УДК 004.42:510.69

С.С. Шкільняк

СПЕЦІАЛЬНІ ВІДНОШЕННЯ ЛОГІЧНОГО НАСЛІДКУ В ЛОГІКАХ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Для першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів запропоновано і досліджено *X*–*Y*-означені відношення логічного наслідку. Отримано низку властивостей цих відношень у різних семантиках, зокрема, властивості елімінації кванторів. Такі властивості ляжуть в основу побудови відповідних числень секвенційного типу.

Вступ

Поняття логічного слідування належить до найфундаментальніших понять логіки. Логічне слідування можна формалізувати за допомогою відношення логічного наслідку. Будуючи різні семантики, можна визначити багато таких відношень. Нестандартні семантики для пропозиційної логіки та різноманітні відношення логічного наслідку запропоновані О.Д. Смирновою [1], їх побудова базується на постулатах частковості предикатів і симетричності істинності та хибності. В роботі [2] подібні семантики та формалізації відношення логічного наслідку узагальнені на випадок композиційно-номінативних логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів. Композиційно-номінативні логіки (КНЛ) – це програмно-орієнтовані логічні формалізми, будовані на основі композиційно-номінативного підходу [3]. Зазначений підхід до побудови моделей програм та орієнтованих на них логік виявився вельми плідним, на його базі розроблено [4] широкий спектр логічних формалізмів, що знаходяться на різних рівнях абстрактності та загальності. КНЛ базуються на загальних класах часткових відображень, заданих на довільних наборах іменованих значень. Такі відображення названо квазіарними.

У роботі [2] визначено відношення логічного наслідку та досліджено семантичні властивості КНЛ часткових однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних квазіарних предикатів на пропозиційному, реномінативному та кванторному рівнях. У різних семантиках ці відношення мають різні властивості, зокрема, в класичній логіці усі вони збігаються. Такі відношення логічного наслідку індукують відповідні відношення еквівалентності, вони поширюються на множини формул.

Метою даної роботи є вивчення спеціальних відношень логічного наслідку для першопорядкових КНЛ квазіарних предикатів. Для таких логік кванторного рівня запропоновано і досліджено в різних семантиках *X*–*Y*-означені відношення логічного наслідку для пар та множин формул. Поняття *X*–*Y*-означеного відношення логічного наслідку для логік часткових однозначних квазіарних предикатів введене в [5], на цій основі для таких логік побудоване числення секвенційного типу. В даній роботі різні *X*–*Y*-означені відношення логічного наслідку визначаються як для часткових однозначних, так і для тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів. Отримано низку властивостей цих відношень, зокрема, властивості елімінації кванторів. Такі властивості ляжуть в основу побудови відповідних секвенційних числень для КНЛ часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [2, 4, 5].

Для полегшення читання наведемо небхідні для подальшого викладу поняття та визначення.

1. Основні поняття та визначення

Під предикатом на множині D будемо розуміти довільну (часткову неодно значну, взагалі кажучи) функцію вигляду $P : D \to \{T, F\}$.

Предикати можуть бути однозначними чи неоднозначними, тотальними чи частковими. Логіка тотальних однозначних предикатів – це класична логіка. Логіки однозначних часткових предикатів – це логіки з неокласичною семантикою, логіки тотальних неоднозначних предикатів – логіки з пересиченою семантикою. Логіки часткових неоднозначних предикатів природно назвати логіками із загальною семантикою.

Областю істинності та областю хибності предиката P на D назвемо множини

$\boldsymbol{T}(P) = P^{-1}(T) = \{d \in D \mid T \in P(d)\}$ та

$\boldsymbol{F}(P) = P^{-1}(F) = \{d \in D \mid F \in P(d)\}$.

Якщо предикат P – однозначний, то $\boldsymbol{T}(P) \cap \boldsymbol{F}(P) = \varnothing$. Якщо P – тотальний, то $\boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{F}(P) = D$.

Предикат P на D тотально істинний, якщо $\boldsymbol{T}(P) = D$.

Предикат P на D неспростовний, або частково істинний, якщо $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$.

Будемо писати $P(d)\downarrow$, якщо значення $P(d)$ визначене, тобто $d \in \boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{F}(P)$.

Пишемо $P(d)\uparrow$, якщо $P(d)$ невизначене, тобто $d \notin \boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{F}(P)$.

V-іменною множиною (V-ІМ) над A назвемо [4] довільну однозначну функцію $\delta : V \to A$. V-ІМ будемо подавати у вигляді $[v_1 \mapsto a_1, ..., v_n \mapsto a_n, ...]$; тут $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$. Множину всіх V-ІМ над A позначатимемо ${}^V\!A$.

Для V-ІМ вводимо [4] функції $im(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta$ для деякого $a \in A\}$ та $\delta \| X = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \in X \subseteq V\}$; вводимо операції накладки $\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \| (V \setminus im(\delta_2)))$ та реномінації $\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(\delta) = [v_1 \mapsto \delta(x_1), ..., v_n \mapsto \delta(x_n)] \cup$ $\cup (\delta \| (V \setminus \{v_1, ..., v_n\}))$.

Замість $\delta \| (V \setminus \{x\})$ писатимемо $\delta \| \text{-}x$.

Предикат вигляду $P : {}^V\!A \to \{T, F\}$ назвемо V-квазіарним предикатом на A.

Множину V-квазіарних предикатів на A позначимо Pr^A.

Ім'я $x \in V$ строго неістотне для V-квазіарного предиката P, якщо для довільних $d \in {}^V\!A$, $a \in A$ маємо $P(d \nabla x \mapsto a) = P(d \| \text{-}x)$.

Предикат $P : {}^V\!A \to \{T, F\}$ монотонний, якщо з умови $d \subseteq d'$ випливає $P(d) \subseteq P(d')$.

Для однозначних часткових предикатів монотонність називають еквітоністю. Еквітоність предиката означає, що прийняте ним значення зберігається при розширенні даних. Це можна трактувати як збереження "інформативності" предиката при збільшенні "інформативності" вхідних даних. Водночас для тотальних монотонних предикатів при розширенні вхідних даних "інформативність" може тільки зменшуватися, тому поняття еквітонності (монотонності) не зовсім адекватне для тотальних неоднозначних предикатів. Для таких предикатів адекватним є дуальне поняття антитонності. У випадку предикатів антитонність також названа [2] антиеквітонністю.

Предикат $P : {}^V\!A \to \{T, F\}$ антитонний, якщо з умови $d \subseteq d'$ випливає $P(d) \supseteq P(d')$.

В класі однозначних предикатів поняття антитонності малозмістовне.

Універсальні методи побудови предикатів визначають композиції, вони виступають ядром логіки певного типу. Згідно композиційно-номінативного підходу [3], композиції уточнюємо як функції (операції) над іменованими предикатами.

На *пропозиційному* рівні композиції називають логічними зв'язками.

Базовими пропозиційними композиціями вважатимемо [4] $\neg$ та $\vee$.

Композиції $\to$, $\&$, $\leftrightarrow$ є похідними, вони виражаються через $\neg$ та $\vee$.

Предикати $\neg(P)$ та $\vee(P, Q)$ будемо позначати $\neg P$, $P \vee Q$. Задаємо їх так:

$\boldsymbol{T}(\neg P) = \boldsymbol{F}(P)$;

$\boldsymbol{F}(\neg P) = \boldsymbol{T}(P)$.

$\boldsymbol{T}(P \vee Q) = \boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{T}(Q)$;

$\boldsymbol{F}(P \vee Q) = \boldsymbol{F}(P) \cap \boldsymbol{F}(Q)$.

Базовими композиціями *реномінативного* рівня є [4] $\neg$, $\vee$ та реномінація $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} : Pr^A \to Pr^A$.

Предикат $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ визначаємо так:

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{T}(P))$;

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{F}(P))$.

Базовими композиціями *кванторного* рівня є $\neg, \vee, \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists\boldsymbol{x}$.

Композиція $\forall\boldsymbol{x}$ є похідною: для кожного предиката P маємо $\neg\forall\boldsymbol{x}P = \neg\exists\boldsymbol{x}\neg P$.

Предикат $\exists\boldsymbol{x}P$ визначаємо так:

$\boldsymbol{T}(\exists\boldsymbol{x}P) = \{d\in {}^{V}\!A \mid T\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для деякого $a\in A\}$.

$\boldsymbol{F}(\exists\boldsymbol{x}P) = \{d\in {}^{V}\!A \mid F\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для всіх $a\in A\}$.

Композиції $\neg, \vee, \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists\boldsymbol{x}$ зберігають [2, 4] еквітонність та антитонність V-квазіарних предикатів.

Семантичними моделями композиційно-номінативних логік кванторного рівня (КНЛК) є [4] композиційні системи квазіарних предикатів $({}^{V}\!A, Pr^{A}, \boldsymbol{C})$, де $\boldsymbol{C}$ задається множиною базових композицій $\{\neg, \vee, \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists\boldsymbol{x}\}$. Кожна така композиційна система задає дві алгебри: неокласичну алгебраїчну систему (АС) даних (A, Pr^{A}) та композиційну алгебру предикатів $(Pr^{A}, \boldsymbol{C})$. Мова логіки індукується [4] відповідними інтенсіональними моделями (рівнями розгляду). Побудова композиційної системи фактично визначає мову логіки: терми композиційної алгебри предикатів трактуємо як формули мови.

Опишемо мову КНЛК. Алфавіт мови: символи базових композицій $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$, множина Ps предикатних символів (сигнатура мови), множина V предметних імен.

Дамо визначення множини Fr формул мови КНЛК.

1. Кожний предикатний символ (ПС) є формулою. Такі формули атомарні.

2. Якшо Φ та Ψ – формули, то $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$, $\exists x\Phi$ – формули.

