

В.М. Волощук, О.Я. Скриник

КОЕФІЦІЄНТ ЗАХВАТУ ПЛАСТИНИ, НОРМАЛЬНОЇ ДО ПОТОКУ

Методом граничних траєкторій обчислено коефіцієнт захвату (E) аерозольних частинок пластиною при середніх значеннях числа Рейнольда обтікаючого потоку ($Re \approx 10^2 \div 10^3$). Пластина нескінченної довжини, півширина якої рівна l , розміщена нормально до потоку. Для гідродинамічного поля обтікання пластини приймалася схема обтікання з відривом (кірхгофське обтікання).

Вступ

У цій статті розглядається задача фізики аеродисперсних систем: обчислення коефіцієнта захвату пластини (E). Причому дослідження стосуються тільки "гідродинамічного" аспекту задачі, тобто, досліджується осідання сферичних аерозольних частинок на пластині завдяки ефекту інерції. Пластина нескінченної довжини (що дозволяє перейти до розгляду двомірного потоку обтікання), півширина якої рівна l , розміщена перпендикулярно до набігаючого потоку. Задача є важливою, як з точки зору "чистої" аерозольної науки, так і з точки зору практичних потреб, оскільки, наприклад, для градуювання і повірки деяких метеорологічних приладів необхідне знання коефіцієнта захвату пластини при різних значеннях числа Рейнольдса обтікаючого потоку.

Коротка історія й постановка проблеми

У час активного розвитку й становлення аерозольної науки (40-60-ті роки ХХ століття) це питання розглядалося багатьма дослідниками: Селлом, Ленгмюром і Блоджет, Левінім [1], Волощуком [2]. Остаточне його вирішення через об'єктивні причини отримати не вдалося.

Основна проблема, яка тут виникає – це правильне (адекватне, реальне) задання гідродинамічного поля обтікання пластини при різних значеннях числа Рейнольдса обтікаючого потоку.

При малих числах Рейнольдса (Re порядку одиниць) для гідродинамічного поля можна приймати схему потенціального безвідривного обтікання. В цьому випадку аналітичне задання компонент

швидкості потоку $(u_x(x, y), u_y(x, y))$ є відомим [3], тому чисельне інтегрування рівнянь руху аерозольних частинок, на основі яких обчислюється E , не викликає принципових труднощів. Зауважимо, що у зв'язку із простотою обчислення гідродинамічного поля випадок потенціального безвідривного обтікання пластини досліджено найбільш детально. Отримано графіки залежності E від числа Стокса (k) при різних значеннях параметра Ленгмюра (Φ , $\Phi = Re^{*2}/k$, де Re^* - число Рейнольдса аерозольної частинки).

Пластина, яка розміщена нормально до набігаючого потоку, належить до класу тіл, що найбільш погано обтікаються. Тому вже при числах Re , які більші декількох десятків, відбуватиметься відрив потоку від гострих країв пластини і в донній частині потоку формуватиметься потужний вихровий слід. Відповідно треба очікувати суттєвий вплив сліду на передню частину течії і на коефіцієнт захвату.

Для врахування такого впливу в [1, 2] розглядалася схема струминного відривного обтікання пластини ідеальною (нев'язкою) рідиною з "мертвою" зоною за тілом (кірхгофське обтікання). Тобто, зовнішній потік вважається потенціальним, а з гострих країв пластини відриваються лінії течії, які прямують вниз по потоку до нескінченності. Для такої схеми обтікання комплексна швидкість ($\zeta = u_x - i u_y$) задається складним трансцендентним нелінійним рівнянням [4, 1], яке не розв'язується в явному вигляді для ζ :

$$z = \frac{4}{\pi + 4} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} + \frac{\zeta(\zeta^2 - 3)}{(1 - \zeta^2)^2} \right\}, \quad z = x + iy, \quad (1)$$

де компоненти швидкості "нормовані" на швидкість незбуреного потоку, а просторові координати – на півширину пластини, вісь абсцис напрямлена вздовж потоку і є його віссю симетрії, пластина розміщується на початку координат.

У цьому випадку через складність отримання розв'язку (1) задача обчислення коефіцієнту захвату була розв'язана тільки для центру пластини (малої області біля осі симетрії потоку). Для цілої пластини задача не була розв'язана.

