости плавания дельфина, в среднем достигает  $10^7$ .

Главный машущий движитель дельфинов – хвостовой плавник имеет полулунную, симметричную форму в плане, со срединной выемкой на задней кромке. В вертикальном продольном сечении (профиль) хвостовой плавник дельфинов имеет хорошо обтекаемую форму, подобную обобщенным профилям Н.Е. Жуковского с относительной толщиной среднего профиля 18 – 20%. Наружная поверхность хвостового плавника дельфинов имеет нерастяжимую сухожильную оплетку и поэтому в процессе колебаний он почти не деформируется.

Таким образом, колебания хвостового плавника дельфина в жидкости можно представлять, как колебания абсолютно жесткого, непроницаемого, симметричного изолированного крыла в идеальной несжимаемой невесомой безвихревой среде. Два дополнительных упрощения – замена крыла бесконечно тонкой пластиной бесконечного размаха сводят постановку задачи к следующей.

### 1.2. Физическая постановка задачи

Пусть среда  $\Omega$  является сплошной и обладает свойствами:

– идеальности:

$$P = -pE, \quad (1)$$

где  $P$  – тензор напряжений;  $p$  – давление;  $E$  – метрический тензор;

– несжимаемости:

$$\frac{dV}{dt} = 0, \quad \forall t, \quad \forall V \in \Omega, \quad (2)$$

где  $V$  – произвольный жидкий объем среды  $\Omega$ ;  $t$  – время;

– невесомости (отсутствуют внешние объемные силы):

$$\int_V \vec{R}(x, y, z, t) dV = 0, \quad \forall t, \quad (x, y, z) \in V \in \Omega, \quad (3)$$

где  $\vec{R}$  – главный вектор объемных сил, приложенных к точке произвольного жидкого объема среды.

Во всех точках среды в начальный момент времени предполагается отсутствие вихрей:

$$\text{rot } \vec{W}(x, y, z, t) = 0, \quad t = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (4)$$

где  $\vec{W}$  – абсолютная скорость движения точек среды.

В начальный момент времени среда предполагается неподвижной:

$$\vec{W}(x, y, z, t) = 0, \quad t = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega. \quad (5)$$

Для простоты ограничимся плоским случаем. Введем две системы координат (СК) – абсолютную  $OXY$ , неподвижную относительно бесконечно удаленной точки среды и относительную  $O'X'Y'$ , связанную с движущимся крылом  $S$ , с которого сходит вихревая пелена  $\sigma$ . Во всех случаях, кроме отдельно оговоренных, будем использовать абсолютную СК  $OXY$ . Все силы будем считать приложенными к единице массы (крыла или среды, в зависимости от их характера). Здесь и далее индексы обозначают: “–” – нижняя сторона крыла или вихревой пелены, “+” – верхняя; 1 – задняя кромка крыла, 2 – передняя; “0” – принадлежность точки к крылу или вихревой пелене.

Будем предполагать, что крыло является:

– бесконечно тонким (при этом крайние кромки крыла  $B_1$  и  $B_2$  станут острыми кромками):

$$\exists \{T_{k\pm}\} \in \pm \vec{n}_S(T_0) : \lim_{k \rightarrow \infty} \{T_{k+}\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \{T_{k-}\} = T_0, \quad T_0 \in S, \quad (6)$$

где  $T_0$  – произвольная точка крыла;  $\vec{n}_S$  – вектор нормали к крылу в точке  $T_0$ ;  $T_k$  – точка, находящаяся в бесконечно малой окрестности  $T_0$ ;

– непроницаемым:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} W_{n_S}(x, y, t) = W_{n_S}^*(x_0, y_0, t), \quad \forall t, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (x_0, y_0) \in S \setminus (B_1 \cup B_2), \quad (7)$$

где  $W_{n_S}$  – проекция скорости точек среды, находящихся в бесконечно малой окрестности точки крыла  $(x_0, y_0)$ , на нормаль к крылу;  $W_{n_S}^*$  – проекция скорости движения точки крыла  $(x_0, y_0)$  на нормаль к крылу;

– нерастяжимым:

$$\frac{dL}{dt} = 0, \quad \forall t, \quad (8)$$

где  $L$  – длина крыла;

– прямолинейным.

Примем к рассмотрению модель циркуляционно-го обтекания крыла со сходом слоя потока  $\sigma$  с его поверхности. В общем случае, эпюра скоростей потока в поперечном сечении этого слоя будет несимметричной. Это означает, что движение там носит вращательный характер, то есть является вихревым. По аналогии с (6) будем считать этот слой бесконечно тонким:

$$\begin{aligned} \exists \{D_{k\pm}\} \in \pm \vec{n}_S(D_0) : \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \{D_{k+}\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \{D_{k-}\} = D_0, \quad D_0 \in \sigma, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $D_0$  – произвольная точка вихревого слоя  $\sigma$ ;  $\vec{n}_\sigma$  – вектор нормали к вихревому слою в точке  $D_0$ ;  $D_k$  – точка, находящаяся в бесконечно малой окрестности  $D_0$ .

В таком случае вихревой слой  $\sigma$  будет представлять собой вихревую пелену, характеризующуюся тем, что скорость потока в любой ее точке терпит разрыв  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} | \vec{W}_+(x_0, y_0, t) - \vec{W}_-(x_0, y_0, t) | = \\ = \gamma(x_0, y_0, t), \quad t > \tilde{t}, \quad (x_0, y_0) \in \sigma, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\tilde{t}$  – время, при котором  $(x_0, y_0) \in S$ .

И, наконец, принимая во внимание, что задняя кромка крыла  $B_1$  является острой, в качестве последнего предположения примем постулат Кутта–Жуковского–Чаплыгина о конечности скорости потока в ее окрестности. Данное ограничение будет выполняться при отсутствии перетекания потока через заднюю кромку:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_1, y_1)} \int_C \vec{W}(x, y, t) \cdot \delta \vec{r}(x, y, t) = 0, \\ t > 0, \quad (x, y) \in C \in \Omega \cup \sigma, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки  $(x, y)$ .

Теперь укажем следствия, вытекающие из сделанных предположений относительно свойств среды, ее границ  $S$  и  $\sigma$  ( $\Omega \cap (S \cup \sigma) = 0$ ) и характера потока вблизи них, которые будут использоваться в дальнейшем.

**Следствие 1.** В предположениях (1)–(3) справедлива динамическая теорема Кельвина о том, что циркуляция скорости по жидкому замкнутому контуру  $C$  не меняется с течением времени:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_C \vec{W}(x, y, t) \cdot \delta \vec{r}(x, y, t) = 0, \\ \forall t, \quad (x, y) \in C \in \Omega. \end{aligned} \quad (12)$$

**Следствие 2.** При выполнении условий (1)–(4), справедливо утверждение теоремы Лагранжа о том, что вихри будут отсутствовать и во все последующие моменты времени во всех точках среды  $\Omega$ :

$$\text{rot } \vec{W}(x, y, t) = 0, \quad \forall t, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (13)$$

**Следствие 3.** Из выражения (13) следует, что если в некоторый момент времени среда будет приведена в движение, то это движение будет потенциальным во все последующие моменты времени, т. е. должна существовать такая скалярная функция  $\Phi$ , для которой бы выполнялось

$$\begin{aligned} \vec{W}(x, y, t) = \text{grad } \Phi(x, y, t), \\ t > 0, \quad (x, y) \in \Omega. \end{aligned} \quad (14)$$

**Следствие 4.** Значения потенциала  $\Phi$  по разные стороны произвольной точки  $(x_0, y_0)$  крыла  $S$  или вихревой пелены  $\sigma$  будут, вообще говоря, различны, а их разность  $\Delta\Phi$  равняться циркуляции скорости по контуру  $C$ , охватывающему  $S$  либо  $\sigma$  с какого-либо края, в этой точке:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{W}(x, y, t) \cdot \delta \vec{r}(x, y, t) = \int_C \text{grad } \Phi(x, y, t) \cdot \delta \vec{r}(x, y, t) = \\ = \int_{(x_0, y_0)_-}^{(x_0, y_0)_+} \delta \Phi(x, y, t) = \Phi_-(x_0, y_0, t) - \Phi_+(x_0, y_0, t), \\ t > \tilde{t}, \quad (x_0, y_0) \in S \cup \sigma, \quad (x, y) \in C \in \Omega, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\delta \vec{r}$  – элемент контура  $C$ .

**Следствие 5.** Условие (2) означает, что среда является баротропной. Следовательно, условия (1)–(3) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы вихревая пелена  $\sigma$  была заморожена в среду. Для плоского случая условие замороженности упрощается:

$$\frac{d \text{rot } \vec{W}(x_0, y_0, t)}{dt} = 0, \quad t > \tilde{t}, \quad (x_0, y_0) \in \sigma, \quad (16)$$

т. е. точки  $\sigma$  должны двигаться по траекториям жидких частиц:

$$\begin{aligned} \vec{W}(x_0, y_0, t) = \vec{W}_0(x_0, y_0, t), \\ t > \tilde{t}, \quad (x_0, y_0) \in \sigma, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\vec{W}$  – скорость движения точки  $(x_0, y_0)$  вихревой пелены  $\sigma$ .

Поэтому вихревую пелену  $\sigma$  будем называть свободной.

**Следствие 6.** Из (17) следует, что нормальные проекции скорости по разные стороны свободной вихревой пелены  $\sigma$  равны между собой:

$$W_{n_{\sigma+}}(x_0, y_0, t) = W_{n_{\sigma-}}(x_0, y_0, t), \quad (18)$$

$$t > \tilde{t}, \quad (x_0, y_0) \in \sigma.$$

(В противном случае в точках  $(x_0, y_0)$  нарушалась бы сплошность среды  $\Omega$ .)