Інтерпретуємо мову КНЛК на композиційних системах квазіарних предикатів кванторного рівня $({}^{V}\!A, Pr^{A}, \boldsymbol{C})$. Відображення інтерпретації формул $\boldsymbol{J} : Fr\to Pr^{A}$ визначається, згідно побудови формул із простіших за допомогою символів базових композицій, на основі тотального однозначного відображення $\boldsymbol{I} : Ps \to Pr^{A}$, яке позначає символами Ps базові предикати:

– $\boldsymbol{J}(p) = \boldsymbol{I}(p)$ для кожного $p\in Ps$;

– $\boldsymbol{J}(\neg\Phi) = \neg(\boldsymbol{J}(\Phi))$;

– $\boldsymbol{J}(\vee\Phi\Psi) = \vee(\boldsymbol{J}(\Phi), \boldsymbol{J}(\Psi))$;

– $\boldsymbol{J}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{J}(\Phi))$;

– $\boldsymbol{J}(\exists x\Phi) = \exists\boldsymbol{x}(\boldsymbol{J}(\Phi))$.

Відображення $\boldsymbol{I}$ прив'язує АС даних (A, Pr) до мови КНЛК. Отримуємо АС з доданою сигнатурою вигляду $((A, Pr^{A}), \boldsymbol{I})$, яку позначаємо $(A, \boldsymbol{I})$. Такі АС є інтегрованими семантичними моделями, які пов'язують мову КНЛК із АС даних. Будемо їх називати моделями мови.

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації на $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, – позначаємо Φ_{A}.

Формула Φ частково істинна при інтерпретації на $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, або $\boldsymbol{A}$-неспростовна, якщо Φ_{A} – частково істинний (неспростовний) предикат.

Це позначаємо $\boldsymbol{A} \models \Phi$.

Формула Φ частково істинна, або неспростовна, якщо Φ частково істинна при кожній інтерпретації.

Це позначаємо $\models \Phi$.

Аналогічно визначаємо [4] тотально істинні при інтерпретації на $\boldsymbol{A}$ та тотально істинні формули.

Ім'я $x\in V$ строго неістотне для формули Φ, якщо для кожної $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ ім'я x строго неістотне для предиката Φ_{A}.

Для виконання еквівалентних перетворень формул мови КНЛК необхідна [4] наявність нескінченної множини тотально (строго) неістотних імен.

Для кожного $p\in Ps$ множину синтетично строго неістотних предметних імен задамо за допомогою тотальної функції $\nu : Ps\to 2^{V}$. Така функція природним чином [4] продовжується до $\nu : Fr\to 2^{V}$. Тотальна строго неістотність імені x означає, що $x \in \bigcap\limits_{p\in Ps} \nu(p)$.

АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_{B})$ назвемо [2] *дуальною* до $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_{A})$, якщо для кожного $\Phi\in Ps$ маємо $T(\Phi_{B}) = \overline{F(\Phi_{A})}$ та $F(\Phi_{B}) = \overline{T(\Phi_{A})}$. Тоді $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_{A})$ дуальна до $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_{B})$.

Якщо $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_{A})$ – АС з частковими однозначними предикатами, то дуальна

$\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ – АС з тотальними неоднозначними предикатами, та навпаки.

Нехай $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ та $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальні. Тоді [2] для кожної формули Ф:

1) $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$;

2) Φ_A еквітонний $\Rightarrow$ Φ_B антитонний та Φ_A антитонний $\Rightarrow$ Φ_B еквітонний.

Таким чином, неокласична семантика та пересичена семантика дуальні. Це означає, що Φ_A неспростовний на АС $\boldsymbol{A}$ із частковими однозначними предикатами (неокласична семантика) $\Leftrightarrow$ Φ_B тотально істинний на дуальній АС $\boldsymbol{B}$ із тотальними неоднозначними предикатами (пересичена семантика).

2. *X–Y*-означені відношення логічного наслідку

У випадку формалізації за допомогою секвенційних числень відношень $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$ в різних семантиках, а також відношення $\models_{Cl}$ для логік нееквітонних предикатів (дуально: відношення $\models_{Cm}$ для логік неантитонних предикатів) необхідно врахувати ту обставину, що значення предиката $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до d компонента з певним предметним іменем. Ця обставина має принциповий характер, вона веде (див. [2]) до неможливості елімінації кванторів у випадках відношень $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, а також відношення $\models_{Cl}$ для логік неeквітонних предикатів (відношення $\models_{Cm}$ для логік неантитонних предикатів).

Таким чином, при інтерпретаціях формул на моделях мови необхідно явно виділяти множини означених та неозначених імен для даних, до яких застосовуються предикати. Тому в [5] введено поняття *X–Y*-означених іменних множин, *X–Y*-означених областей істинності й хибності квазіарного предиката. Для логік однозначних часткових предикатів в [5] введено поняття *X–Y*-означених відношень логічного наслідку (для випадку *Cl*-відношень).

***X–Y*-означені іменні множини.** Множини X, Y називають диз'юнктними, якщо $X \cap Y = \varnothing$.

Для довільних диз'юнктних $X, Y \subseteq V$ множину *X–Y*-означених *V*-ІМ задамо так:

$$^{V,X-Y}A = \{d \in {}^{V}A \mid X \subseteq im(d) \text{ та } Y \cap im(d) = \varnothing\}.$$

X–Y-означеність полягає в наступному: імена із X мають значення, імена із Y – не мають значення.

Якщо $Y = \varnothing$, то отримуємо множину *X*-означених *V*-ІМ:

$$^{V,X}A = \{d \in {}^{V}A \mid X \subseteq im(d)\}.$$

Для випадку $X = \varnothing$ отримуємо множину *Y*-неозначених *V*-ІМ:

$$^{V,-Y}A = \{d \in {}^{V}A \mid Y \cap im(d) = \varnothing\}.$$

Із визначень отримуємо такі співвідношення:

$$^{V,X-Y}A = {}^{V,X}A \cap {}^{V,-Y}A;$$
$$^{V,X\cup Z}A = {}^{V,X}A \cap {}^{V,Z}A;$$
$$^{V,-Y\cup Z}A = {}^{V,-Y}A \cap {}^{V,-Z}A.$$

Твердження 1. Нехай $Z, W, U \subseteq V$ – диз'юнктні множини предметних імен. Тоді $^{V,W-U}A = \bigcup_{Y \subseteq Z} {}^{V,W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}A$

Зокрема, для диз'юнктних $Z, W \subseteq V$ маємо $^{V,W}A = \bigcup_{Y \subseteq Z} {}^{V,W\cup Y-Z\setminus Y}A$; для довільної $Z \subseteq V$ маємо $^{V}A = \bigcup_{Y \subseteq Z} {}^{V,Y-Z\setminus Y}A$.

***X–Y*-означені області істинності й хибності.** Для довільних диз'юнктних $X, Y \subseteq V$ визначимо *X–Y*-означені області істинності й хибності предиката P:

$$\boldsymbol{T}_{X-Y}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d) = T \text{ та } X \subseteq im(d), Y \cap im(d) = \varnothing\} = \{d \in {}^{V,X-Y}A \mid P(d) = T\}.$$
$$\boldsymbol{F}_{X-Y}(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d) = F \text{ та } X \subseteq im(d), Y \cap im(d) = \varnothing\} = \{d \in {}^{V,X-Y}A \mid P(d) = F\}.$$

Таким чином, беремо до уваги тільки ті елементи областей істинності та хибності предиката, в яких імена із X мають значення, імена із Y не мають значення.

Якщо $Y = \varnothing$, то маємо *X*-означені області істинності й хибності предиката P:

$$\boldsymbol{T}_X(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d) = T \text{ та } X \subseteq im(d)\} = \{d \in {}^{V,X}A \mid P(d) = T\}$$
$$\boldsymbol{F}_X(P) = \{d \in {}^{V}A \mid P(d) = F \text{ та } X \subseteq im(d)\} = \{d \in {}^{V,X}A \mid P(d) = F\}.$$

Якщо $X = \varnothing$, то маємо *Y*-неозначені області істинності й хибності предиката P:

$\boldsymbol{T}_{-Y}(P) = \{d\in{}^{V}\!A \mid P(d)=T$ та
$Y\cap im(d)=\varnothing\} = \{d\in{}^{V,-Y}\!A \mid P(d)=T\}$;
$\boldsymbol{F}_{-Y}(P) = \{d\in{}^{V}\!A \mid P(d)=F$ та
$Y\cap im(d)=\varnothing\} = \{d\in{}^{V,-Y}\!A \mid P(d)=F\}$.

Твердження 2. Маємо
$\boldsymbol{T}_{X-Y}(P)\subseteq\boldsymbol{T}_{X}(P)\subseteq\boldsymbol{T}(P)$ та
$\boldsymbol{F}_{X-Y}(P)\subseteq\boldsymbol{F}_{X}(P)\subseteq\boldsymbol{F}(P)$;
$\boldsymbol{T}_{X-Y}(P)\subseteq\boldsymbol{T}_{-Y}(P)\subseteq\boldsymbol{T}(P)$ та
$\boldsymbol{F}_{X-Y}(P)\subseteq\boldsymbol{F}_{-Y}(P)\subseteq\boldsymbol{F}(P)$.