Слід зауважити, що з якісного аналізу експериментальних даних [5] можна зробити висновок, що найбільш потужний слід при обтіканні пластини буде утворюватись при середніх значеннях числа Рейнольдса ($Re \approx 10^2 \div 10^3$). При подальшому збільшенні Re в сліді будуть дуже

інтенсивно розвиватись вихрові рухи (з подальшим виникненням і розвитком турбулентності), які будуть приводити до руйнування поверхні розділу сліду і оточуючого потоку і, таким чином, до зменшення розмірів самого сліду. Отже, кірхгофське обтікання найбільш правдоподібно описує режим обтікання саме при вказаних значеннях числа Рейнольдса.

Виходячи із вище приведеного короткого аналізу можна зробити наступний висновок. Уточнення результатів, отриманих в [1, 2] шляхом відшукування розв'язку задачі для всієї пластини в рамках наближення (1) для гідродинамічного поля – є важливим завданням, оскільки, як вірно зауважено в [2], ці результати мають бути нижньою межею для значень E при всіх числах Рейнольдса. Такий висновок випливає з того, що реальні сліди все ж значно менш потужніші, ніж слід, що отримується з (1). Тому і вплив на коефіцієнт захвату повинен бути меншим. Верхню межу дають результати із схемою потенціального безвідривного обтікання, при якому потік перед пластиною найменше збурений.

Труднощі на цьому напрямі досліджень полягають у наступному. По-перше, навіть чисельно важко отримати розв'язки (1). Це пов'язано із недостатньою розвиненістю алгоритмів чисельного розв'язування систем складних нелінійних рівнянь. По-друге, структура (1) така, що умови $u_x = 1$, $u_y = 0$ виконуються лише при $x \rightarrow -\infty$. Це означає, що розв'язуючи рівняння руху аерозольних частинок, невідомо яку початкову умову для швидкості аерозолів використовувати і на якій відстані від пластини. Очевидно, із збільшенням відстані від пластини буде точнішою умова $\mathbf{V}_0 = \mathbf{U}_0$, де \mathbf{V}_0 – початкова швидкість аерозолу, $\mathbf{U}_0 = \{U_0, 0\}$ – швидкість незбуреного потоку. Але збільшуючи відстань від пластини, на якій формулюється початкова умова для рівнянь руху частинок, ми збільшуємо просторову область, в якій розглядається задача, відповідно збільшується об'єм і час обчислень. Тому задаючи початкові умови, необхідно приймати розумний компроміс між точністю отримуваних результатів і часом їх отримання.

Обчислення гідродинамічного поля

Для задачі обчислення коефіцієнта захвату пластини знаходження гідродинамічного поля є „критичним” елементом [6], оскільки при обчисленні траєкторій руху аерозольних частинок необхідно знати компоненти поля швидкості у кожній точці передньої частини потоку. В свою чергу, для знаходження значень, яких набувають компоненти

вектора швидкості в деякій точці розглядуваної області, необхідно вміти розв'язувати рівняння (1). Очевидно, єдиним способом отримання його розв'язків є чисельне розв'язання.

Щоб перейти до вибору алгоритму чисельного розв'язування рівняння (1), зробимо його найпростіший теоретичний аналіз з метою виявлення деяких „реперних” розв'язків, які будуть служити тестовим матеріалом для перевірки правильності чисельного розв'язування.

Очевидно, якщо $y=0$, то з умови симетричності потоку випливає, що $u_y=0$. Тоді з рівняння (1) отримаємо дійсне рівняння:

$$x = \frac{4}{\pi + 4} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{1-u_x}{1+u_x} + \frac{u_x(u_x^2-3)}{(1-u_x^2)^2} \right\}.$$

Звідси, $u_x < 1$, тобто на осі симетрії швидкість не досягає значення незбуреного потоку ($u_x \neq 1$). Це ще раз підтверджує той факт, що гідродинамічне поле при такій схемі обтікання є збуреним в дуже великій області навколо пластини (теоретично - у всьому просторі) і в передній, і в бокових областях, не кажучи вже про донну частину потоку. Очевидно, така поведінка потоку не зовсім відповідає реальним режимам обтікання при великих числах Рейнольдса.

Якщо $x=0$, то з умови „непроникності” рідини через тверду поверхню випливає: $u_x=0$, при $|y| \leq 1$. Тоді з (1) знову отримаємо дійсне рівняння:

$$y = \frac{4}{\pi + 4} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Arg} w' + \frac{u_y(u_y^2-3)}{(1-u_y^2)^2} \right\}, \quad (2)$$

де $\operatorname{Arg} w'$ – аргумент комплексного числа $w' = \frac{1-u_y^2}{1+u_y^2} + i \frac{2u_y}{1+u_y^2}$. Тепер з (2)

легко отримати фізичний розв'язок рівняння (1) в точках простору $(0; 1)$ і $(0; -1)$. Це відповідно $\{u_x = 0; u_y = 1\}$ і $\{u_x = 0; u_y = -1\}$.