**Следствие 7.** Из соотношений (18) и (10), а также (6) и (9) следует, что скорость потока в точках свободной вихревой пелены  $\sigma$  и крыла  $S$  терпит касательный разрыв величины  $\gamma$ :

$$|\vec{W}_{m_{\sigma+}}(x_0, y_0, t) - \vec{W}_{m_{\sigma-}}(x_0, y_0, t)| = \gamma(x_0, y_0, t), \quad t > \tilde{t}, \quad (x_0, y_0) \in S \cup \sigma. \quad (19)$$

Отметим, что величина  $\gamma$  в формулах (10) и (19), по определению вихревой пелены, имеет физический смысл погонной вихревой интенсивности, или плотности вихревого слоя.

**Следствие 8.** Из выражений (17), (15) и (12) следует, что скачок потенциала на свободной вихревой пелене  $\sigma$  не меняется со временем:

$$\frac{d}{dt} \Delta \Phi(x_0, y_0, t) = 0, \quad t > \tilde{t}, \quad (x_0, y_0) \in \sigma. \quad (20)$$

**Следствие 9.** Из соотношения (11) следует, что линия (в плоском случае – точка) схода вихревой пелены  $\sigma$  должна совпадать с задней кромкой крыла:

$$S \cap \sigma = B_1, \quad t > 0. \quad (21)$$

**Следствие 10.** При переходе через свободную вихревую пелену  $\sigma$  давление  $P$  будет меняться непрерывно.

Для доказательства воспользуемся интегралом Коши–Лагранжа в предположениях (2), (3), записав его в локальной подвижной системе координат, связанной с произвольным участком вихревой пелены  $\sigma$ :

$$2 \frac{\partial' \Phi(x, y, t)}{\partial t} + \vec{W}_r^2(x, y, t) - \vec{W}^{*2}(x, y, t) + 2 \frac{P(x, y, t) - P_\infty}{\rho} = 0, \quad t > \tilde{t}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (22)$$

где  $\vec{W}^*$  – переносная скорость движения точек среды, то есть скорость движения подвижной системы координат;  $\vec{W}_r$  – относительная скорость движения точек среды;  $P_\infty$  – давление в бесконечно

удаленной точке;  $\rho$  – плотность среды; знак ' означает дифференцирование в подвижной СК.

Скорости в уравнении (22) связаны соотношением

$$\vec{W}(x, y, t) = \vec{W}^*(x, y, t) + \vec{W}_r(x, y, t), \quad (23)$$

$$\forall t, \quad (x, y) \in \Omega \cup S \cup \sigma.$$

Применим выражение (22) к верхней (+) и нижней (–) сторонам свободной вихревой пелены  $\sigma$ . Тогда для скачка  $\Delta P = P_- - P_+$  получим

$$\Delta P(x, y, t) = \frac{\rho \vec{W}_-^{*2}(x, y, t)}{2} - \frac{\rho \vec{W}_+^{*2}(x, y, t)}{2} + \frac{\rho \vec{W}_{r+}^2(x, y, t)}{2} - \frac{\rho \vec{W}_{r-}^2(x, y, t)}{2} - \rho \frac{\partial' \Delta \Phi(x, y, t)}{\partial t}, \quad t > \tilde{t}, \quad (x, y) \in \sigma. \quad (24)$$

Так как переносные скорости  $\vec{W}_+^*$  и  $\vec{W}_-^*$  относятся к одной и той же локальной системе координат, то они равны между собой. Полуразность  $(\vec{W}_{r+}^2 - \vec{W}_{r-}^2)/2$  равна нулю, так как каждая точка свободной вихревой пелены  $\sigma$  движется со скоростью жидких частиц, то есть не перемещается относительно них (см. следствие 5). Последнее слагаемое в выражении (24) также равно нулю, так как скачок потенциала  $\Delta \Phi$  на  $\sigma$  не зависит от времени (см. следствие 8). Следовательно,

$$\Delta P(x, y, t) = 0, \quad t > \tilde{t}, \quad (x, y) \in \sigma. \quad (25)$$

**Замечание 1.** Принятая модель циркуляционного обтекания, допускающая образование вихревой пелены за крылом в процессе его движения, не противоречит теореме Лагранжа (13) и динамической теореме Кельвина (12), так как в этих теоремах сохранение завихренности и циркуляции выполняется не для области пространства, а для жидкого объема среды. При этом границей рассматриваемой среды  $\Omega$  является совокупность  $S$  и  $\sigma$ , причем в область  $\Omega$  сами  $S$  и  $\sigma$  не входят.

### 1.3. Формулировка начально-краевой задачи

Основываясь на сделанных предположениях относительно свойств среды  $\Omega$  и движущихся в ней границ  $S$  и  $\sigma$ , сформулируем начально-краевую задачу.

Закон сохранения массы произвольного жидкого объема среды, с учетом условия (2), преобразуется в уравнение неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{W}(x, y, t) = 0, \quad \forall t, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (26)$$

Тогда из выражения (26) с учетом (14) получим уравнение Лапласа для потенциала  $\Phi$  скорости движения точек среды  $\Omega$ :

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi(x, y, t) = 0, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (27)$$

Запишем граничные условия для уравнения Лапласа (27).

Условие непроницаемости границы  $S$  (7) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \vec{n}_S(x_0, y_0, t) \cdot \operatorname{grad} \Phi(x, y, t) = \\ = \vec{n}_S(x_0, y_0, t) \cdot \vec{W}^*(x_0, y_0, t), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\forall t, \quad (x_0, y_0) \in S \setminus (B_1 \cup B_2), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Из условий (17) и (14) для точек среды, граничащих со свободной границей  $\sigma$ , имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \vec{n}_\sigma(x_0, y_0, t) \cdot \operatorname{grad} \Phi(x, y, t) = \\ = \vec{n}_\sigma(x_0, y_0, t) \cdot \vec{W}(x_0, y_0, t), \end{aligned} \quad (29)$$

$$t \geq \tilde{t}, \quad (x_0, y_0) \in \sigma, \quad (x, y) \in \Omega.$$

На основании выражений (20) и (21) для скачка потенциала в точках свободной границы  $\sigma$  находим:

$$\Delta \Phi(x_0, y_0, t) = \Delta \Phi(x_1, y_1, \tilde{t}), \quad (30)$$

$$t \geq \tilde{t}, \quad (x_0, y_0) \in \sigma.$$

Из условий (5) и (14) для точки на бесконечности получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) - (x_0, y_0) \rightarrow \infty} \operatorname{grad} \Phi(x, y, t) = 0, \\ \lim_{(x, y) - (x_0, y_0) \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi(x, y, t)}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$t, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (x_0, y_0) \in S \cup \sigma.$$

Таким образом, мы имеем внешнюю смешанную краевую задачу (27)–(31) для уравнения Лапласа.

Как известно [17, 18], внешняя смешанная краевая задача для уравнения Лапласа имеет решение с точностью до константы при условии

$$\oint_S W_{n_S}^*(x_0, y_0, t) = 0. \quad (32)$$

Данное условие выражает закон сохранения массы внутри границы  $S$  (в общем случае – произвольной замкнутой), что в плоском случае для несжимаемой среды эквивалентно сохранению площади внутри непроницаемого контура  $S$ , или нулевому балансу потока через его поверхность. В

силу принятых ограничений (7) и (8), в рассматриваемом случае это условие будет выполняться для любого момента времени, то есть существование решения задачи (27)–(31) обеспечено.

Рассмотрим вопрос обеспечения единственности решения задачи. В силу того, что в плоском случае область  $\Omega$  является двусвязной, циркуляция скорости по замкнутому контуру  $C$ , охватывающему границу  $S \cup \sigma$ , в общем случае может быть отлична от нуля, а потенциал  $\Phi$ , в силу следствия 4, многозначной функцией. Без ограничения общности, в качестве контура  $C$  можно взять жидкий контур. Тогда, в силу следствия 1, циркуляция по нему будет постоянной. Отсюда приходим к следующему условию обеспечения единственности решения поставленной задачи:

$$\begin{aligned} \oint_C \operatorname{grad} \Phi(x, y, t) \cdot \delta \vec{r}(x, y, t) = \operatorname{const}, \\ \forall t, \quad (x, y) \in C \in \Omega, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $C$  – замкнутый жидкий контур, охватывающий  $S \cup \sigma$ .

Краевая задача (27)–(33) с дополнительным ограничением (33) на циркуляцию вокруг крыла с вихревой пеленой будет иметь единственное решение.

В дальнейшем будем полагать  $\operatorname{const} = 0$ .

Запишем задачу Коши для нахождения неизвестной формы свободной вихревой пелены  $\sigma$  в произвольный момент времени  $t$ :

$$\begin{cases} \vec{r}(x_0, y_0, t) = \vec{r}(x_1, y_1, \tilde{t}), & t = \tilde{t}, \\ \frac{d\vec{r}(x_0, y_0, t)}{dt} = \vec{W}(x_0, y_0, t), & t > \tilde{t}, \end{cases} \quad (34)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор произвольной точки  $(x_0, y_0) \in \sigma$ .

Как видно, обе задачи – краевая (27)–(33) и начальная (34) – должны решаться совместно.

Для начально-краевой задачи (27)–(34), принимая во внимание выражения (4), (5) и (33), начальными условиями будут известная форма границ и значение потенциала в момент  $t=0$ :

$$\begin{aligned} S \cup \sigma = S, \quad \Phi(x, y, t) = 0, \\ t = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \end{aligned} \quad (35)$$

**Замечание 2.** Скорости точек свободной вихревой пелены  $\vec{W}$ , входящие в уравнения (29) и (34), являются функционалами от всех предшествующих положений границ  $S$  и  $\sigma$ , которые необходимо находить в процессе решения задачи.