Теорема 1. Для логік квазіарних предикатів справджуються співвідношення:

$\boldsymbol{T}_{Y-Z}(R_y^x(P))\subseteq\boldsymbol{T}_{Y-Z}(\exists x(P))$ при умові $y\in Y$ (TR∃)

$\boldsymbol{F}_{Y-Z}(\exists x(P))\subseteq\boldsymbol{F}_{Y-Z}(R_y^x(P))$ при умові $y\in Y$ (FR∃)

$\boldsymbol{T}_{Y-Z}(\forall x(P))\subseteq\boldsymbol{T}_{Y-Z}(R_y^x(P))$ при умові $y\in Y$ (TR∀)

$\boldsymbol{F}_{Y-Z}(R_y^x(P))\subseteq\boldsymbol{F}_{Y-Z}(\forall x(P))$ при умові $y\in Y$ (FR∀)

Доведення. Нехай $d\in\boldsymbol{T}_{Y-Z}(R_y^x(P))$ та $y\in Y$, тоді $Y\subseteq im(d)$, $Z\cap im(d)=\varnothing$ та $d\in\boldsymbol{T}(R_y^x(P))$, звідки маємо $y\in im(d)$ та $d\nabla x\mapsto d(y)\in\boldsymbol{T}(P)$. Згідно $y\in im(d)$ для деякого $a\in A$ маємо $d(y)\downarrow a$. Отже, $d\nabla x\mapsto a\in\boldsymbol{T}(P)$ для деякого $a\in A$ та $y\in Y\subseteq im(d)$, звідки $d\in\boldsymbol{T}(\exists x(P))$ та $y\in Y\subseteq im(d)$. Враховуючи $Z\cap im(d)=\varnothing$, тоді $d\in\boldsymbol{T}_{Y-Z}(\exists x(P))$. Отже, при $y\in Y$ маємо $\boldsymbol{T}_{Y-Z}(R_y^x(P))\subseteq\boldsymbol{T}_{Y-Z}(\exists x(P))$.

Нехай $d\in\boldsymbol{F}_{Y-Z}(\exists x(P))$ та $y\in Y$, тоді $Y\subseteq im(d)$, $Z\cap im(d)=\varnothing$ та $d\nabla x\mapsto b\in\boldsymbol{F}(P)$ для всіх $b\in A$. Згідно $y\in im(d)$ маємо $d(y)\downarrow a$ для деякого $a\in A$, тоді $d\nabla x\mapsto d(y)\in\boldsymbol{F}(P)$. Звідси $d\in\boldsymbol{F}(R_y^x(P))$ та $y\in Y\subseteq im(d)$. Враховуючи $Z\cap im(d)=\varnothing$, тоді $d\in\boldsymbol{F}_{Y-Z}(R_y^x(P))$. Таким чином, при умові $y\in Y$ отримуємо $\boldsymbol{F}_{Y-Z}(\exists x(P))\subseteq\boldsymbol{F}_{Y-Z}(R_y^x(P))$.

Нехай $d\in\boldsymbol{T}_{Y-Z}(\forall x(P))$ та $y\in Y$, тоді $Y\subseteq im(d)$, $Z\cap im(d)=\varnothing$ та $d\nabla x\mapsto b\in\boldsymbol{T}(P)$ для всіх $b\in A$. Згідно $y\in im(d)$ маємо $d(y)\downarrow a$ для деякого $a\in A$, тоді $d\nabla x\mapsto d(y)\in\boldsymbol{T}(P)$. Отже, $d\in\boldsymbol{T}(R_y^x(P))$ та $y\in Y\subseteq im(d)$. Враховуючи $Z\cap im(d)=\varnothing$, тоді $d\in\boldsymbol{T}_{Y-Z}(R_y^x(P))$. Таким чином, при умові $y\in Y$ отримуємо $\boldsymbol{T}_{Y-Z}(\forall x(P))\subseteq\boldsymbol{T}_{Y-Z}(R_y^x(P))$.

Нехай $d\in\boldsymbol{F}_{Y-Z}(R_y^x(P))$ та $y\in Y$, тоді $Y\subseteq im(d)$, $Z\cap im(d)=\varnothing$ та $d\in\boldsymbol{F}(R_y^x(P))$, звідки $y\in im(d)$ та $d\nabla x\mapsto d(y)\in\boldsymbol{F}(P)$. Згідно $y\in im(d)$ маємо $d(y)\downarrow a$ для деякого $a\in A$. Таким чином, $d\nabla x\mapsto a\in\boldsymbol{F}(P)$ для деякого $a\in A$ та $y\in Y\subseteq im(d)$, звідки $d\in\boldsymbol{F}(\forall x(P))$ та $y\in Y\subseteq im(d)$. Враховуючи $Z\cap im(d)=\varnothing$, тоді $d\in\boldsymbol{F}_{Y-Z}(\forall x(P))$. Отже, при умові $y\in Y$ маємо $\boldsymbol{F}_{Y-Z}(R_y^x(P))\subseteq\boldsymbol{F}_{Y-Z}(\forall x(P))$.

***X–Y*-означені відношення логічного наслідку.** Для довільних диз'юнктних $X, Y\subseteq V$ визначимо X–Y-означені відношення наслідку для двох формул при фіксованій моделі мови $\boldsymbol{A}$.

$\Phi_{A,X-Y}\models_{Cl}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Phi_A)\cap\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Psi_A)=\varnothing$;

$\Phi_{A,X-Y}\models_{Cm}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Phi_A)\cup\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Psi_A)={}^{V,X-Y}\!A$;

$\Phi_{A,X-Y}\models_{T}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Phi_A)\subseteq\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Psi_A)$;

$\Phi_{A,X-Y}\models_{F}\Psi$, якщо $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Psi_A)\subseteq\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Phi_A)$;

$\Phi_{A,X-Y}\models_{TF}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Phi_A)\subseteq\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Psi_A)\subseteq\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Phi_A)$.

Якщо $Y=\varnothing$, то отримуємо X-означені відношення наслідку:

$\Phi_{A,X}\models_{Cl}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{X}(\Phi_A)\cap\boldsymbol{F}_{X}(\Psi_A)=\varnothing$;

$\Phi_{A,X}\models_{Cm}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{X}(\Phi_A)\cup\boldsymbol{F}_{X}(\Psi_A)={}^{V,X}\!A$;

$\Phi_{A,X}\models_{T}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{X}(\Phi_A)\subseteq\boldsymbol{T}_{X}(\Psi_A)$;

$\Phi_{A,X}\models_{F}\Psi$, якщо $\boldsymbol{F}_{X}(\Psi_A)\subseteq\boldsymbol{F}_{X}(\Phi_A)$;

$\Phi_{A,X}\models_{TF}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{X}(\Phi_A)\subseteq\boldsymbol{T}_{X}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}_{X}(\Psi_A)\subseteq\boldsymbol{F}_{X}(\Phi_A)$.

Для випадку $X=\varnothing$ отримуємо Y-неозначені відношення наслідку:

$\Phi_{A,-Y}\models_{Cl}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{-Y}(\Phi_A)\cap\boldsymbol{F}_{-Y}(\Psi_A)=\varnothing$;

$\Phi_{A,-Y}\models_{Cm}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{-Y}(\Phi_A)\cup\boldsymbol{F}_{-Y}(\Psi_A)={}^{V,-Y}\!A$;

$\Phi_{A,-Y}\models_{T}\Psi$, якщо $\boldsymbol{T}_{-Y}(\Phi_A)\subseteq\boldsymbol{T}_{-Y}(\Psi_A)$;

$\Phi_{A,-Y}\models_{F}\Psi$, якщо

$\boldsymbol{F}_{-Y}(\Psi_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{-Y}(\Phi_A)$;

$\Phi_{\boldsymbol{A},-Y}|\!=_{TF}\Psi$, якщо

$\boldsymbol{T}_{-Y}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{-Y}(\Psi_A)$ та

$\boldsymbol{F}_{-Y}(\Psi_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{-Y}(\Phi_A)$.

У випадку $X=Y=\varnothing$ маємо відомі [5] відношення $_{\boldsymbol{A}}|\!=_{Cl}$, $_{\boldsymbol{A}}|\!=_{Cm}$, $_{\boldsymbol{A}}|\!=_{T}$, $_{\boldsymbol{A}}|\!=_{F}$, $_{\boldsymbol{A}}|\!=_{TF}$.

Із визначень випливає, що введені відношення рефлексивні й транзитивні.

Твердження 3. Для введених відношень маємо:

$\Phi_{\boldsymbol{A}}|\!=_{*}\Psi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},X}|\!=_{*}\Psi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},X\text{–}Y}|\!=_{*}\Psi$ та $\Phi_{\boldsymbol{A}}|\!=_{*}\Psi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},-Y}|\!=_{*}\Psi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},X\text{–}Y}|\!=_{*}\Psi$.

Тут $*$ – одне з *Cl*, *Cm*, *T*, *F*, *TF*.

Для *Cl*-наслідків наше твердження випливає з твердження 2.

Розглянемо *Cm*-наслідки. Нехай $\Phi_{\boldsymbol{A}}|\!=_{Cm}\Psi$, тоді $\boldsymbol{T}(\Phi_A) \cup \boldsymbol{F}(\Psi_A) = {}^{V}A$. Покажемо, що тоді $\boldsymbol{T}_X(\Phi_A) \cup \boldsymbol{F}_X(\Psi_A) = {}^{V,X}A$. Якщо це не так, то для деякого $d \in {}^{V,X}A$ маємо $d \notin \boldsymbol{T}_X(\Phi_A)$ та $d \notin \boldsymbol{F}_X(\Psi_A)$. Але $X \subseteq im(d)$, тому $d \notin \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $d \notin \boldsymbol{F}(\Psi_A)$, що суперечить $\boldsymbol{T}(\Phi_A) \cup \boldsymbol{F}(\Psi_A) = {}^{V}A$. Тепер покажемо $\Phi_{\boldsymbol{A}}|\!=_{Cm}\Psi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},-Y}|\!=_{Cm}\Psi$. Якщо це не так, то $\boldsymbol{T}(\Phi_A) \cup \boldsymbol{F}(\Psi_A) = {}^{V}A$, проте для деякого $d \in {}^{V,-Y}A$ маємо $d \notin \boldsymbol{T}_{-Y}(\Phi_A)$ та $d \notin \boldsymbol{F}_{-Y}(\Psi_A)$. Але $Y \cap im(d) = \varnothing$, тому $d \notin \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $d \notin \boldsymbol{F}(\Psi_A)$, що суперечить $\boldsymbol{T}(\Phi_A) \cup \boldsymbol{F}(\Psi_A) = {}^{V}A$.