Для чисельного розв'язування (1) необхідно його попередньо розділити на дійсну і уявну частини. Здійснюючи розділення, отримаємо систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \ln \sqrt{d_1^2 + d_2^2} + \varphi_1 - 2ax &= 0, \\ \operatorname{Arg} w'' + \varphi_2 - 2ay &= 0, \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

$$\text{де } a = \frac{\pi + 4}{4}, \quad d_1 = \frac{1 - u_x^2 - u_y^2}{(1 + u_x)^2 + u_y^2}, \quad d_2 = \frac{2u_y}{(1 + u_x)^2 + u_y^2},$$

$$\varphi_1 = \frac{b_1 c_1 + b_2 c_2}{c_1^2 + c_2^2}, \quad \varphi_2 = \frac{b_2 c_1 + b_1 c_2}{c_1^2 + c_2^2},$$

$$b_1 = u_x^3 - 3u_x u_y^2 - 3u_x, \quad b_2 = u_y^3 - 3u_y u_x^2 + 3u_y,$$

$$c_1 = (1 - u_x^2 + u_y^2)^2 - 4u_x^2 u_y^2, \quad c_2 = 4u_x u_y (1 - u_x^2 + u_y^2),$$

$Arg w''$ – аргумент комплексного числа $w'' = d_1 + i d_2$. При розв'язуванні системи (3) для отримання фізичних розв'язків необхідно брати головне значення $Arg w''$.

З чисельним розв'язуванням системи (3) пов'язаний ряд труднощів. По-перше, вже згадувалось, загальні методи розв'язування систем нелінійних рівнянь недостатньо розвинуті [6]. Крім того, майже всі вони є ітераційними, які уточнюють деяке початкове наближення. Визначення такого початкового наближення не завжди є тривіальною задачею. В нашому випадку область пошуку початкового значення (u_{x0}, u_{y0}) можна дещо обмежити фізичними умовами. Оскільки потік симетричний, то досить розглянути його в області $\{x \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$. З фізичної постановки задачі зрозуміло, що в цій області повинні виконуватися нерівності $u_x \geq 0, u_y \geq 0$. З другої сторони, враховуючи вище приведені зауваження, в області $\{x \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$ повинні виконуватись умови $u_x \leq 1, u_y \leq 1$. Вони не є надто обмежуючими, тому проблема вибору початкового наближення є досить актуальною для розглядуваної задачі.

Для чисельного отримання розв'язку (3) можна використовувати добре відомий метод Ньютона [6]. Проблема лише полягає в тому, що цей метод не завжди збіжний, тобто він дуже сильно залежить від вибору початкового наближення для розв'язку. Не вирішує вказану проблему і використання більш досконалих методів. Наприклад, використовуючи модифікований метод Ньютона, ми завжди (при довільному заданні початкового наближення) зможемо отримати розв'язок, але виникає інша проблема. Справа в тому, що система (3) має не єдиний розв'язок, а декілька, тому кожний розв'язок матиме свою „область притягання”, з якої початкове наближення буде сходиться до „свого” розв'язку.

Через висловлені зауваження безпосереднє включення процедури чисельного отримання розв'язку системи (3) в процес обчислення

траєкторій аерозолів напевне не є раціональним, чи навіть можливим. На нашу думку, розумним виходом із цього є відшукання гідродинамічного поля в вузлах деякої введеної сітки з подальшою інтерполяцією. Такий шлях (алгоритм) обчислення гідродинамічного поля вирішує всі зазначені проблеми.

В проведеному дослідженні вводилась нерівномірна (по кожній із осей координат) сітка. Нерівномірність дозволяла ущільнювати вузлові точки в тих місцях, де, з фізичних міркувань, поле найбільш викривлене і надалі його слід було більш правильно (точно) проінтерполювати. Інтерполяція здійснювалась послідовно по кожній змінній за допомогою нормальних кубічних сплайнів [6]. Спочатку для вибраних профілів (при певних значеннях змінної x) здійснювалась інтерполяція по змінній y . Потім обчислювались значення отриманих сплайнів при конкретному значенні змінної y з подальшою інтерполяцією по x . „Експериментально” було проведено оцінку точності інтерполяції. В областях найбільшого викривлення ліній течії вибирались точки, в яких за системою (3) розраховувалось „точно” значення поля і його проінтерпольоване значення, після чого оцінювалась відносна похибка отриманого результату. У всіх вибраних точках відносна похибка точності інтерполяції не перевищувала 1%.