Поэтому, хотя исходное уравнение (27) и является линейным, вследствие нелинейности граничного условия (29), начально-краевая задача (27)–(35) является нелинейной.

**Замечание 3.** Задача Коши (34), а вместе с ней и вся задача (27)–(35) в области  $\Omega \setminus \varepsilon(B_2)$ , где  $\varepsilon(B_2)$  – бесконечно малая окрестность вокруг передней кромки крыла, будет иметь единственное решение.

Действительно, так как правая часть в (34), в соответствии со свойством (17), выражается через производные от потенциала  $\Phi$  (гармоническую функцию в  $\Omega$ ) и содержит единственную особую точку типа полюс –  $B_2$ , то в области  $\Omega \setminus \varepsilon(B_2)$  для компонент вектора  $\vec{W}(x, y, t)$  будут выполняться условия теоремы Коши:

1) функции  $\tilde{W}_x$  и  $\tilde{W}_y$  непрерывны и ограничены в  $\Omega \setminus \varepsilon(B_2)$ ;

2) условие Липшица с константой Липшица  $L$ :

$$|\tilde{W}_x(\bar{x}, \bar{y}, t) - \tilde{W}_x(x, y, t)| \leq L(|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y|),$$

$$|\tilde{W}_y(\bar{x}, \bar{y}, t) - \tilde{W}_y(x, y, t)| \leq L(|\bar{x} - x| + |\bar{y} - y|),$$

$$\forall t, \quad \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega \setminus \varepsilon(B_2), \quad \forall (x, y) \in \Omega \setminus \varepsilon(B_2).$$

**Замечание 4.** В силу нелинейности смешанной начально-краевой задачи (27)–(35) вопрос о непрерывной зависимости решения от начальных и граничных данных (третье условие корректности) остается открытым. Поэтому сходимость решения поставленной задачи необходимо исследовать численно.

Отметим, однако, что для задач со свободными границами, на которых гидродинамическое давление принимает заранее заданные значения, удалось показать [19], что в классе аналитических функций их постановка корректна, то есть решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных и граничных данных для достаточно малого интервала времени.

**Замечание 5.** После решения кинематической задачи (27)–(35), используя интеграл Коши-Лагранжа, можно определить динамические характеристики крыла и поле давления вокруг него.

## 2. РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

### 2.1. Сведение к системе сингулярных интегрально-дифференциальных уравнений

Решение уравнения (27) будем искать в виде суммы потенциалов от непрерывно распределенных по границам области гидродинамических осо-

бенностей:

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, y_0, t) = & \int_S g(x, y, t) G(x_0, y_0, x, y, t) dl_S + \\ & + \int_\sigma g(x, y) G(x_0, y_0, x, y, t) dl_\sigma, \end{aligned} \quad (36)$$

$$(x, y) \in S \cup \sigma, \quad (x_0, y_0) \in \Omega,$$

где  $g$  – плотность потенциала (функция, удовлетворяющая условию Гельдера);  $G$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа (потенциал точечной особенности).

Интегралы по  $S$  и  $\sigma$  – криволинейные интегралы 1-го рода. Плотность потенциала во втором слагаемом не зависит от времени в силу следствия 8 общей постановки задачи (формула (20)) и того обстоятельства, что, как будет показано ниже,  $g = \Delta \Phi$ .

При выборе типа особенностей будем учитывать необходимость обеспечить тангенциальный разрыв скорости на поверхности крыла и свободной вихревой пелене (свойство (19)), а также затухание возмущений на бесконечности. Такими свойствами обладают потенциалы двойного слоя и слоя вихрей. Поэтому, используя какой-либо из указанных потенциалов, останется лишь определить его плотность так, чтобы удовлетворить условию непроницаемости крыла. Подстановка (36) в граничное условие даст для отыскания распределения плотности по границам интегрально-дифференциальное уравнение.

Искомый потенциал скорости (36) представим в виде потенциала двойного слоя:

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, y_0, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{S \cup \sigma} g(x, y, t) \frac{\partial}{\partial n_\Sigma(x, y, t)} \times \\ & \times \left( \ln \frac{1}{|\vec{r}(x, y, t) - \vec{r}(x_0, y_0)|} \right) dl_\Sigma, \end{aligned} \quad (37)$$

$$(x_0, y_0) \in \Omega,$$

где  $n_\Sigma$  – нормаль к границе  $\Sigma = S \cup \sigma$  в точке  $(x, y)$ .

Потенциал  $\Phi$  и его производная обладают следующими предельными свойствами [17, 18, 20]:

$$\begin{aligned} \Phi_\pm(x_0, y_0, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{S \cup \sigma} g(x, y, t) \times \\ & \times \frac{(\vec{r}(x, y, t) - \vec{r}(x_0, y_0, t)) \cdot \vec{n}_\Sigma(x, y, t)}{|\vec{r}(x, y, t) - \vec{r}(x_0, y_0, t)|^2} dl_\Sigma \pm \\ & \pm \frac{1}{2} g(x_0, y_0, t), \quad (x_0, y_0) \in S \cup \sigma, \end{aligned} \quad (38)$$



$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi_{\pm}(x_0, y_0, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{S \cup \sigma} g'_{\ell_{\Sigma}}(x, y, t) \times \\ &\times \frac{\vec{m}(x, y, t)((\vec{r}(x, y, t) - \vec{r}(x_0, y_0, t)), \vec{n}(x, y, t)) - \\ &\quad | \vec{r}(x, y, t) - \vec{r}(x_0, y_0, t) |^2}{- \vec{r}(x_0, y_0, t) |^2} d\ell_{\Sigma} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \vec{m}(x, y, t) g'_{\ell_{\Sigma}}(x_0, y_0, t), \quad (x_0, y_0) \in S \cup \sigma, \end{aligned} \quad (39)$$

где  $m_{\Sigma}$  – касательная к границе  $\Sigma = S \cup \sigma$  в точке  $(x, y)$ .

Из выражения (38), в частности, следует, что  $\Delta\Phi = g$ . Вспоминая следствие 4 общей постановки задачи (формула (15)) о том, что скачок потенциала при переходе через границу с тангенциальным разрывом скорости (см. следствие 7) в точке  $(x_0, y_0)$  равен циркуляции скорости по разомкнутому контуру, охватывающему эту поверхность с какого-либо конца и опирающемуся на нее с разных сторон в этой точке, приходим к выводу, что физический смысл плотности потенциала  $g$  – циркуляции скорости.

Учитывая, что при положительном обходе контура  $\Sigma$  по часовой стрелке

$$\begin{cases} \vec{m}(x, y, t) = x'_{\ell}(t) \vec{i} + y'_{\ell}(t) \vec{j}, \\ \vec{n}(x, y, t) = -y'_{\ell}(t) \vec{i} + x'_{\ell}(t) \vec{j}, \end{cases} \quad (40)$$

в развернутом виде будем иметь:

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm}(x_0, y_0, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{S \cup \sigma} g(x, y, t) \times \\ &\times \frac{(y_0 - y) x'_{\ell_{\Sigma}} - (x_0 - x) y'_{\ell_{\Sigma}}}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} d\ell_{\Sigma} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} g(x_0, y_0, t), \quad (x_0, y_0) \in S \cup \sigma, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \text{grad } \Phi_{\pm}(x_0, y_0, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{S \cup \sigma} g'_{\ell_{\Sigma}}(x, y, t) \times \\ &\times \frac{(y_0 - y) \vec{i} - (x_0 - x) \vec{j}}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} d\ell_{\Sigma} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} (x'_{0\ell_{\Sigma}} \vec{i} + y'_{0\ell_{\Sigma}} \vec{j}) g'_{\ell_{\Sigma}}(x_0, y_0, t), \\ &(x_0, y_0) \in S \cup \sigma. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь предполагается, что границы  $S$  и  $\sigma$  заданы параметрически:  $x = x(\ell, t)$ ,  $y = y(\ell, t)$ , а  $x'_{0\ell_{\Sigma}}(\ell, t)$ ,  $y'_{0\ell_{\Sigma}}(\ell, t)$  и  $g'_{\ell_{\Sigma}}(\ell, t)$  – производные по параметру  $\ell$  в точке  $(x_0, y_0)$ .

Следовательно, для предельных значений нормальных производных имеем

$$\frac{\partial \Phi_{+}}{\partial n_{\Sigma}}(x_0, y_0, t) = \frac{\partial \Phi_{-}}{\partial n_{\Sigma}}(x_0, y_0, t), \quad (43)$$

$$(x_0, y_0) \in S \cup \sigma,$$

что соответствует свойству (18) о равенстве нормальных проекций предельных скоростей по разные стороны свободной вихревой пленки, однако равенство (43) показывает, что этим свойством будет обладать любая граница, моделируемая при помощи потенциала двойного слоя.

Отметим, что выражение для  $\text{grad } \Phi$  совпадает с выражением для градиента потенциала вихревого слоя с погонной интенсивностью

$$\gamma(x, y, t) = g'_{\ell_{\Sigma}}(x, y, t), \quad (44)$$

непрерывно распределенного по тем же границам, что будет использовано при построении дискретной модели.

Действительно, записывая первую формулу Сохоцкого–Племеля для скачка  $\text{grad } \Phi$ , получим аналог выражения (19), в котором роль плотности вихревого слоя  $\gamma$  играет производная по дуге от плотности потенциала двойного слоя  $g'_{\ell_{\Sigma}}$ . Записывая вторую формулу Сохоцкого–Племеля для полусуммы  $(\text{grad } \Phi_{+} + \text{grad } \Phi_{-})/2$ , получаем, что слагаемые в выражениях (39) и (42), содержащие интегралы, имеют физический смысл скорости среды в точках границ  $S$  и  $\sigma$  при моделировании их вихревым слоем и понимаемой в предельном смысле.