Аналогічно доводимо $\Phi_{\boldsymbol{A},X}|\!=_{Cm}\Psi \Rightarrow \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},X\text{–}Y}|\!=_{Cm}\Psi$, $\Phi_{\boldsymbol{A},-Y}|\!=\Psi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},X\text{–}Y}|\!=_{Cm}\Psi$.

Розглянемо *T*-наслідки. Нехай $\Phi_{\boldsymbol{A}}|\!=_{T}\Psi$, тоді $\boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$. Покажемо, що тоді $\boldsymbol{T}_X(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}_X(\Psi_A)$. Якщо це не так, то для деякого $d \in {}^{V,X}A$ маємо $d \in \boldsymbol{T}_X(\Phi_A)$ та $d \notin \boldsymbol{T}_X(\Psi_A)$. Але $X \subseteq im(d)$, тому $d \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $d \notin \boldsymbol{T}(\Psi_A)$, що суперечить $\boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$. Тепер покажемо $\Phi_{\boldsymbol{A}}|\!=_{T}\Psi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},-Y}|\!=_{T}\Psi$. Якщо це не так, то $\boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$, проте для деякого $d \in {}^{V,-Y}A$ маємо $d \in \boldsymbol{T}_{-Y}(\Phi_A)$ та $d \notin \boldsymbol{T}_{-Y}(\Psi_A)$. Але $Y \cap im(d) = \varnothing$, тому $d \in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $d \notin \boldsymbol{F}(\Psi_A)$, що суперечить $\boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$.

Аналогічно доводимо $\Phi_{\boldsymbol{A},X}|\!=_{T}\Psi \Rightarrow \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},X\text{–}Y}|\!=_{T}\Psi$, $\Phi_{\boldsymbol{A},-Y}|\!=_{T}\Psi \Rightarrow \Phi_{\boldsymbol{A},X\text{–}Y}|\!=_{T}\Psi$.

Подібним чином розглядаємо випадки *F*-наслідків та *TF*-наслідків.

Із теореми 1 для відповідних семантик та наслідків отримуємо:

Твердження 4. При умові $z \in X$ маємо $R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},X\text{–}Y}|\!=_{*}\exists x\Phi$ та $\forall x\Phi_{\boldsymbol{A},X\text{–}Y}|\!=_{*}R_z^x(\Phi)$.

Тут $*$ – одне з *Cl*, *Cm*, *T*, *F*, *TF*.

Тут враховуємо, що для однозначних предикатів $\boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\exists x\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\exists x\Phi_A) = \varnothing$ та $\boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\forall x\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\forall x\Phi_A) = \varnothing$, для тотальних – $\boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(R_z^x(\Phi)_A) \cup \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(R_z^x(\Phi)_A) = {}^{V}A$.

Поширимо поняття *X–Y*-означеного логічного наслідку при фіксованій моделі мови $\boldsymbol{A}$ на довільні множини формул.

Δ є *X–Y*-означеним *Cl*-логічним наслідком Γ в АС $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Gamma_{\boldsymbol{A},X\text{–}Y}|\!=_{\boldsymbol{Cl}}\Delta$), якщо

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T_{X-Y}(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi\in\Delta} F_{X-Y}(\Psi_A) = \varnothing.$$

Δ є *X–Y*-означеним *Cm*-логічним наслідком Γ в АС $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Gamma_{\boldsymbol{A},X\text{–}Y}|\!=_{\boldsymbol{Cm}}\Delta$), якщо

$$\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{X-Y}(\Phi_A) \cup \bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{X-Y}(\Psi_A) = {}^{V,X-Y}A.$$

Δ є *X–Y*-означеним *T*-логічним наслідком Γ в АС $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Gamma_{\boldsymbol{A},X\text{–}Y}|\!=_{\boldsymbol{T}}\Delta$), якщо

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T_{X-Y}(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{X-Y}(\Psi_A).$$

Δ є *X–Y*-означеним *F*-логічним наслідком Γ в АС $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Gamma_{\boldsymbol{A},X\text{–}Y}|\!=_{\boldsymbol{F}}\Delta$), якщо

$$\bigcap_{\Psi\in\Delta} F_{X-Y}(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{X-Y}(\Phi_A).$$

Δ є *X–Y*-означеним *TF*-логічним наслідком Γ в АС $\boldsymbol{A}$ (позн. $\Gamma_{\boldsymbol{A},X\text{–}Y}|\!=_{\boldsymbol{TF}}\Delta$), якщо

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T_{X-Y}(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{X-Y}(\Psi_A) \text{ та}$$
$$\bigcap_{\Psi\in\Delta} F_{X-Y}(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{X-Y}(\Phi_A).$$

Аналогічним чином вводимо *X*-означені та *Y*-неозначені відношення наслідку для множин формул при фіксованій моделі мови $\boldsymbol{A}$.

$\Gamma_{\boldsymbol{A},X}|\!=_{\boldsymbol{Cl}}\Delta$, якщо

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T_X(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi\in\Delta} F_X(\Psi_A) = \varnothing.$$

$\Gamma_{\boldsymbol{A},X}|\!=_{\boldsymbol{Cm}}\Delta$, якщо

$$\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_X(\Phi_A) \cup \bigcup_{\Psi\in\Delta} T_X(\Psi_A) = {}^{V,X}A.$$

$\Gamma_{\boldsymbol{A},X}|\!=_{\boldsymbol{T}}\Delta$, якщо

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T_X(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi\in\Delta} T_X(\Psi_A).$$

$\Gamma_{\boldsymbol{A},X}|\!=_{\boldsymbol{F}}\Delta$, якщо

$$\bigcap_{\Psi\in\Delta} F_X(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_X(\Phi_A).$$

$\Gamma_{\boldsymbol{A},X}|\!=_{\boldsymbol{TF}}\Delta$, якщо

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T_X(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi\in\Delta} T_X(\Psi_A) \text{ та}$$
$$\bigcap_{\Psi\in\Delta} F_X(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_X(\Phi_A).$$

$\Gamma_{\boldsymbol{A},-Y}\models_{\boldsymbol{Cl}}\Delta$, якщо
$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T_{-Y}(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi\in\Delta} F_{-Y}(\Psi_A) = \varnothing.$$

$\Gamma_{\boldsymbol{A},-Y}\models_{\boldsymbol{Cm}}\Delta$, якщо
$$\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{-Y}(\Phi_A) \cup \bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{-Y}(\Psi_A) = {}^{V,-Y}A.$$

$\Gamma_{\boldsymbol{A},-Y}\models_{\boldsymbol{T}}\Delta$, якщо
$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T_{-Y}(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{-Y}(\Psi_A).$$

$\Gamma_{\boldsymbol{A},-Y}\models_{\boldsymbol{F}}\Delta$, якщо
$$\bigcap_{\Psi\in\Delta} F_{-Y}(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{-Y}(\Phi_A).$$

$\Gamma_{\boldsymbol{A},-Y}\models_{\boldsymbol{TF}}\Delta$, якщо
$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T_{-Y}(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{-Y}(\Psi_A) \text{ та}$$
$$\bigcap_{\Psi\in\Delta} F_{-Y}(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{-Y}(\Phi_A).$$

У випадку $X=Y=\varnothing$ отримуємо відношення ${}_{\boldsymbol{A}}\models_{\boldsymbol{Cl}}$, ${}_{\boldsymbol{A}}\models_{\boldsymbol{Cm}}$, ${}_{\boldsymbol{A},}\models_{\boldsymbol{T}}$, ${}_{\boldsymbol{A}}\models_{\boldsymbol{F}}$, ${}_{\boldsymbol{A}}\models_{\boldsymbol{TF}}$.

Твердження 5. Відношення наслідку ${}_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_*$, ${}_{\boldsymbol{A},X}\models_*$, ${}_{\boldsymbol{A},-Y}\models_*$ рефлексивні, проте нетранзитивні.

Твердження 6. Для введених відношень маємо:

$\Gamma_{\boldsymbol{A}}\models_*\Delta \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},X}\models_*\Delta \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_*\Delta$ та $\Gamma_{\boldsymbol{A}}\models_*\Delta \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},-Y}\models_*\Delta \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_*\Delta$.

Тут $*$ – одне з *Cl*, *Cm*, *T*, *F*, *TF*.

Твердження 6 узагальнює твердження 3 і доводиться подібним чином.

Якщо z тотально строго неістотне та $z\notin nm(\Phi)$, то для довільних $\boldsymbol{A}$, $d\in{}^{V}A$ та $a\in A$ маємо $\Phi_A(d\nabla x\mapsto a) = \Phi_A(d\|{-x})$. Звідси отримуємо

Твердження 7. Нехай z тотально строго неістотне та $z\notin nm(\Gamma\cup\Delta)$. Тоді маємо:

1) $\Gamma_{\boldsymbol{A},\{z\}\cup X-Y}\models_*\Delta \Leftrightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_*\Delta$;

2) $\Gamma_{\{z\}\cup X-Y}\models_*\Delta \Leftrightarrow \Gamma_{X-Y}\models_*\Delta$.

Тут $*$ – одне з *Cl*, *Cm*, *T*, *F*, *TF*.

Теорема 2. Нехай $Z, W, U\subseteq V$ – диз'юнктні множини предметних імен. Тоді

$\Gamma_{\boldsymbol{A},W-U}\models_*\Delta \Leftrightarrow$ для кожної $Y\subseteq Z$ маємо $\Gamma_{\boldsymbol{A},W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}\models_*\Delta$.

Тут $*$ – одне з *Cl*, *Cm*, *T*, *F*, *TF*.

Доведення. Для довільних $\Phi\in\Gamma$, $\Psi\in\Delta$ та диз'юнктних $Z, W, U\subseteq V$ для кожної $Y\subseteq Z$ маємо $\boldsymbol{T}_{W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}(\Phi_A)\subseteq\boldsymbol{T}_{W-U}(\Phi_A)$ та $\boldsymbol{F}_{W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}(\Psi_A)\subseteq\boldsymbol{F}_{W-U}(\Psi_A)$.