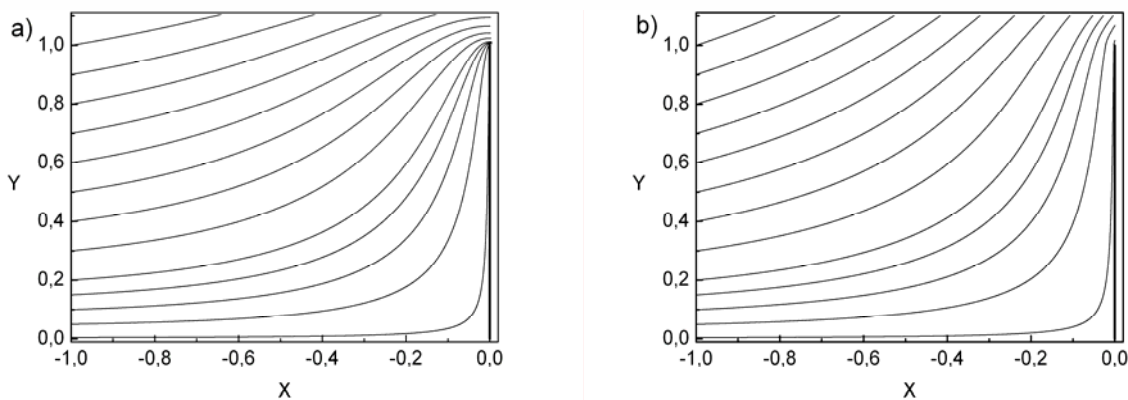


Рис. 1. Лінії течії в передній області потоку при потенціальному безвідривному обтіканні пластини (а) і при обтіканні з відривом (кірхгофське обтікання) (b)

На рис. 1(b) зображено розраховане поле течії при кірхгофському обтіканні пластини. Для порівняння, на рис. 1(a) показано поле течії при потенціальному безвідривному обтіканні пластини, розраховане за відомими формулами: $u_x = u_x(x, y)$, $u_y = u_y(x, y)$ [3].

Коефіцієнт захвату пластини

Основою для розрахунків коефіцієнта захвату пластини методом граничних траєкторій є рівняння руху аерозольної частинки під дією сили Стокса і інших зовнішніх сил [2]. У безрозмірному вигляді вони будуть мати вигляд:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}, \quad k \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{U} - \mathbf{V} + \mathbf{F}^*, \quad (4)$$

де $\mathbf{R} = \{ R_x, R_y \}$ – радіус-вектор аерозольної частинки; t – безрозмірний час;
 $k = \frac{2 \rho_a r^2 U_0}{9 \eta l}$ – число Стокса; ρ_a – густина речовини аерозольної частинки; r – радіус частинки; U_0 – швидкість незбуреного потоку (характерна швидкість); η – динамічна в'язкість середовища (повітря);
 l – півширина пластини (характерний лінійний масштаб);
 $\mathbf{V} = \{ V_x, V_y \}$ – швидкість частинки; $\mathbf{U} = \{ u_x, u_y \}$ – гідродинамічне поле;
 \mathbf{F}^* – поле зовнішніх сил.

Для знаходження коефіцієнта захвату на основі чисельного розв'язування системи рівнянь (4) прослідковувались траєкторії аерозольної частинки при різних значеннях початкової координати $Y(t_0) = Y_0$. В даному випадку згідно означення коефіцієнт захвату пластини буде рівний:

$$E = Y_0^*,$$

де Y_0^* – початкова координати аерозольної частинки, яка рухається по „граничній” траєкторії. Результати обчислень, проведених для потенціального безвідривного і кірхгофського обтікання пластини, показані на рис. 2.

Висновки

Як впливає з аналізу отриманих результатів (рис. 2), коефіцієнт захвату, обчислений для цілої пластини, все ж доволі відрізняється від свого локального значення (для деякої малої області біля осі симетрії). Абсолютна похибка не перевищує 0,02, відносна похибка складає від 3% до 50%. Очевидно, вказана точність результатів є суттєвою з практичної точки зору.