Плотность вихревого слоя в плоском случае можно рассматривать, как аксиальный вектор  $\vec{\gamma}$ :

$$\vec{\gamma}(x, y, t) = \vec{n}(x, y, t) \times \vec{m}(x, y, t) g'_{\ell_{\Sigma}}(x, y, t). \quad (45)$$

Таким образом, мы видим, что потенциал  $\Phi$  и его производная обладают всеми требуемыми разрывными свойствами на границах области.

Подставляя (37) в граничное условие (28), получим сингулярное уравнение, которое можно записать относительно плотности потенциала двойного слоя  $g$  либо плотности вихревого слоя  $\gamma$ .

Запишем граничное условие (28) в общей интегральной форме относительно плотности потенциала двойного слоя  $g$ :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_S(x_0, y_0, t)} \int_{S \cup \sigma} g(x, y, t) \frac{\partial}{\partial n_{\Sigma}(x, y, t)} \times \\ &\times \left( \ln \frac{1}{| \vec{r}(x, y, t) - \vec{r}(x_0, y_0, t) |} \right) d\ell_{\Sigma} = \\ &= \vec{W}^*(x_0, y_0, t) \cdot \vec{n}_S(x_0, y_0, t), \quad (x_0, y_0) \in S. \end{aligned} \quad (46)$$

Положение вихревой пелены  $\sigma$  определяется из решения задачи Коши (34). В соответствии с условием (20) о независимости скачка потенциала на вихревой пелене от времени и предельного свойства (41) можно записать, что

$$\frac{dg(x, y, t)}{dt} = 0, \quad (x, y) \in \sigma, \quad (47)$$

т.е. плотность двойного слоя на свободной границе  $\sigma$  зависит только от лагранжевых координат ее точек. Это значит, что  $g$  для каждой точки вихревой пелены достаточно определить один раз в момент схода этой точки с крыла. Во все последующие моменты времени  $g$  будет иметь прежнее значение. Поэтому, в уравнении (46) интеграл по свободной границе можно вынести в правую часть, как известный в каждый момент времени. Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_S(x_0, y_0, t)} \int_S g(x, y, t) \frac{\partial}{\partial n_S(x, y, t)} \times \\ & \times \left( \ln \frac{1}{|\vec{r}(x, y, t) - \vec{r}(x_0, y_0, t)|} \right) d\ell_S = \\ & = \vec{W}^*(x_0, y_0, t) \cdot \vec{n}_S(x_0, y_0, t) - \\ & - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_S(x_0, y_0, t)} \int_\sigma g(x, y) \frac{\partial}{\partial n_\sigma(x, y, t)} \times \\ & \times \left( \ln \frac{1}{|\vec{r}(x, y, t) - \vec{r}(x_0, y_0, t)|} \right) d\ell_\sigma, \\ & (x_0, y_0) \in S. \end{aligned} \quad (48)$$

Конкретизируем вид уравнения (48), используя параметрическое задание границ и учитывая формулы (40):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{y'_{0\ell_S}(y_0 - y) + x'_{0\ell_S}(x_0 - x)}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \times \\ & \times g'_{\ell_S}(x, y, t) d\ell_S = \vec{W}^*(x_0, y_0, t) \cdot \vec{n}_S(x_0, y_0, t) - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{y'_{0\ell_S}(y_0 - y) + x'_{0\ell_S}(x_0 - x)}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \times \\ & \times g'_{\ell_\sigma}(x, y, t) d\ell_\sigma, \quad (x_0, y_0) \in S. \end{aligned} \quad (49)$$

Уравнение (49) – сингулярное интегро-дифференциальное уравнение. Сингулярные интегралы в нем понимаются в смысле главного значения Коши. Отметим, что запись уравнения (49) относительно производной по дуге от плотности по-

тенциала двойного слоя  $g'_{\ell_\Sigma}$  (плотности вихревого слоя  $\gamma$  – см. (44)) преобразует его в сингулярное интегральное уравнение. Решение таких уравнений не единственно [21, 22]. Условие единственности решения сингулярного уравнения (49) совпадает с условием единственности (33) решения внешней краевой задачи (27)–(31):

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{S \cup \sigma} g'_{\ell_\Sigma}(x, y, t) d\ell_\Sigma = 0, \\ \forall t, \quad (x, y) &\in S \cup \sigma. \end{aligned} \quad (50)$$

В [23] для линейного нестационарного случая и такого же класса функций, в котором ищется решение данной задачи (ограниченных на задней кромке крыла и неограниченных на передней) показано, что единственность решения системы уравнений, аналогичной (49), (50), будет выполняться, если функция  $W^*$  удовлетворяет условию Гельдера на крыле и непрерывно дифференцируема по  $t$  в рассматриваемом промежутке.

Задачу Коши (34), учитывая формулы (17) и (42), можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{aligned} & \vec{r}(x_0, y_0, t) = \vec{r}(x_1, y_1, \tilde{t}), \\ & t = \tilde{t}, \quad (x_0, y_0) \in \sigma, \\ & \frac{d\vec{r}(x_0, y_0, t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{S \cup \sigma} g'_{\ell_\Sigma}(x, y, t) \times \\ & \times \frac{(y_0 - y)\vec{i} - (x_0 - x)\vec{j}}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} d\ell_\Sigma, \\ & t > \tilde{t}, \quad (x_0, y_0) \in \sigma. \end{aligned} \right. \quad (51)$$

Анализируя подынтегральное выражение в (51), можно заметить, что оно формально совпадает с формулой Био–Савара для прямолинейной вихревой нити бесконечного размаха с интенсивностью  $\gamma = g'_{\ell_\Sigma}$  и индуктивной скоростью, направленной по часовой стрелке.

Таким образом, решение начально-краевой задачи (27)–(35) для потенциала скорости свелось к решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения с начальными данными для скачка потенциала скорости (51), совместно с системой интегро-дифференциальных уравнений (49), (50) в классе функций, ограниченных на одном конце интервала и неограниченных на другом и удовлетворяющих условию Гельдера на  $S \cup \sigma \setminus \varepsilon(B_2)$ . Знание скачка потенциала на границе рассматриваемой области, как известно, даст

возможность найти поле течения во всей области  $\Omega$ .

Отметим, что основная трудность, которая возникает при попытке аналитического решения полученной системы уравнений (49)–(51), заключается в ее нелинейности, так как неизвестная граница  $\sigma$  входит в эти уравнения нелинейным образом. Поэтому для решения поставленной задачи будем привлекать численные методы.

## 2.2. Построение вычислительной модели

Так как скорости, индуцируемые двойным слоем, эквивалентны скоростям от соответствующего вихревого слоя, то в основу численного моделирования безотрывного колебания крыла положим усовершенствованный метод дискретных вихрей (УМДВ) [24].

В качестве характерного линейного размера возьмем длину хорды крыла  $b$ , а в качестве характерной скорости – продольную скорость  $\vec{U}$  движения крыла.

Тогда в безразмерном виде можно записать: координаты  $x = X/b$ ,  $y = Y/b$ ; линейную амплитуду  $a = A/b$ ; абсциссу оси вращения крыла в связанной СК ( $O'X'Y'$ )  $d = D/b$ ; время  $\tau = t |\vec{U}| / b$ ; угловую скорость  $\vec{\omega} = \vec{\Omega} b / |\vec{U}|$ ; продольную и поперечную скорости оси вращения  $\vec{u} = \vec{U} / |\vec{U}|$ ,  $\vec{v} = \vec{V} / |\vec{U}|$ ; переносную скорость точек крыла  $\vec{w}^* = \vec{W}^* / |\vec{U}|$ ; частоту колебаний  $p^* = 2\pi\nu b / |\vec{U}|$ ; потенциал скорости  $\varphi = \Phi / (|\vec{U}| b)$ ; погонную вихревую интенсивность  $\vec{\gamma} = \vec{G} / |\vec{U}|$ ; коэффициент подсосывающей силы  $C_Q = 2 |\vec{Q}| b / \vec{U}^2$ ; коэффициент нормальной силы  $C_N = 2 |\vec{N}| b / \vec{U}^2$ ; коэффициент силы тяги  $C_T = 2 |\vec{F}| b / \vec{U}^2$ .

От непрерывной модели перейдем к дискретной. Дискретизация по пространственным переменным заключается в представлении непрерывных границ кусочно-непрерывными и последующей замене непрерывных вихревых слоев на каждом полученном участке дискретными вихрями.

Так как передняя кромка крыла должна обтекаться безотрывно, то с нее не будем моделировать сход вихревой пелены и поэтому на ней должен располагаться суммарный дискретный вихрь, обеспечивающий беспрепятственное перетекание потока. На задней кромке также должен располагаться дискретный вихрь, однако уже не суммарный, а свободный, сходящий в след за крылом [25]. Это обеспечивает выполнение постулата Кутта–Жуковского–Чаплыгина о конечности скорости потока в окрестности острой задней кромки (11). Вблизи задней кромки крыла вихревая ин-

тенсивность  $\gamma$  будет стремиться к нулю как  $\sqrt{x}$ , а вблизи передней – к бесконечности как  $1/\sqrt{x}$ , где  $x$  – расстояние от текущей точки на крыле до соответствующей кромки крыла [22].

Расположим крыло единичной длины вдоль оси  $O'X'$ , совместив кромку  $B_2$  с неограниченным поведением  $\gamma$  с началом СК, а кромку  $B_1$  – с точкой (1;0). Для упрощения выкладок будем считать, что неподвижная и подвижная СК в рассматриваемый (начальный) момент времени совпадают. Тогда вихревая интенсивность представима в виде

$$\gamma(x, \tau) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \phi(x, \tau),$$

где функция  $\phi$  удовлетворяет условию Гельдера с показателем  $\alpha$ ,  $0.5 < \alpha \leq 1$  для  $x \in [0, 1]$ .