Доведемо для *Cl*-наслідків. Із наведених вище включень маємо: із умови $\Gamma_{\boldsymbol{A},W-U}\models_{\boldsymbol{Cl}}\Delta$ випливає, що для кожної $Y\subseteq Z$ $\Gamma_{\boldsymbol{A},W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}\models_{\boldsymbol{Cl}}\Delta$. Покажемо зворотне.

Нехай $\Gamma_{\boldsymbol{A},W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}\models_{\boldsymbol{Cl}}\Delta$ для кожної $Y\subseteq Z$, проте $\Gamma_{\boldsymbol{A},W-U}\not\models_{\boldsymbol{Cl}}\Delta$. Останнє означає, що $\boldsymbol{T}_{W-U}(\Phi_A)\cap\boldsymbol{F}_{W-U}(\Psi_A)\neq\varnothing$ для деяких $\Phi\in\Gamma$ та $\Psi\in\Delta$. Звідси існує $d\in{}^{V,W-U}A$ таке: $d\in\boldsymbol{T}_{W-U}(\Phi_A)$ та $d\in\boldsymbol{F}_{W-U}(\Psi_A)$. Нехай $Y=Z\cap im(d)$, тоді $d\in{}^{V,W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}A$, звідки $d\in\boldsymbol{T}_{W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}(\Phi_A)$ та $d\in\boldsymbol{F}_{W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}(\Psi_A)$ для деяких $\Phi\in\Gamma$ і $\Psi\in\Delta$, тому $\Gamma_{\boldsymbol{A},W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}\not\models_{\boldsymbol{Cl}}\Delta$. Отримали суперечність. Отже, $\Gamma_{\boldsymbol{A},W-U}\not\models_{\boldsymbol{Cl}}\Delta$ невірно, тому $\Gamma_{\boldsymbol{A},W-U}\models_{\boldsymbol{Cl}}\Delta$.

Доведемо для *Cm*-наслідків. Нехай $\Gamma_{\boldsymbol{A},W-U}\models_{\boldsymbol{Cm}}\Delta$; покажемо, що для кожної $Y\subseteq Z$ тоді $\Gamma_{\boldsymbol{A},W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}\models_{\boldsymbol{Cm}}\Delta$. Маємо
$$\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{W-U}(\Phi_A)\cup\bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{W-U}(\Psi_A) = {}^{V,W-U}A.$$
Припустимо супротивне: для деяких $Y\subseteq Z$ та $d\in{}^{V,W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}A$ маємо, що $d\notin \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}(\Phi_A)\cup\bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}(\Psi_A)$. Але ж $W\cup Y\subseteq im(d)$, $U\cup(Z\setminus Y)\cap im(d)=\varnothing$, тому неможливо $d\in\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A)$ і неможливо $d\in\bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A)$. Згідно твердження 2, звідси $d\notin\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{W-U}(\Phi_A)\cup\bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{W-U}(\Psi_A)$. Це суперечить умові $\Gamma_{\boldsymbol{A},W-U}\models_{\boldsymbol{Cm}}\Delta$.

Нехай $\Gamma_{\boldsymbol{A},W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}\models_{\boldsymbol{Cm}}\Delta$ для кожної $Y\subseteq Z$; покажемо, що тоді $\Gamma_{\boldsymbol{A},W-U}\models_{\boldsymbol{Cm}}\Delta$. Нехай супротивне, тоді для кожної $Y\subseteq Z$ $\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}(\Phi_A)\cup\bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}(\Psi_A) = {}^{V,W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}A$, проте існує $d\in{}^{V,W-U}A$: $d\notin\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{W-U}(\Phi_A)\cup\bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{W-U}(\Psi_A)$. Нехай $Y=Z\cap im(d)$, тоді $d\in{}^{V,W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}A$, тому $d\notin \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F_{W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}(\Phi_A)\cup\bigcup_{\Psi\in\Delta} T_{W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}(\Psi_A)$. Отримали суперечність.

Доведемо для *T*-наслідків. Нехай $\Gamma_{\boldsymbol{A},W-U}\models_{\boldsymbol{T}}\Delta$; покажемо, що для кожної $Y\subseteq Z$ тоді $\Gamma_{\boldsymbol{A},W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}\models_{\boldsymbol{T}}\Delta$. Нехай супротивне: для деяких $Y\subseteq Z$ та $d\in{}^{V,W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)}A$

маємо $d \in \bigcap_{\Phi \in \Gamma} T_{W \cup Y - U \cup (Z \setminus Y)}(\Phi_A)$ та $d \notin \bigcup_{\Psi \in \Delta} T_{W \cup Y - U \cup (Z \setminus Y)}(\Psi_A)$. Згідно твердження 2, із першого маємо $d \in \bigcap_{\Phi \in \Gamma} T_{W-U}(\Phi_A)$. Але $W \cup Y \subseteq im(d)$, $U \cup (Z \setminus Y) \cap im(d) = \varnothing$, тому із другого маємо $d \notin \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A)$, звідки $d \notin \bigcup_{\Psi \in \Delta} T_{W-U}(\Psi_A)$. Таким чином, невірно $\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T_{W-U}(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi \in \Delta} T_{W-U}(\Psi_A)$, тому маємо $\Gamma_{\boldsymbol{A},\, W-U} \not\models_{\boldsymbol{T}} \Delta$. Отримали суперечність.

Нехай $\Gamma_{\boldsymbol{A},\, W \cup Y - U \cup (Z \setminus Y)} \models_{\boldsymbol{T}} \Delta$ для кожної $Y \subseteq Z$; покажемо, що тоді $\Gamma_{\boldsymbol{A},\, W-U} \models_{\boldsymbol{T}} \Delta$. Нехай супротивне, тоді для кожної $Y \subseteq Z$ $\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T_{W \cup Y - U \cup (Z \setminus Y)}(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi \in \Delta} T_{W \cup Y - U \cup (Z \setminus Y)}(\Psi_A)$, проте існує $d \in^{V,\, W-U} A$: $d \in \bigcap_{\Phi \in \Gamma} T_{W-U}(\Phi_A)$ та $d \notin \bigcup_{\Psi \in \Delta} T_{W-U}(\Psi_A)$. Згідно твердження 2, із другого маємо $d \notin \bigcup_{\Psi \in \Delta} T_{W \cup Y - U \cup (Z \setminus Y)}(\Psi_A)$. Нехай $Y = Z \cap im(d)$, тоді $d \in^{V,\, W \cup Y - U \cup (Z \setminus Y)} A$, тому з першого $d \in \bigcap_{\Phi \in \Gamma} T_{W \cup Y - U \cup (Z \setminus Y)}(\Phi_A)$. Це суперечить умові $\Gamma_{\boldsymbol{A},\, W \cup Y - U \cup (Z \setminus Y)} \models_{\boldsymbol{T}} \Delta$.

Аналогічно доводимо твердження теореми для *F*-наслідків та *TF*-наслідків.

При умовах $U = \varnothing$ та $W = U = \varnothing$ відповідно отримуємо такі наслідки.

Наслідок 1. Нехай $Z, W \subseteq V$ – диз'юнктні множини предметних імен. Тоді:

$\Gamma_{\boldsymbol{A},\, W} \models_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},\, W \cup Y - Z \setminus Y} \models_* \Delta$ для кожної $Y \subseteq Z$.

Наслідок 2. Для довільної $Z \subseteq V$ маємо: $\Gamma_{\boldsymbol{A}} \models_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},\, Y - Z \setminus Y} \models_* \Delta$ для кожної $Y \subseteq Z$.

Тут $*$ – одне з *Cl*, *Cm*, *T*, *F*, *TF*.

Відповідні наслідки теореми 2 отримуємо у випадку відношень логічного наслідку для двох формул.

Твердження 8. Для логіки еквітонних предикатів в неокласичній семантиці при умові $z \in X$ та $y \in Y$ маємо:

1) $R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y} \models_{\boldsymbol{T}} R_{z,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Delta$ та $\neg R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y} \models_{\boldsymbol{T}} \neg R_{z,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Delta$;

2) $R_{z,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y} \models_{\boldsymbol{F}} R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Delta$ та $\neg R_{z,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y} \models_{\boldsymbol{F}} \neg R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi), \Delta$.

Справді, для еквітонних предикатів при $z \in X$, $y \in Y$ маємо:

$$\boldsymbol{F}_{X-Y}(R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(R_{z,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)_A);$$

$$\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(R_{z,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)_A).$$

Звідси й випливає твердження 8.

Аналогічне твердження формулюється для дуального випадку логіки антитонних предикатів в пересиченій семантиці.

Для формул вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ можна ввести [5] поняття *U*-неозначуваної форми.

Тут $U \subseteq V$ – довільна множина предметних імен, її трактуємо як множину неозначених імен. Це означає, що при інтерпретаціях усі імена *U* не мають значення.

Нехай $R_{s_1,\ldots s_k, y_1,\ldots y_n, v_1,\ldots v_m}^{r_1,\ldots r_k, x_1,\ldots x_n, u_1,\ldots u_m}\Phi$ така: усі $r_1,\ldots,r_k, s,\ldots,s_k, y_1,\ldots,y_n \in U$, $\{x_1,\ldots,x_n\} \cap U = \varnothing$, $\{v_1,\ldots,v_m\} \cap U = \varnothing$.

U-неозначувана форма формули $R_{s_1,\ldots s_k, y_1,\ldots y_n, v_1,\ldots v_m}^{r_1,\ldots r_k, x_1,\ldots x_n, u_1,\ldots u_m}\Phi$ – це вираз вигляду $R_{\perp,\ldots,\perp,\, v_1,\ldots,v_m}^{x_1,\ldots x_n, u_1,\ldots,u_m}\Phi$, де $\perp$ – спеціальний символ, який позначає невизначене значення.