Проведені дослідження стосуються обмеженого (хоча і найбільш важливого з точки зору методики градування метеорологічних

приладів) діапазону значень числа Рейнольдса обтікаючого потоку ($Re \approx 1 \div 10^3$). Можна, напевне, вважати, що для цього діапазону чисел Re задача обчислення коефіцієнта захвату пластини є вирішеною.

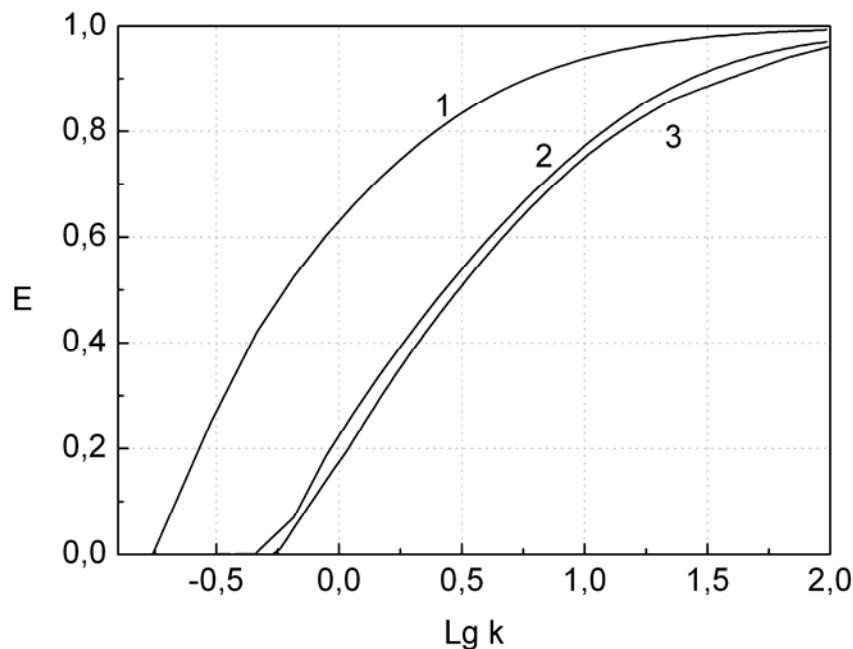


Рис. 2. Залежність коефіцієнта захвату (E) пластини в необмеженому потоці від числа Стокса (k): 1 – потенціальне безвідривне обтікання; 2 – кірхгофське обтікання (для цілої пластини); 3 – кірхгофське обтікання (локальне значення E , для малої області біля осі симетрії, $y_0 = 10^{-2}$)

Усе ж, для остаточного розв'язання задачі (у тому числі для визначення E і при довільному іншому значенні Re) необхідно з допомогою чисельного моделювання відтворити реальне відривне гідродинамічне поле обтікання пластини, на основі чого обрахувати значення E . Для цього необхідно чисельно інтегрувати рівняння руху в'язкої рідини, оскільки саме в'язкість є основною фізичною властивістю, яка сприяє відриву [5]. Це є складною і кропіткою гідродинамічною задачею, що, напевне, і стало причиною того, що авторам не вдалося знайти робіт, в яких би здійснювалось моделювання такого поля, оскільки, задачі, які важливі для аерозольної науки, не завжди цікаві для "чистих" гідродинаміків.

* *

Методом граничних траєкторій вычислен коэффициент захвата пластины (E) при средних значениях числа Рейнольдса обтекающего потока

($Re \approx 10^2 \div 10^3$). Бесконечно длинная пластина, полуширина которой равна l , расположена нормально к потоку. Для гидродинамического поля обтекания пластины принималась схема обтекания с отрывом (кирхгофское обтекание).

* *

1. *Левин Л.М.* Исследования по физике грубодисперсных систем. – М.: Изд-во АН СССР, 1961.
2. *Волощук В.М.* Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей. – Л.: Гидрометеоиздат, 1971. – 208 с.
3. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. – Ч. 1. – М.: Гос. изд-во физ-мат лит., 1963. – 584 с.
4. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. – М: Мир, 1964. – 467с.
5. *Чжен П.* Отрывные течения. – М.: Мир, 1973. – Т 2. – 280 с.
6. *Ильина В.А., Силаев П.К.* Численные методы для физиков-теоретиков. –М., Ижевск: Инст. компьютерных исследований, 2003. – Т. 1. – 132 с.

*Український науково-дослідний
гідрометеорологічний інститут, Київ*