Разобьем отрезок  $[0, 1]$  точками  $c_0 = 0, c_1, \dots, c_N = 1$  на  $N$  сегментов равной длины  $c_m - c_{m-1} = 1/N$ ,  $m = 1, \dots, N$ .

Введем семейство двух сеток  $x_1, \dots, x_N$  (координаты суммарных дискретных вихрей) и  $x_{01}, \dots, x_{0N}$  (координаты контрольных точек) такое, что

$$\begin{aligned} x_m &\in [c_{m-1}, c_m], & m = 1, \dots, N; \\ x_{0k} &\in (c_{k-1}, c_{k+1}), & k = 1, \dots, N-1, \\ x_{0N} &\in (c_{N-1}, c_N]. \end{aligned}$$

Тогда, задавая координаты суммарных дискретных вихрей в виде

$$x_m = (m-1 + \mu)/N, \quad m = 1, \dots, N,$$

координаты контрольных точек необходимо вычислять по формуле

$$x_{0k} = (k-1 + \nu_k(0) + \mu)/N, \quad k = 1, \dots, N,$$

где  $\mu = \text{const}$ , а  $\nu_k(0)$  задается в соответствии с локальной аппроксимацией вихревого слоя [26].

Перейдем к дискретизации полученной ранее системы интегро-дифференциальных уравнений (49)–(51). Уравнение (49) запишем относительно функции  $\gamma = g'_{\ell\Sigma}$  (см. (44)) в безразмерном виде, заменив интегралы суммами интегралов по элементарным участкам. Получим:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{N+1} \int_{S_m} \frac{y'_{0\ell\Sigma}(y_0 - y) + x'_{0\ell\Sigma}(x_0 - x)}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \times \\ &\times \gamma(x, y, \tau) d\ell_S = \vec{w}^*(x_0, y_0, \tau) \cdot \vec{n}_S(x_0, y_0, \tau) - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n \int_{\sigma_m} \frac{y'_{0\ell\Sigma}(y_0 - y) + x'_{0\ell\Sigma}(x_0 - x)}{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} \times \\ &\times \gamma(x, y, \tau) d\ell_\sigma, \quad (x_0, y_0) \in S. \end{aligned} \tag{52}$$

Здесь и далее подразумевается, что  $x = x(\ell, \tau)$ ,  $y = y(\ell, \tau)$ ,  $x_0 = x_0(\ell, \tau)$ ,  $y_0 = y_0(\ell, \tau)$ ,  $n = n(\tau)$ .

Первые  $N$  интегралов под знаками сумм представляют собой нормальные скорости, индуцируемые в точке  $(x_0, y_0)$  крыла  $S$  суммарным вихревым слоем, распределенным по соответствующему участку. В случае  $N + 1$  интеграла скорость индуцируется свободным вихревым слоем, расположенным в окрестности задней кромки. В соответствии с МДВ, будем полагать, что при  $N \rightarrow \infty$  влияние вихревого слоя элементарного участка эквивалентно влиянию дискретного вихря с циркуляцией, равной циркуляции скорости по этому участку. Пусть  $(x_m, y_m)$  – координаты вихрей, не совпадающие с  $(x_0, y_0)$ .

Запишем (52) в дискретном виде:

$$\sum_{m=1}^{N+1} \vartheta_{S_m}^{(n)}(x_0, y_0) \Gamma_{S_m}^{(n)} = 2\pi w_{n_S}^{*(n)}(x_0, y_0) - \sum_{m=1}^n \vartheta_{\sigma_m}^{(n)}(x_0, y_0) \Gamma_{\sigma_m}, \quad (53)$$

где

$$\vartheta_{S_m}^{(n)}(x_0, y_0) = \frac{y'_{0\ell_S}(y_0 - y_m) + x'_{0\ell_S}(x_0 - x_m)}{(x_0 - x_m)^2 + (y_0 - y_m)^2}$$

– величина нормальной скорости в точке  $(x_0, y_0)$  границы  $S$  от дискретного вихря, расположенного в некоторой точке  $(x_m, y_m)$  элементарного участка  $S_m$  (аналогично определяется  $\vartheta_{\sigma_m}^{(n)}(x_0, y_0)$ );

$$\Gamma_{S_m}^{(n)} = \int_{S_m} \gamma(x, y, \tau^{(n)}) d\ell_S,$$

$$\Gamma_{\sigma_m} = \int_{\sigma_m} \gamma(x, y, \tau^{(n)}) d\ell_\sigma$$

– циркуляции скорости по элементарным участкам  $S_m$  и  $\sigma_m$ .

Если условие (53) удовлетворяют в  $N$  точках, то получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^{N+1} \vartheta_{S_{mk}}^{(n)} \Gamma_{S_m}^{(n)} = 2\pi w_{n_{Sk}}^{*(n)} - \sum_{m=1}^n \vartheta_{\sigma_{mk}}^{(n)} \Gamma_{\sigma_m}, \quad (54)$$

где  $k = \overline{1, N}$  – контрольные точки, в которых удовлетворяется условие непротекания.

При этом контрольных точек будет на одну меньше, чем неизвестных дискретных вихрей. Так

как мы работаем в рамках модели идеальной баротропной среды с однозначным потенциалом внешних массовых сил, необходимое замыкание системы уравнений (54) можно осуществить при помощи подключения условия постоянства циркуляции по замкнутому жидкому контуру (теорема Кельвина (12)). Запишем это условие, используя соотношения (44) и (47) и учитывая, что в начальный момент времени вихрей в среде не было:

$$\int_{S \cup \sigma} \gamma(x, y, \tau) d\ell_\Sigma = 0.$$

В дискретном виде имеем:

$$\sum_{m=1}^{N+1} \Gamma_{S_m}^{(n)} + \sum_{m=1}^n \Gamma_{\sigma_m} = 0. \quad (55)$$

Задачу Коши (51) также запишем в дискретном виде:

$$\begin{cases} \vec{r}_m^{(n)} = \vec{r}_{B_1}^{(n^*)}, & n = n^*, \\ \vec{r}_m^{(n+1)} = \vec{r}_m^{(n)} + \vec{W}_m^{*(n)}(\tau^{(n+1)} - \tau^{(n)}), & n > n^*, \end{cases} \quad (56)$$

где  $1 \leq m \leq n$ ;  $n^*$  – номер временного слоя, на котором рассматриваемый дискретный вихрь сошел с крыла, а  $\vec{W}_m^{*(n)} = (\vec{W}_m^{*(n-1)} + \vec{W}_m^{*(n)})/2$  [24].

Таким образом, решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения с начальными данными (задача Коши) для скачка потенциала скорости (51), совместно с системой интегро-дифференциальных уравнений (49)–(50), к которым свелась внешняя начально-краевая задача для потенциала скорости (27)–(35), в свою очередь свелось к решению задачи Коши (56) для ансамбля дискретных вихрей, моделирующих свободную вихревую пелену. При этом на каждом временном слое задачи Коши необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений (54), (55) относительно неизвестных циркуляций дискретных вихрей.

### 2.3. Основные расчетные формулы

После решения кинематической задачи (54)–(56) нагрузки на крыле можно определить при помощи интеграла Коши–Лагранжа, записанного в системе координат, связанной с крылом.

Силы, приложенные к крылу, представим в безразмерном виде.

Нормальная сила:

$$\vec{n}(\tau) = \vec{j}'(\tau) C_N(\tau).$$

Подсасывающая сила:

$$\vec{q}(\tau) = -\vec{i}'(\tau) C_Q(\tau).$$

Главный вектор внешних сил:

$$\vec{r}(\tau) = \vec{n}(\tau) + \vec{q}(\tau).$$

Сила тяги:

$$\vec{f}(\tau) = (-\vec{i}' \cdot (\vec{n}(\tau) + \vec{q}(\tau))) \cdot (-\vec{i}').$$

Таким образом, все силы выражаются через нормальную и подсасывающую.

Так как крыло плоское, коэффициент нормальной силы можно представить в виде

$$C_N(\tau) = 2 \int_{(x_2, y_2)}^{(x_1, y_1)} \left( \vec{w}_{0r}(x_0^*, y_0^*, \tau) \cdot \vec{i}'(\tau) \vec{\gamma}(x_0^*, y_0^*, \tau) \times \right. \\ \left. \times \vec{j}'(\tau) \cdot \vec{i}'(\tau) + \frac{\partial'}{\partial \tau} \int_{(x_2, y_2)}^{(x_0^*, y_0^*)} \vec{\gamma}(x_0, y_0, \tau) \times \right. \\ \left. \times \vec{j}'(\tau) \cdot \delta \vec{\rho}_0(x_0, y_0, \tau) \right) dl_S, \quad (x_0^*, y_0^*) \in S, \quad (57)$$

$$x_2 \leq x_0 \leq x_0^* < x_1, \quad y_2 \leq y_0 \leq y_0^* < y_1.$$

где  $\vec{w}_{0r}$  – относительная скорость среды в точках вихревого слоя, заменяющего крыло;  $\vec{\rho}_0$  – радиус-вектор точки  $(x_0, y_0)$ , принадлежащей крылу.