Нехай $R_{\bar{b}}^{\bar{a}}\Phi$ та $R_{\bar{e}}^{\bar{c}}\Phi$ мають однакові *U*-неозначувані форми. Із визначень випливає, що на всіх моделях мови $\boldsymbol{A}$ предикати $R_{\bar{b}}^{\bar{a}}\Phi_A$ та $R_{\bar{e}}^{\bar{c}}\Phi_A$ приймають однакові значення на всіх $d \in^{V,-U} A$, де усі імена *U* не мають значення: $R_{\bar{b}}^{\bar{a}}\Phi_A(d) = R_{\bar{e}}^{\bar{c}}\Phi_A(d)$.

Таким чином, отримуємо наступну властивість (тут $*$ – одне з *Cl*, *Cm*, *T*, *F*, *TF*).

UnD) Якщо $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ та $R_{\bar{y}}^{\bar{z}}\Phi$ мають однакові *U*-неозначувані форми, то

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \Gamma_{\boldsymbol{A},-U} \models_* R_{\bar{y}}^{\bar{z}}\Phi, \Delta.$$

Узагальнимо для *X–Y*-означених наслідків властивість *U* (тут $*$ – одне з *Cl*, *Cm*, *T*, *F*, *TF*).

DU) Нехай $\Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y} \models_* \Delta$ та $\Delta \subseteq \boldsymbol{\Sigma}$, тоді $\Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y} \models_* \Sigma$;

нехай $\Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y} \models_* \Delta$ та $\Gamma \subseteq \Lambda$, тоді $\Lambda_{\boldsymbol{A},X-Y} \models_* \Delta$.

3. Властивості елімінації кванторів

Для спрощення запису далі будемо позначати:

$\bigcap\limits_{\Phi\in\Gamma} T_{X-Y}(\Phi_A)$ як $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)$,

$\bigcup\limits_{\Psi\in\Delta} T_{X-Y}(\Psi_A)$ як $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$,

$\bigcup\limits_{\Phi\in\Gamma} F_{X-Y}(\Phi_A)$ як $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)$,

$\bigcap\limits_{\Psi\in\Delta} F_{X-Y}(\Psi_A)$ як $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)$.

Аналогічно вводимо позначення $\boldsymbol{T}_X(\Gamma_A)$, $\boldsymbol{T}_X(\Delta_A)$, $\boldsymbol{F}_X(\Gamma_A)$, $\boldsymbol{F}_X(\Delta_A)$ та $\boldsymbol{T}_{-Y}(\Gamma_A)$, $\boldsymbol{T}_{-Y}(\Delta_A)$, $\boldsymbol{F}_{-Y}(\Gamma_A)$, $\boldsymbol{F}_{-Y}(\Delta_A)$.

Теорема 3. При умові $z\in X$ маємо (тут $*$ – одне з Cl, Cm, T, F, TF):

1) $\Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{*}\Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow$
$\Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{*}\Delta, \exists x\Phi$;

2) $\Gamma, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{*}\Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \Gamma, \forall x\Phi_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{*}\Delta$.

Доведення. Доведемо для Cl-наслідків. Згідно FR$\exists$ при умові $z\in X$ маємо $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)\subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$. Тому $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)=\varnothing \Rightarrow \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)=\varnothing$, тобто отримуємо $\Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{Cl}}\Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{Cl}}\Delta, \exists x\Phi$.

Згідно TR$\forall$ при умові $z\in X$ маємо $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)\subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$. Звідси маємо $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cap \boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)\cap \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)=\varnothing \Rightarrow \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)\cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)=\varnothing$, тобто отримуємо, що $\Gamma, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{Cl}}\Delta \Rightarrow \Gamma, \forall x\Phi_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{Cl}}\Delta$.

Доведемо для Cm-наслідків. Згідно TR$\exists$ при $z\in X$ $\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$. Тому отримуємо $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)\cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)\cup \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)={}^{V}\!A \Rightarrow \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)\cup \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)\cup \boldsymbol{T}_{X-Y}((\Delta_A)={}^{V}\!A$, тобто маємо $\Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{Cm}}\Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{Cm}}\Delta, \exists x$.

Згідно FR$\forall$ при умові $z\in X$ маємо $\boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)$. Звідси маємо $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)\cup \boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cup \boldsymbol{F}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)\cup \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)={}^{V}\!A \Rightarrow \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)\cup \boldsymbol{F}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)\cup \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)={}^{V}\!A$, тобто отримуємо, що $\Gamma, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{Cm}}\Delta \Rightarrow \Gamma, \forall x\Phi_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{Cm}}\Delta$.

Доведемо для T-наслідків. Згідно TR$\exists$ при $z\in X$ $\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$, тому отримуємо $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)\cup \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A) \Rightarrow \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\subseteq \subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)\cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$, тобто отримуємо, $\Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{T}}\Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{T}}\Delta, \exists x$.

Згідно TR$\forall$ при умові $z\in X$ маємо $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)\subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$, тому $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap \cap \boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cap \boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)\subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A) \Rightarrow \Rightarrow \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap \boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)\subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$, тобто $\Gamma, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{T}}\Delta \Rightarrow \Gamma, \forall x\Phi_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{T}}\Delta$.

Доведемо для F-наслідків. Згідно FR$\exists$ при $z\in X$ $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)\subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$, тому $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)\subseteq \subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A) \Rightarrow \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)\cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)\subseteq \subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)$, тобто $\Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{F}}\Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{F}}\Delta, \exists x$.

Згідно FR$\forall$ при умові $z\in X$ маємо $\boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)$, тому $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)\subseteq \subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cup \boldsymbol{F}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)\cup \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A) \Rightarrow \Rightarrow \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)\subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)\cup \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)$, тобто $\Gamma, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{F}}\Delta \Rightarrow \Gamma, \forall x\Phi_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{F}}\Delta$.

Об'єднуючи доведення для T-наслідків та F-наслідків, отримуємо доведення для TF-наслідків. Таким чином:

$\Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{TF}}\Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{TF}}\Delta, \exists x$;

$\Gamma, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{TF}}\Delta \Rightarrow \Gamma, \forall x\Phi_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{\boldsymbol{TF}}\Delta$.

Для базового квантора $\exists x$ п. 2 твердження теореми можна записати так:

2') $\Gamma, \neg\exists x\Phi, \neg R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{*}\Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \Gamma, \neg\exists x\Phi_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{*}\Delta$.

Враховуючи властивість DU, із теореми 3 отримуємо наступні властивості елімінації кванторів для X–Y-означених відношень логічного наслідку:

$\exists_{X-Y-|}$) $\Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{*}\Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{*}\Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi)$ при $z\in X$;

$\forall_{X-Y|-}$) 2) $\Gamma, \forall x\Phi_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{*}\Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)_{\boldsymbol{A},X-Y}\models_{*}\Delta$ при $z\in X$.

Перейшовши до базового квантора $\exists x$, властивість $\forall_{X-Y|-}$ перепишемо так:

$\neg\exists_{X-Y|-}$) $\Gamma, \neg\exists x\Phi_{X-Y}\models_{*}\Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma, \neg\exists x\Phi, \neg R_z^x(\Phi)_{X-Y}\models_{*}\Delta$.

Тут $*$ – одне з Cl, Cm, T, F, TF.

Зазначені властивості можна узагальнити.

Теорема 4. Нехай $Z, W, U \subseteq V$ – диз'юнктні множини, нехай $Y \subseteq Z$. Тоді:

1) $\Gamma_{A,\, W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)} \models_* \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow$
$\Gamma_{A,\, W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)} \models_* \Delta, \exists x\Phi, R^x_{y_1}(\Phi),..., R^x_{y_n}(\Phi),...,$
де всі $y_i \in Y$;

2) $\neg\exists x\Phi, \Gamma_{A,\, W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)} \models_* \Delta \Leftrightarrow$
$\neg\exists x\Phi, \neg R^x_{y_1}(\Phi),..., \neg R^x_{y_n}(\Phi),..., \Gamma_{A, W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)} \models_* \Delta,$
де всі $y_i \in Y$.

Тут $*$ – одне з *Cl*, *Cm*, *T*, *F*, *TF*.

Доведення теореми 4 подібне доведенню теореми 3, воно використовує теорему 1, а також властивість *DU*.

Беручи до уваги теорему 2, отримуємо такі властивості елімінації кванторів для *X*–*Y*-означених відношень логічного наслідку (тут $*$ – одне з *Cl*, *Cm*, *T*, *F*, *TF*).

Нехай $Z, W, U \subseteq V$ – диз'юнктні множини предметних імен. Тоді:

$Br\exists_{-|}$) $\Gamma_{A,\, W-U} \models_* \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow$
для кожної $Y \subseteq Z$ $\Gamma_{A,\, W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)} \models_* \Delta, \exists x\Phi, R^x_{y_1}(\Phi),..., R^x_{y_n}(\Phi),...,$ де всі $y_i \in Y$.

$Br\neg\exists_{|-}$) $\neg\exists x\Phi, \Gamma_{A,\, W-U} \models_* \Delta \Leftrightarrow$
для кожної $Y \subseteq Z$
$\neg\exists x\Phi, \neg R^x_{y_1}(\Phi),..., \neg R^x_{y_n}(\Phi),..., \Gamma_{A, W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)} \models_* \Delta,$
де всі $y_i \in Y$.

Теорема 5. Для логік квазіарних предикатів при умові $z \in X$ маємо:

1) $\Gamma, \exists x\Phi_{A, X-Y} \models_* \Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \Gamma, R^x_z(\Phi)_{A, X-Y} \models_* \Delta$;

2) $\Gamma_{A, X-Y} \models_* \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \Gamma_{A, X-Y} \models_* R^x_z(\Phi), \Delta$.

Тут $*$ – одне з *Cl*, *Cm*, *T*, *F*, *TF*.