В дискретном виде имеем:

$$C_N^{(n)} = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^N \left( N \vec{w}_{0r m}^{(n)} \cdot \vec{i}'^{(n)} \vec{\Gamma}_{S m}^{(n)} \times \right. \\ \left. \times \vec{j}'^{(n)} \cdot \vec{i}'^{(n)} + \frac{\partial'}{\partial \tau} \sum_{k=1}^m \left( \vec{\Gamma}_{S k}^{(n)} \times \vec{j}'^{(n)} \cdot \vec{i}'^{(n)} \right) \right). \quad (58)$$

Известно, что при обтекании потоком реальной жидкости профилированных тонких крыльев, в зависимости от величины угла атаки, возможны два режима обтекания передней кромки – отрывной и безотрывной. В случае безотрывного режима из-за интенсивного перетекания потока через переднюю кромку, в ее окрестности образуется область пониженного давления, которая обуславливает появление подсасывающей силы. Л.И.Седовым показано [2], что для бесконечно тонких крыльев разность касательных скоростей при стремлении к передней кромке имеет особенность вида  $1/\sqrt{x}$ , где  $x$  – расстояние до передней кромки. Это дает возможность находить подсасывающую силу при

численном моделировании колебаний крыла с нулевой толщиной. Применение теоремы об изменении количества движения к объему жидкости внутри круга бесконечно малого радиуса с центром в передней кромке крыла дает

$$C_Q(\tau) = \frac{\pi}{2} A^2(\tau), \quad (59)$$

где

$$A(\tau) = \lim_{\vec{\rho}_0(\tau) \rightarrow \vec{\rho}_{B_2}(\tau)} \left( \sqrt{|\vec{\rho}_{B_2}(\tau) - \vec{\rho}_0(\tau)|} |\vec{\gamma}(x_0, y_0, \tau)| \right),$$

где  $\vec{\rho}_{B_2}$  – радиус-вектор передней кромки.

Аппроксимация интенсивности вихревого слоя в виде

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{\sqrt{|\vec{\rho}_{B_2}(\tau) - \vec{\rho}_0(\tau)|}} \left( A(\tau) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{m-1} a_j |\vec{\rho}_{B_2}(\tau) - \vec{\rho}_{0j}(\tau)| \right), \\ a_j = \text{const}, \quad m = \overline{1, N}$$

позволяет выразить  $A(\tau)$  через циркуляции дискретных вихрей вблизи передней кромки [26]:

$$A(\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \sum_{p=j}^m \left[ \Gamma_j(\tau) \sum_{p=j}^m \frac{(-1)^{p+1} m!}{\sqrt{p}(m-p)! p!} \right], \quad (60)$$

где  $\varepsilon$  – мера дискретности, равная  $1/N$ .

Теперь можно найти пропульсивные характеристики крыла.

Для коэффициента средней силы тяги имеем:

$$C_T = -\frac{1}{T} \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \vec{i}' \cdot (\vec{n}(\tau) + \vec{q}(\tau)) d\tau, \quad (61)$$

где  $\tau_0$  – произвольный момент времени;  $T$  – период колебаний.

КПД крыльцевого движителя, по определению, есть отношение средней мощности, отобранной крылом за период колебаний для продвижения в требуемом направлении, к средней мощности за период, затраченной на производство колебаний:

$$\eta = \frac{C_{W^*}}{C_W}. \quad (62)$$

Будем предполагать, что крыло находится в таком режиме движения, при котором продольную скорость  $\vec{U}$  движения крыла можно считать постоянной. Это позволит нам не решать задачу

в динамике (для чего понадобилось бы рассчитывать нестационарную силу сопротивления), считая, что силы, действующие на крыло вдоль оси ( $O'X'$ ) уже находятся в динамическом равновесии.

Выражение для коэффициента средней отобранной (полезной) мощности имеет вид

$$C_{W^*} = \frac{1}{T} \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \left( \vec{n}(\tau) + \vec{q}(\tau) \right) \cdot \vec{u} d\tau. \quad (63)$$

Выражение для коэффициента средней затраченной мощности имеет вид

$$C_W = -\frac{1}{T} \int_{\tau_0}^{\tau_0+T} \left[ \left( \vec{n}(\tau) + \vec{q}(\tau) \right) \cdot \vec{v}(\tau) + \left( \vec{p}(\tau) - \vec{p}^0(\tau) \right) \times \left( \vec{n}(\tau) + \vec{q}(\tau) \right) \cdot \vec{\omega}(\tau) \right] d\tau. \quad (64)$$

Перейдем к заданию закона колебаний хвостового плавника дельфина. Наиболее полный набор кинематических характеристик колеблющегося хвостового плавника дельфина, по-видимому, содержится в работе [15], в которой приведены результаты экспериментальных исследований в биогидродинамическом канале кинематики хвостового плавника дельфина афалины (*Tursiops truncatus*). При обработке материалов киносъемки отбирался режимы равномерного прямолинейного плавания дельфина без вращений хвостового плавника вокруг корневой хорды (основной рабочий режим плавания).

На основании данных работы [15], колебания хвостового плавника дельфина (крыла) вместе со связанной СК ( $O'X'Y'$ ) можно приближенно представить в виде суммы:

– возвратно-вращательных движений вокруг оси ( $x^0, y^0$ ):

$$\beta(\tau) = \theta \cos(p^* \tau + \delta), \quad (65)$$

где  $\beta$  – угол перекладки крыла;  $\theta$  – угловая амплитуда колебаний крыла;  $p^*$  – число Струхаля;  $\delta$  – фазовый сдвиг между вращательными и поступательными колебаниями;

– и возвратно-поступательных движений этой оси в плоскости, перпендикулярной корневой хорде (оси ( $O X$ )) и вертикальной оси:

$$y^0(\tau) = a \cos(p^* \tau). \quad (66)$$

Для угловой и линейных скоростей крыла имеем:

$$\vec{\omega}(\tau) = \dot{\beta}(\tau) \vec{i} \times \vec{j},$$

$$\vec{v}(\tau) = \vec{j} \dot{y}^0(\tau), \quad (67)$$

$$\vec{u} = -\vec{i}.$$

При наличии гармонических поступательных колебаний типа (66) удобно рассматривать поведение пропульсивных характеристик крыла в зависимости от его относительной скорости:

$$\lambda_p = \frac{|\vec{U}|}{|\vec{V}_{max}|} = \frac{1}{ap^*}.$$

Этот параметр характеризует форму траектории (ее максимальный угол наклона к оси ( $O X$ )), которую описывает ось вращения крыла.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Вопросу расчета пропульсивных характеристик крыла-двигателя посвящен обширный цикл исследований. Преобладающая их часть основана на приближениях линейной теории крыла и поэтому полученные в них результаты ограничены малыми амплитудами и частотами колебаний. Работы, выполненные в нелинейной постановке, не имели достоверных результатов для колебаний крыла с повышенными частотами. Применение УМДВ в сочетании с методологией локальной аппроксимации вихревого слоя [26] позволило достоверно рассчитывать пропульсивные характеристики плавникового двигателя в широком амплитудно-частотном диапазоне для колебаний крыла с двумя степенями свободы [27].

На рис. 1 и 2 показано сопоставление результатов расчета пропульсивных характеристик плавникового двигателя, колеблющегося с двумя степенями свободы, полученных в рамках построенной нелинейной модели, с результатами расчетов, основанных на линейной теории [3], а также с результатами, основанными на методе вихревых поверхностей [14]. В упомянутых работах вместо коэффициента силы тяги  $C_T$  использовались приведенные коэффициенты  $\hat{k}_T$  и  $k_T$ , связанные с  $C_T$  следующим образом:

$$\hat{k}_T = \frac{C_T \vec{U}^2}{\vec{V}_{max}^2} = \frac{C_T}{a^2 p^{*2}};$$

$$k_T = \frac{C_T \vec{U}^2}{\vec{U}^2 + \vec{V}_{max}^2} = \frac{C_T}{1 + a^2 p^{*2}}.$$

На рис. 1 представлены результаты сравнительных расчетов коэффициента средней силы тяги, и КПД крыла-двигателя, с линейной теорией [3], в зависимости от числа Струхаля для случая

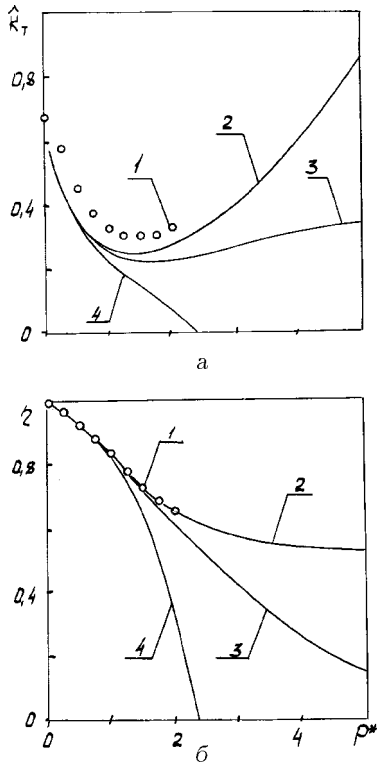


Рис. 1. Сравнение по  $\hat{k}_T$  и  $\eta$  с линейной теорией [3] ( $d=0, \delta = -\pi/2, \theta=0.8$ ): 1 (точки) – [3]; 2 –  $\alpha=0.01$ ; 3 –  $\alpha=0.2$ ; 4 –  $\alpha=0.4$