Доведення. Доведемо для *Cl*-наслідків. Згідно TR$\exists$ при $z \in X$ $\boldsymbol{T}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$. Звідси $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) = \varnothing \Rightarrow \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) = \varnothing$, тобто $\Gamma, \exists x\Phi_{A, X-Y} \models_{Cl} \Delta \Rightarrow \Gamma, R^x_z(\Phi)_{A, X-Y} \models_{Cl} \Delta$.

Згідно FR$\forall$ при умові $z \in X$ маємо $\boldsymbol{F}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(\forall x\Phi)$. Звідси $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\forall x\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) = \varnothing \Rightarrow \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) = \varnothing$, що й дає $\Gamma_{A, X-Y} \models_{Cl} \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma_{A, X-Y} \models_{Cl} R^x_z(\Phi), \Delta$.

Доведемо для *Cm*-наслідків. Згідно FR$\exists$ при $z \in X$ $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A)$, тому $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A) \cup \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A) \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A) = {}^V\!A \Rightarrow$ $\Rightarrow \boldsymbol{F}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A) \cup \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A) \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A) = {}^V\!A$, або $\Gamma, \exists x\Phi_{A, X-Y} \models_{Cm} \Delta \Rightarrow \Gamma, R^x_z(\Phi)_{A, X-Y} \models_{Cm} \Delta$.

Згідно TR$\forall$ при $z \in X$ $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A)$, тому маємо $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A) \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A) \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A) = {}^V\!A \Rightarrow \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A) \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A) \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A) = {}^V\!A$, тобто $\Gamma_{A, X-Y} \models_{Cm} \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma_{A, X-Y} \models_{Cm} R^x_z(\Phi), \Delta$.

Доведемо для *T*-наслідків. Згідно TR$\exists$ при $z \in X$ $\boldsymbol{T}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$, тому $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A) \Rightarrow$ $\Rightarrow \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$, тобто $\Gamma, \exists x\Phi_{A, X-Y} \models_T \Delta \Rightarrow \Gamma, R^x_z(\Phi)_{A, X-Y} \models_T \Delta$.

Згідно TR$\forall$ при умові $z \in X$ маємо $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A)$, тому $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A) \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A) \Rightarrow \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A) \cup \boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$, тобто маємо $\Gamma_{A, X-Y} \models_T \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma_{A, X-Y} \models_T R^x_z(\Phi), \Delta$.

Доведемо для *F*-наслідків. Згідно FR$\exists$ при $z \in X$ $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A)$, тому $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A) \cup \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A) \Rightarrow$ $\Rightarrow \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A) \cup \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)$, або $\Gamma, \exists x\Phi_{A, X-Y} \models_F \Delta \Rightarrow \Gamma, R^x_z(\Phi)_{A, X-Y} \models_F \Delta$.

Згідно FR$\forall$ при $z \in X$ $\boldsymbol{F}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)$, тому $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\forall x\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A) \Rightarrow \boldsymbol{F}_{X-Y}(R^x_z(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)$, що й дає $\Gamma_{A, X-Y} \models_F \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \Gamma_{A, X-Y} \models_F R^x_z(\Phi), \Delta$.

Об'єднуючи доведення для *T*-наслідків та *F*-наслідків, отримуємо доведення для *TF*-наслідків. Таким чином, маємо $\Gamma, \exists x\Phi_{A, X-Y} \models_{TF} \Delta \Rightarrow \Gamma, R^x_z(\Phi)_{A, X-Y} \models_{TF} \Delta$ та $\Gamma_{A, X-Y} \models_{TF} \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma_{A, X-Y} \models_{TF} R^x_z(\Phi), \Delta$.

Теорема 6. Нехай z тотально строго неістотне та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$. Тоді при $z \in X$:

1) $R^x_z(\Phi), \Gamma_{A, X-Y} \models_* \Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists x\Phi, \Gamma_{A, X-Y} \models_* \Delta$;

2) $\Gamma_{A,X-Y}\models_* R_z^x(\Phi),\Delta \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma_{A,X-Y}\models_* \forall x\Phi,\Delta.$

Тут $*$ – одне з Cl, Cm, T, F, TF.

Зауважимо, що п. 2 можна переформулювати так:

2') $\Gamma_{A,X-Y}\models_* \neg R_z^x(\Phi),\Delta \;\Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma_{A,X-Y}\models_* \neg\exists x\Phi,\Delta.$

Доводимо п.1 для $_{A,X-Y}\models_{Cl}$. Покажемо: із $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cap\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)=\varnothing$ випливає $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap\boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)\cap\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)=\varnothing$. Нехай супротивне: існує $d\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap\cap\,\boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)\cap\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)$, проте $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap\cap\,\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cap\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)=\varnothing$ $(*)$. Із першої умови маємо $d\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$, $d\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)$ та $d\in\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)$; із $d\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$ далі маємо $d\nabla x\mapsto a\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Phi_A)$ для деякого $a\in A$. Але z тотально строго неістотне та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\Phi)$, тому $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)$, $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)$, $d\nabla x\mapsto a\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Phi_A)$. Із останнього випливає $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$, тому маємо $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi)_A)\cap\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)$, що суперечить умові $(*)$.

Доводимо п.1 для $_{A,X-Y}\models_{Cm}$. Покажемо: із $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)\cup\boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cup\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)= ={}^{V,\,X-Y}A$ випливає $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)\cup\boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)\cup\cup\,\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)={}^{V,\,X-Y}A$. Нехай супротивне: існує $d\in{}^{V,\,X-Y}A$ таке, що $d\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)\cup\cup\,\boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)\cup\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$, проте $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)\cup\cup\,\boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cup\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)={}^{V,\,X-Y}A$ $(*)$. Із першого маємо $d\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)$, $d\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$ та $d\notin\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$; із $d\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$ маємо $d\nabla x\mapsto a\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Phi_A)$ для деякого $a\in A$. Але z тотально строго неістотне та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\Phi)$, тому $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)$, $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$, $d\nabla x\mapsto a\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Phi_A)$. Із останнього отримуємо $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$, тому $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)\cup\boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cup\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$, що суперечить $(*)$.

Враховуючи, що для відношень $\models_{Cl}$ та $\models_{Cm}$ можна [2] знімати заперечення, переносячи формулу з лівої частини у праву і навпаки, отримуємо, що п.2 для $\models_{Cm}$ та $\models_{Cl}$ випливає з п.1.

Доводимо п.1 для $\models_{T}$. Покажемо: з умови $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\subseteq\boldsymbol{T}(_{X-Y}\Delta_A)$ випливає $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap\boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)\subseteq\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$. Нехай супротивне: $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\subseteq\subseteq\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$, проте існує d таке: $d\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap\cap\,\boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$ та $d\notin\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$. Із $d\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$ маємо $d\nabla x\mapsto a\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Phi_A)$ для деякого $a\in A$. Але z тотально строго неістотне та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\Phi)$, тому маємо $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)$, $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$, $d\nabla x\mapsto a\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$. Із останнього маємо $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}_{X-Y}R_z^x(\Phi)_A)$, тому $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$ та $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$, але це суперечить умові $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\cap\boldsymbol{T}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)\subseteq\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$.

Доводимо п.2 для $\models_{T}$. Покажемо, що $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\subseteq\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cup\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)\Rightarrow$ $\Rightarrow\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\subseteq\boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)\cup\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$. Нехай супротивне: $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\subseteq\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cup\cup\,\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$, водночас існує d: $d\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)$, $d\notin\boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)$, $d\notin\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$. Із $d\notin\boldsymbol{T}_{X-Y}(\forall x\Phi_A)$ отримуємо $d\nabla x\mapsto a\notin\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Phi_A)$ для деякого $a\in A$. Але z тотально строго неістотне та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\Phi)$, тому $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)$, $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$, $d\nabla x\mapsto a\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Phi_A)$. Із останнього маємо $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$, тому $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cup\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$ та $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)$, але це суперечить умові $\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Gamma_A)\subseteq\boldsymbol{T}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)\cup\boldsymbol{T}_{X-Y}(\Delta_A)$.

Доводимо п.1 для $\models_{F}$. Покажемо: з умови $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)\subseteq\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)\cup\boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$ випливає $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)\subseteq\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)\cup\boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$. Нехай супротивне: $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)\subseteq\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)\cup\cup\,\boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$, водночас існує d таке: $d\in\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)$, $d\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$, $d\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)$. Із $d\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\exists x\Phi_A)$ отримуємо $d\nabla x\mapsto a\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Phi_A)$ для деякого $a\in A$. Але z тотально строго неістотне та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\Phi)$, тому маємо $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)$, $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)$ та $d\nabla x\mapsto a\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Phi_A)$. Із останнього отримуємо $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$, тому маємо $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)\cup\boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$ та $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)$. Але це суперечить умові $\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Delta_A)\subseteq\boldsymbol{F}_{X-Y}(\Gamma_A)\cup\boldsymbol{F}_{X-Y}(R_z^x(\Phi)_A)$.

Доводимо п.2 для $\models_{F}$. Покажемо: з умови $\boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(R_z^x(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Delta_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A)$ випливає $\boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\forall x\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Delta_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A)$. Припустимо супротивне: $\boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(R_z^x(\Phi)_A) \cap$ $\cap \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Delta_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A)$, водночас існує d: $d \in \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Delta_A)$, $d \in \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\forall x\Phi_A)$, $d \notin \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A)$. Із $d \in \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\forall x\Phi_A)$ отримуємо $d\nabla x \mapsto a \in \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Phi_A)$ для деякого $a \in A$. Але z тотально строго неістотне та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$, тому маємо $d\nabla z \mapsto a \in \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Delta_A)$, $d\nabla z \mapsto a \notin \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A)$ та $d\nabla x \mapsto a \nabla z \mapsto a \in \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Phi_A)$. Із останнього отримуємо $d\nabla z \mapsto a \in \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(R_z^x(\Phi)_A)$, тому маємо $d\nabla z \mapsto a \in \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(R_z^x(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Delta_A)$ та $d\nabla z \mapsto a \notin \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A)$. Але це суперечить умові $\boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(R_z^x(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Delta) \subseteq \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Gamma)$.

Доводимо п.1 для $|=_{\boldsymbol{TF}}$. Покажемо: з умови $\boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(R_z^x(\Phi)_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\Delta_A)$ та $\boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Delta_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A) \cup \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(R_z^x(\Phi)_A)$ (∗) випливає $\boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\exists x\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\Delta_A)$ та $\boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Delta_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A) \cup \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\exists x\Phi_A)$. Припустимо супротивне: маємо умову (∗), проте невірно $\boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A) \cap \boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\exists x\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\Delta_A)$ або невірно $\boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Delta_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A) \cup \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\exists x\Phi_A)$. У першому випадку доводимо так, як для $|=_{\boldsymbol{T}}$, а в другому – як для $|=_{\boldsymbol{F}}$.

Доводимо п.2 для $|=_{\boldsymbol{TF}}$. Покажемо: з умови $\boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(R_z^x(\Phi)_A) \cup \boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\Delta_A)$ та $\boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(R_z^x(\Phi)_A) \cap \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Delta_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A)$ (∗) випливає $\boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\forall x\Phi_A) \cup \boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\Delta_A)$ та $\boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\forall x\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Delta_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A)$. Припустимо супротивне: маємо (∗), проте невірно $\boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A) \subseteq \boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\forall x\Phi_A) \cup \boldsymbol{T}_{X\text{–}Y}(\Delta_A)$ або невірно $\boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\forall x\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Delta_A) \subseteq \boldsymbol{F}_{X\text{–}Y}(\Gamma_A)$. У першому випадку доводимо так, як для $|=_{\boldsymbol{T}}$, а в другому – як для $|=_{\boldsymbol{F}}$.

Із теорем 5 та 6 отримуємо наступні властивості елімінації кванторів для X–Y-означених відношень логічного наслідку.

Нехай z тотально строго неістотне та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$. Тоді при $z \in X$ маємо:

$\exists_{X\text{–}Y \vdash})\ \Gamma, \exists x\Phi\ {}_{X\text{–}Y}|=_* \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma, R_z^x(\Phi)\ {}_{X\text{–}Y}|=_* \Delta;$

$\forall_{X\text{–}Y \dashv})\ \Gamma\ {}_{A, X\text{–}Y}|=_* \forall x\Phi, \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma\ {}_{A, X\text{–}Y}|=_* R_z^x(\Phi), \Delta.$

Перейшовши до базового квантора $\exists x$, властивість $\forall_{X\text{–}Y \dashv}$ перепишемо так:

$\neg\exists_{X\text{–}Y \dashv})\ \Gamma\ {}_{X\text{–}Y}|=_* \neg\exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma\ {}_{X\text{–}Y}|=_* \neg R_z^x(\Phi), \Delta.$

Тут ∗ – одне з Cl, Cm, T, F, TF.

Підсумовуючи, випишемо властивості елімінації кванторів для різних логічних наслідків у різних семантиках в явному вигляді, виділивши логіки еквітонних та логіки антитонних предикатів. Зазначені властивості будуть використані для побудови числень секвенційного типу, які формалізують відповідні відношення логічного наслідку.

Замість $\exists_{X\text{–}Y \dashv}$ та $\neg\exists_{X\text{–}Y \vdash}$ братимемо загальніші властивості $Br\exists_{\dashv}$ та $Br\neg\exists_{\vdash}$.

В логіках еквітонних предикатів (неокласична семантика) та в логіках антитонних предикатів (пересичена семантика) можна брати [2] властивості $\exists_{\vdash}$, $\exists_{\dashv}$, $\neg\exists_{\vdash}$, $\neg\exists_{\dashv}$:

$\exists_{\vdash})\ \exists x\Phi, \Gamma |=_* \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma |=_* \Delta,$

де z тотально строго неістотне та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$;

$\exists_{\dashv})\ \Gamma |=_* \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma |=_* \Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi);$

$\neg\exists_{\vdash})\ \neg\exists x\Phi, \Gamma |=_* \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg\exists x\Phi, \neg R_z^x(\Phi), \Gamma |=_* \Delta;$

$\neg\exists_{\dashv})\ \Gamma |=_* \Delta, \neg\exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma |=_* \Delta, \neg R_z^x(\Phi),$

де z тотально строго неістотне та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$.

Для відношень $|=_{\boldsymbol{Cl}}$ в неокласичній семантиці та $|=_{\boldsymbol{Cm}}$ в пересиченій семантиці можна обмежитись властивостями $\exists_{X\text{–}Y \vdash}$ та $Br\exists_{\dashv}$ ($\exists_{\vdash}$ та $\exists_{\dashv}$ у випадках еквітонних чи антитонних предикатів) адже для $|=_{\boldsymbol{Cl}}$ та $|=_{\boldsymbol{Cm}}$ можна знімати заперечення, переносячи формулу з лівої частини відношення у праву.

Для відношення $|=_{\boldsymbol{Cl}}$ в неокласичній семантиці маємо $\exists_{X\text{–}Y \vdash}$ та $Br\exists_{\dashv}$.

Для відношення $|=_{\boldsymbol{Cl}}$ в неокласичній семантиці логіки еквітонних предикатів маємо $\exists_{\vdash}$ та $\exists_{\dashv}$ (зауважимо, що для $\exists_{\vdash}$ можна [4] ослабити умову на z до тотально неістотності).

Для відношення $|=_{\boldsymbol{Cm}}$ в пересиченій семантиці маємо $\exists_{X\text{–}Y \vdash}$ та $Br\exists_{\dashv}$.

Для відношення $|=_{\boldsymbol{Cm}}$ в пересиченій семантиці логіки антитонних предикатів маємо $\exists_{\vdash}$ та $\exists_{\dashv}$.

Для відношення $\models_{T}$ в неокласичній семантиці маємо

$$\exists_{X-Y\vdash},\ Br\exists_{\dashv},\ Br\neg\exists_{\vdash},\ \neg\exists_{X-Y\dashv}.$$

Для відношення $\models_{T}$ в неокласичній семантиці логіки еквітонних предикатів маємо

$$\exists_{\vdash},\ \exists_{\dashv},\ Br\neg\exists_{\vdash},\ \neg\exists_{X-Y\dashv}.$$

Для відношення $\models_{T}$ в пересиченій семантиці маємо такі ж властивості

$$\exists_{X-Y\vdash},\ Br\exists_{\dashv},\ Br\neg\exists_{\vdash},\ \neg\exists_{X-Y\dashv},$$

як і для випадку неокласичної семантики.

Для відношення $\models_{T}$ в пересиченій семантиці логіки антитонних предикатів маємо

$$\exists_{X-Y\vdash},\ Br\exists_{\dashv},\ \neg\exists_{\vdash},\ \neg\exists_{\dashv}.$$

Для відношення $\models_{F}$ в неокласичній семантиці маємо

$$\exists_{X-Y\vdash},\ Br\exists_{\dashv},\ Br\neg\exists_{\vdash},\ \neg\exists_{X-Y\dashv}.$$

Для відношення $\models_{F}$ в неокласичній семантиці логіки еквітонних предикатів маємо $\exists_{X-Y\vdash},\ Br\exists_{\dashv},\ \neg\exists_{\vdash},\ \neg\exists_{\dashv}$.

Для відношення $\models_{F}$ в пересиченій семантиці маємо такі ж властивості

$$\exists_{X-Y\vdash},\ Br\exists_{\dashv},\ Br\neg\exists_{\vdash},\ \neg\exists_{X-Y\dashv},$$

як і для випадку неокласичної семантики.

Для відношення $\models_{F}$ в пересиченій семантиці логіки антитонних предикатів маємо $\exists_{\vdash},\ \exists_{\dashv},\ Br\neg\exists_{\vdash},\ \neg\exists_{X-Y\dashv}$.

Для відношення $\models_{TF}$ в неокласичній семантиці маємо $\exists_{X-Y\vdash}$, $Br\exists_{\dashv}$, $Br\neg\exists_{\vdash}$, $\neg\exists_{X-Y\dashv}$.

Такі ж властивості $\exists_{X-Y\vdash}$, $Br\exists_{\dashv}$, $Br\neg\exists_{\vdash}$, $\neg\exists_{X-Y\dashv}$ записуємо для відношення $\models_{TF}$ в пересиченій семантиці та загальній семантиці, а також в неокласичній семантиці логіки еквітонних предикатів та в пересиченій семантиці логіки антитонних предикатів.

Висновки

У роботі вивчається фундаментальне поняття логічного наслідку для першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Для таких логік кванторного рівня запропоновано і досліджено *X–Y*-означені відношення логічного наслідку для пар та множин формул. Отримано низку властивостей таких відношень в різних семантиках, зокрема, властивості елімінації кванторів.

На основі властивостей відношень логічного наслідку для композиційно-номінативних логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів в наступних статтях планується побудова відповідних числень секвенційного типу

1. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. – М., 1996. – 304 с.
2. *Шкільняк С.С.* Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Проблеми програмування. – 2010. – № 1. – С. 15–38.
3. *Никитченко Н.С.* Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
4. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів – К., 2008. – 528 с.
5. *Шкильняк С.С.* Логики квазиарных предикатов первого порядка // Кибернетика и системный анализ. — 2010. – № 6 – С. 32–49.

Отримано 29.08.2011

Про автора:

Шкільняк Степан Степанович,

доктор фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії та технології програмування Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

***Місце роботи автора*:**

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
01601, Київ,
вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 0519; (044) 522 0640 (д)
e-mail: sssh@unicyb.kiev.ua