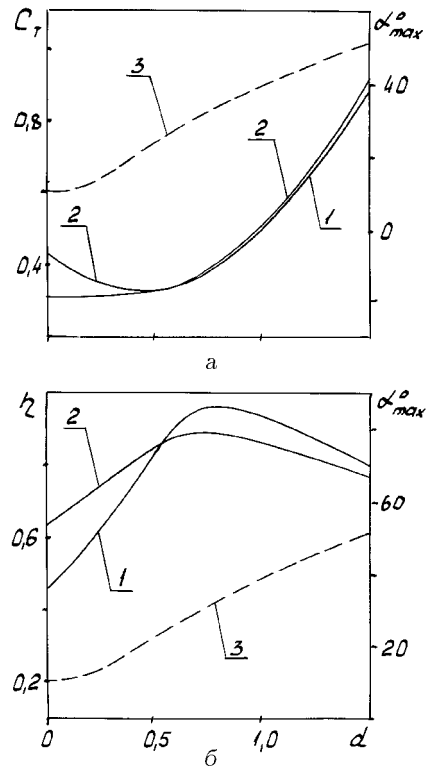


Рис. 2. Сравнение по  $C_T$  и  $\eta$  с МВП [14] ( $a=1, p^*=1, \kappa=10^\circ, \delta = -\pi/2$ ): 1 – МВП ( $\lambda=4$ ); 2 – УМДВ ( $\lambda \rightarrow \infty$ ); 3 –  $\alpha_{max}$

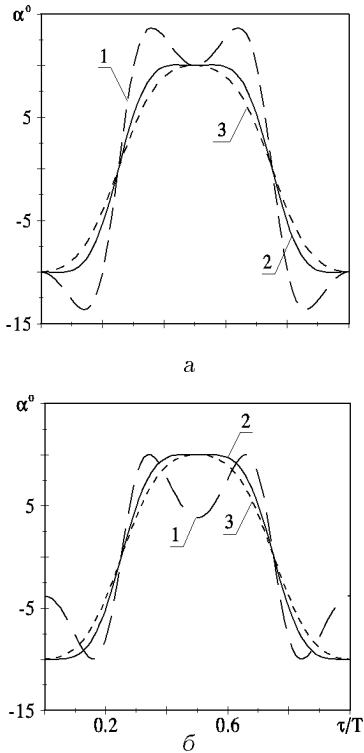


Рис. 3. Поведение мгновенного угла атаки при  $\alpha_m = 10^\circ$  (а) и при  $\alpha_{max} = 10^\circ$  (б):  $d=0, \delta = -\pi/2, \forall a$ ; 1 –  $\lambda_p=0.7$ ; 2 –  $\lambda_p=1.2$ ; 3 –  $\lambda_p=1.7$

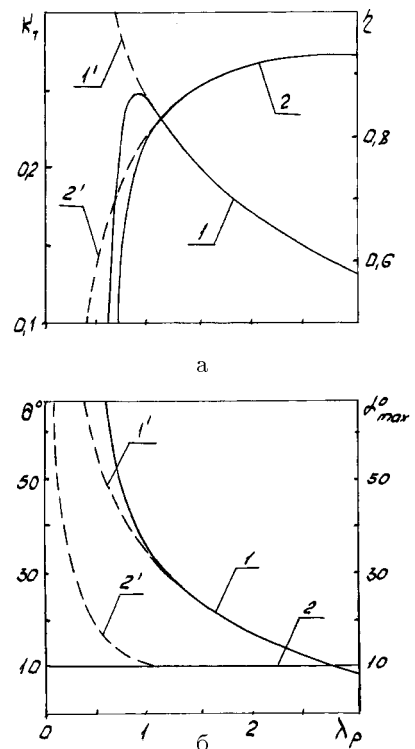


Рис. 4. Влияние  $\lambda_p$  на  $k_T(1, 1')$  и  $\eta(2, 2')$  (а), а также на  $\theta(1, 1')$  и  $\alpha_{max}(2, 2')$  (б) при  $a=1.5, d=0$  и  $\delta = -\pi/2$ : сплошная –  $\alpha_{max} = 10^\circ$ , штриховая –  $\alpha_m = 10^\circ$

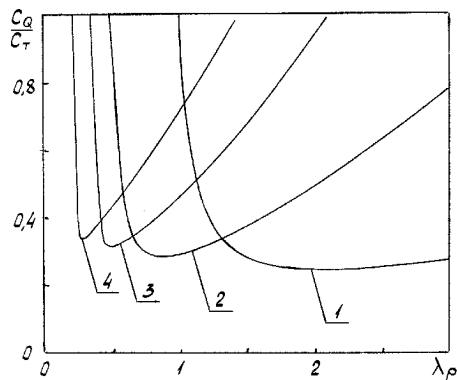


Рис. 5. Вклад подсасывающей силы в силу тяги ( $a=1, d=0, \delta = -\pi/2$ ): 1 –  $\alpha_{max}=5^\circ$ ; 2 –  $\alpha_{max}=15^\circ$ ; 3 –  $\alpha_{max}=25^\circ$ ; 4 –  $\alpha_{max}=35^\circ$

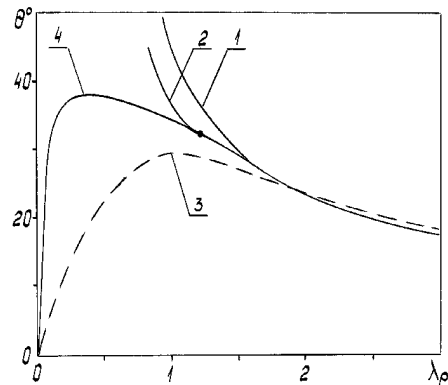


Рис. 6. Режимы колебаний хвостового плавника дельфина ( $d=0, \delta = -\pi/2, a \geq 1$ ): 1 –  $\alpha_{max}=5^\circ$ ; 2 –  $\alpha_{max}=10^\circ$ ; 3 – платообразное поведение  $\alpha(\tau)$ ; 4 – режим  $(C_Q/C_T) \rightarrow \min$ ; • – натурные данные [15]

вращательно–поступательных колебаний. Видно, что и коэффициент силы тяги, и КПД с увеличением линейной амплитуды при фиксированном числе Струхала, а также с увеличением числа Струхала при фиксированной линейной амплитуде ведут себя существенно нелинейно, что неспособна предсказать линейная теория.

На рис. 2 показаны результаты сравнительных расчетов коэффициента силы тяги и КПД крыла–двигателя, в зависимости от положения оси вращения  $d$ , с результатами работы [14], в которой осуществлялось моделирование колебаний хвостового плавника дельфина в нелинейной постановке на основе МВП.

Угол перекладки в [14] изменялся по закону:

$$\beta(\tau) = \arctg(ap^* \sin(p^* \tau)) - \kappa \sin(p^* \tau).$$

Из рисунка видно, что угол атаки при  $d=1$  достигал  $40^\circ$ . Несмотря на различия в удлинениях крыльев, наблюдается совпадение результатов по  $C_T$  при  $d > 0.4$ , что объясняется незначительным влиянием концевых эффектов крыла при  $\lambda \geq 4$ . При этом в величинах КПД наблюдаются некоторые расхождения.

Вернемся к натурным данным работы [15] для случая основного режима плавания дельфина афалины. Учитывая представление закона колебаний хвостового плавника в виде (65), (66), получаем, что: фазовый сдвиг между законами колебаний  $\delta = -\pi/2$ ; средняя угловая амплитуда  $\theta = 33^\circ$ ; средний максимальный угол скоса потока  $\chi_{max} = 40^\circ$ ; средняя продольная скорость  $U = 2.3m/c$ ; средняя максимальная поперечная скорость  $V_{max} = 1.9m/c$ ; частота колебаний  $\nu = 1.12$  Гц; число Струхала (безразмерная круговая частота колебаний)  $p^* = 0.724$ ;

линейная амплитуда  $a = 1.15$ ; относительная скорость плавника  $\lambda_p = 1.2$ .

Для выяснения значения пятого кинематического параметра – положения оси вращения  $d$  – была проведена серия расчетов для различных  $d$  при фиксированных остальных параметрах. Расчеты показали, что положению оси вращения на задней кромке  $d=1$  соответствует значение максимального мгновенного угла атаки  $\alpha_{max} = 24.7^\circ$ , значению  $d=0.5 - \alpha_{max} = 15.4^\circ$ , а положению оси вращения на передней кромке  $d=0 - \min \alpha_{max} = 7.3^\circ$  при  $\alpha_m = 6.8^\circ$ , что очень близко к экспериментальным значениям [16].

Пропульсивные характеристики при данном сочетании параметров оказались следующими: коэффициент силы тяги  $C_T = 0.26$  ( $k_T = 0.155$ ); КПД  $\eta = 76\%$ .

Так как поведение максимального мгновенного угла атаки на протяжении периода колебаний, совместно с углом перекладки крыла и траекторией его движения, определяет поведение мгновенных пропульсивных характеристик крыла–двигателя, рассмотрим особенности поведения  $\alpha(\tau/T)$ .

Рис. 3 иллюстрирует характер влияния относительной скорости крыла на мгновенный угол атаки за период колебаний при выполнении соотношения

$$\theta = \arctg \frac{1}{\lambda_p} - \alpha_m.$$

Из рис. 3, а видно, что начиная с некоторого  $\lambda_p^*$  для  $0 < \lambda_p \leq \lambda_p^*$  равенство  $\alpha_{max} = \alpha_m$  превращается в неравенство  $\alpha_{max} > \alpha_m$ . Такое anomalous поведение мгновенного угла атаки при каноническом режиме колебаний объясняется тем, что при  $\delta = -\pi/2$  угол атаки выражается через разность



двух синфазных синусоидальных кривых. Их наклон определяется формой траектории оси вращения крыла (то есть, параметром  $\lambda_p$ ), что при достаточно малых  $\lambda_p$  и приводит к наблюдаемому эффекту. Подчеркнем, что вид кривых  $\alpha(\tau/T)$  при фиксированных  $\lambda_p$  и  $\theta$  не зависит от величины линейной амплитуды.

На рис. 3, б показано поведение мгновенного угла атаки за период колебаний при ограничении вида  $\alpha_{max} = 10^\circ$  в зависимости от относительной скорости крыла. Характер поведения  $\alpha(\tau/T)$  при соответствующих значениях  $\lambda_p$  такой же, как и на рис. 3, а, с той разницей, что в данном случае при  $\lambda_p < \lambda_p^*$  вместо возрастания  $\alpha_{max}$  происходит уменьшение  $\alpha_m$ .

Иследуем, как изменяется поведение  $k_T(\lambda_p)$ ,  $\eta(\lambda_p)$ ,  $\theta(\lambda_p)$  и  $\alpha_{max}(\lambda_p)$  в зависимости от двух указанных типов ограничений (рис. 4). Из рисунка видно, что при ограничении вида  $\alpha_m = \text{const}$  (и бесконтрольном возрастании  $\alpha_{max}$  при малых  $\lambda_p$ )  $k_T(\lambda_p)$  ведет себя, как монотонная функция от  $\lambda_p$ . Однако фиксирование максимального мгновенного угла атаки за счет соответствующего увеличения угловой амплитуды приводит к “заваливанию” кривой  $k_T(\lambda_p)$  и уменьшению КПД при  $\lambda_p < \lambda_p^*$ .

Таким образом, ограничение явного вида  $\alpha_m = \arctg(1/\lambda_p) - \theta = \text{const}$  является недостаточным для избежания закритических углов атаки, а следовательно, нефизичных результатов.

Особенностью вращательно-поступательных колебаний является то, что кроме подсосывающей силы, вклад в силу тяги вносит также нормальная сила. Представляет интерес выяснить, каков вклад подсосывающей силы при различных относительных скоростях крыла и выполнении условия  $\alpha_{max} = \text{const}$ . На рис. 5 представлено семейство кривых  $C_Q/C_T$  для различных  $\alpha_{max}$  в зависимости от  $\lambda_p$  при  $a = 1$ . Как видно, вклад подсосывающей силы по мере уменьшения  $\alpha_{max}$  и увеличения  $\lambda_p$  может уменьшаться до 25%, причем диапазон относительных скоростей, при которых  $C_Q/C_T$  минимально, увеличивается.

В заключение приведем некоторые возможные режимы работы хвостового плавника дельфина (для режимов  $\alpha_{max} = 5^\circ$  и  $\alpha_{max} = 10^\circ$  приведены части кривых, расположенные выше кривой  $(C_Q/C_T) \rightarrow \min$ ) среди которых, основываясь на натурных данных работы [15], укажем основной режим плавания дельфинов (см. рис. 6). Видно, что основной режим плавания дельфинов совпадает с режимом минимального вклада подсосывающей силы в силу тяги. Это является косвенным подтверждением того, что построенная модель удовлетворительно описывает работу хвостового

плавника дельфина, так как при этом опасность возникновения кавитации, а также срыва потока с передней кромки минимальна при достаточно высоких значениях пропульсивных характеристик.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным инструментом нестационарной теории крыла до недавнего времени оставалась линейная теория. Однако амплитудно-частотный диапазон, в котором эта теория дает достоверные результаты, весьма узок. Квазилинейные теории, способные расширить этот диапазон, ограничены режимами движения крыла с малыми углами атаки, в то время как точность получаемых результатов по-прежнему остается невысокой.

В работе дана постановка задачи о произвольном движении ПД, в которой сделан ряд предположений относительно свойств среды, характера обтекания и самого крыла. Это позволило сформулировать нелинейную начально-краевую задачу для потенциала течения, для которой существует единственное решение. При этом, с целью создания экономичных алгоритмов и программ, эффектами трехмерности и телесности плавника, а также вязкости среды пренебрегалось, что могло привести к некоторому завышению расчетных пропульсивных характеристик по сравнению с экспериментальными (в основном это касается силы тяги).

Для решения поставленной начально-краевой задачи предложен подход, основанный на представлении искомого потенциала скорости в виде суммы потенциалов двойного слоя, распределенных по крылу и свободной вихревой пелене. При этом решение внешней начально-краевой задачи для потенциала скорости сводимо к решению нелинейной системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с начальными данными для скачка потенциала скорости, а также к решению нелинейной системы сингулярных интегральных уравнений с начальными данными для плотности вихревого слоя в классе функций, ограниченных на одном конце интервала и неограниченных на другом и удовлетворяющих условию Гельдера.

На основании УМДВ построена нелинейная численная модель работы хвостового плавника дельфинов, которая хорошо описывает следующие известные особенности его работы при основном режиме плавания:

- характерное поведение мгновенного угла атаки (аномальное появление двух максимумов);
- рабочий диапазон для максимального мгновенного

ного угла атаки:  $5^\circ < \alpha(\tau) < 10^\circ$ ;

– рабочий диапазон для относительных скоростей движения плавника:  $1.1 < \lambda_p < 1.3$ ;

– рабочий диапазон для линейных амплитуд:  $a > 1$ ;

– рабочий диапазон для угловых амплитуд:  $30^\circ < \theta < 35^\circ$ ;

– достижение высоких значений средней силы тяги за счет снижения КПД при повышенных частотах и малых линейных амплитудах;

– достижение высоких значений КПД на пониженных частотах и больших линейных амплитудах.

При этом обнаружено, что указанное сочетание рабочих значений кинематических параметров реализуется в случае, когда вращательные колебания отстают от поступательных на угол  $\pi/2$ , а ось вращения расположена в точке соединения хвостового стебля с передней кромкой плавника.

Обнаружено также, что основной режим плавания дельфинов характеризуется минимальным вкладом подсосывающей силы в силу тяги.

Сопоставление результатов численных экспериментов с данными линейной и нелинейной теории, а также с натурными данными для живых дельфинов показало удовлетворительное соответствие между ними.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов Л. Ф. Теоретическая биогидродинамика. – К: Вища школа, 1983. – 340 с.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики. – М: Наука, 1966. – 448 с.
3. Lighthill M. J. Aquatic animal propulsion of high hydromechanical efficiency // J. Fluid Mech. – 1970. – 44, N 2. – P. 265–301.
4. Wu T. Y. Hydromechanics of swimming propulsion // J. Fluid Mech. – 1971. – 46, N 2. – P. 521–568.
5. Chopra M. G. Wake effects in finite amplitude non-steady motion of slender profiles // AIAA J. – 1976. – 14, N 8. – P. 1145–1148.
6. Chopra M. G. Large amplitude lunate-tail theory of fish locomotion // J. Fluid Mech. – 1976. – 74, N 1. – P. 161–182.
7. Katz J., Weihs D. Hydrodynamic propulsion by large amplitude oscillation of an airfoil with chordwise flexibility // J. Fluid Mech. – 1978. – 88, N 3. – P. 485–497.
8. Горелов Д. Н. Расчет гидродинамических характеристик крыльцевого движителя // Гидродинамика подводного крыла. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. – 1986. – С. 100–110.
9. Chopra M. G. Hydromechanics of lunate-tail swimming propulsion // J. Fluid Mech. – 1974. – 64, N 2. – P. 375–391.
10. Chopra M. G. Lunate-tail swimming propulsion // Swimming and Flying in Nature. – 1975. – 2. – P. 635–650.
11. Chopra M. G., Kambe T. Hydromechanics of lunate-tail swimming propulsion // J. Fluid Mech. – 1977. – 79, N 1. – P. 49–69.
12. Lan C. E. The unsteady quasi-vortex-lattice method with applications to animal propulsion // J. Fluid Mech. – 1979. – 93, N 4. – P. 747–765.
13. Рождественский К. В., Рыжов В. А. Расчет тяги и идеального КПД машущего крыла при поступательно-вращательных колебаниях вблизи границы раздела с применением метода коллокаций // Математич. модели и САПР в судостроении. – Л. – 1985. – С. 70–76.
14. Зайцев А. А., Федотов А. А. Обтекание идеальной несжимаемой жидкостью тонкого крыла конечного размаха, колеблющегося с большой амплитудой // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1986. – N 5. – С. 75–82.
15. Каян В. П. О гидродинамических характеристиках плавникового движителя дельфина // Бионика. – Киев: Наук. думка. – 1979. – Вып. 13. – С. 9–15.
16. Першин С. В. Основы гидробионики. – Л.: Судостроение, 1988. – 264 с.
17. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1962. – 436 с.
18. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
19. Овсянников Л. В. Нелокальные задачи Коши в гидродинамике // Международный конгресс математиков в Ницце (1970). – М.: Наука. – 1972. – С. 224–230.
20. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО “Янус”, 1995. – 520 с.
21. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – М.: Физматгиз, 1963. – 640 с.
22. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
23. Лифанов И. К., Полтавский Л. Н. Линейная нестационарная задача для профиля и уравнение Абеля // Вопр. кибернет. Численный эксперимент в прикладной аэрогидродинамике. – М.: АН СССР, Научный совет по комплексной проблеме “Кибернетика”. – 1986. – С. 23–47.
24. Довгий С. А., Шеховцов А. В. Усовершенствованный метод дискретных вихрей для нестационарных задач // Обчислювальна та прикладна математика. – 1997. – Вып. 2(82). – С. 30–44.
25. Полтавский Л. Н. К условию Чаплыгина-Жуковского в линейной нестационарной задаче для профиля // Тр. ВВИАУ им. проф. Н. Е. Жуковского. – 1986. – Вып. 1313. – С. 419–423.
26. Горелов Д. Н., Куляев Р. Л. Нелинейная задача о нестационарном обтекании тонкого профиля несжимаемой жидкостью // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1971. – N 6. – С. 38–48.
27. Шеховцов А. В. Проявление эффектов нестационарности при расчете пропульсивных характеристик плавникового движителя в нелинейной постановке // Труды VI Всерос. науч. шк. “Гидродинамика больших скоростей”. – Чебоксары: Чувашский ун-т. – 1996. – С. 210–216.