УДК 004.3; 519.68; 620.179.15; 681.3

М. В. Синьков, Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Построение алгоритмов решения нестационарных линейных дифференциальных уравнений в гиперкомплексных числовых системах

Рассмотрены алгоритмы решения некоторых типов нестационарных линейных дифференциальных уравнений в коммутативных гиперкомплексных числовых системах различной размерности.

Ключевые слова: *гиперкомплексная числовая система, линейные дифференциальные уравнения.*

В работах [1–4] авторы рассматривали, в основном, методы решения стационарных линейных дифференциальных уравнений в ассоциативных гиперкомплексных системах. В данной работе исследуются алгоритмы решения нестационарных уравнений. При этом рассматриваются различные типы правых частей уравнений.

В статье будут рассматриваться нестационарные линейные дифференциальные уравнения от гиперкомплексных переменных и при коэффициентах, представляющих собой гиперкомплексные функции вида:

$$\frac{dX}{dt} + A(t)X = G(t), \tag{1}$$

где X, $A(t)$, $G(t)$ — гиперкомплексные функции скалярного аргумента t. Гиперкомплексная функция скалярного аргумента $F(t)$ имеет вид:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} F_i(t)e_i, \tag{2}$$

где $F_i(t)$ — вещественные функции; e_i — базисные элементы гиперкомплексной числовой системы (ГЧС) порядка n, закон композиции которой считается заданным.

Для дальнейших исследований понадобится рассмотреть дифференцирование экспоненты от гиперкомплексного переменного по скалярному аргументу t.

Как показано в работах [5, 6], экспонента от гиперкомплексного аргумента представляет собой некоторую гиперкомплексную функцию типа (2). Вид компонентов $F_i(t)$ зависит от той гиперкомплексной числовой системы, в которой рассматривается экспонента.

В общем виде экспонента от гиперкомплексной функции $F(t)$ определяется через соответствующие степенные ряды:

$$\exp(F(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(F(t))^k}{k!}. \qquad (3)$$

Известно что, ряд, стоящий в правой части (3) будет сходящимся, если все компоненты $F_i(t)$ разлагаются в степенные ряды. Область сходимости этого ряда определяется пересечением областей сходимости всех компонент $F_i(t)$. При выполнении этих условий в области сходимости этот ряд можно дифференцировать:

$$\frac{d}{dt}\exp(F(t)) = \exp(F(t)) \cdot \frac{d}{dt}F(t). \qquad (4)$$

Производная от гиперкомплексной функции есть гиперкомплексная функция, компоненты которой являются производными компонент гиперкомплексной функции:

$$\frac{d}{dt}F(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}F_i(t) \cdot e_i. \qquad (5)$$

Первоначально рассмотрим нестационарное однородное дифференциальное уравнение с гиперкомплексными переменными и коэффициентами, которое записывается следующим образом:

$$\dot{X} + A(t)X = 0. \qquad (6)$$

Покажем, что решение этого уравнения, как и решения уравнений в вещественной области, имеют вид:

$$X = C\exp(-\int A(t)dt), \qquad (7)$$

где C — гиперкомплексная произвольная постоянная:

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i e_i. \qquad (8)$$

Действительно, используя (4), получим:

$$\dot{X} = C\frac{d}{dt}\exp(-\int A(t)dt) = C\exp(-\int A(t)dt)\frac{d}{dt}(-\int A(t)dt) = \\ = C\exp(-\int A(t)dt)(-A(t)). \tag{9}$$

Подставляя (7) и (9) в (6), получим тождество.

Таким образом, зная представление экспоненциальной функции в конкретной ГЧС, можно получить по (7) решение уравнения (6) в виде гиперкомплексной функции.

Как пример рассмотрим в некоторых гиперкомплексных числовых системах однородное уравнение (6), в котором гиперкомплексная функция $A(t)$ имеет вид:

$$A(t) = a_1(t)e_1 + a_2(t)e_2 = te_1 + t^2e_2 .$$

1. Система комплексных чисел C.

Решения уравнения (6) в этой системе в соответствии с (7) имеют вид:

$$X = (C_1 + iC_2)e^{-\int(t+it^2)dt} = (C_1 + iC_2)e^{-\frac{t^2}{2}}(\cos\frac{t^3}{3} - i\sin\frac{t^3}{3}) .$$

Так как $X = x_1 + ix_2$, то:

$$x_1(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}(C_1\cos\frac{t^3}{3} + C_2\sin\frac{t^3}{3}), \\ x_2(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}(C_2\cos\frac{t^3}{3} - C_1\sin\frac{t^3}{3}). \tag{10}$$

Значения произвольных постоянных можно определить, если заданы гиперкомплексные начальные условия $X(t_0)$.

Уравнение (6) можно разложить в систему из двух уравнений в вещественной области:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + a_1(t)x_1(t) - a_2(t)x_2(t) = 0, \\ \dot{x}_2 + a_2(t)x_1(t) + a_1(t)x_2(t) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, можно утверждать, что система (10) будет иметь решения вида (11) в области сходимости разложения в степенные ряды функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

2. Система двойных чисел W.

Решения уравнения (6) в соответствии с (7) имеют вид:

$$X(t) = (c_1 + Ic_2)\exp(-\int(t + It^2)dt).$$

В системе двойных чисел экспонента определяется следующей формулой [7]:

$$\exp(m_1 + \mathrm{Im}_2) = e^{m_1}(chm_2 + Ishm_2),$$

поэтому:

$$X(t) = (c_1 + Ic_2)e^{-\frac{t^2}{2}}(ch(\frac{t^3}{3}) + Ish(\frac{t^3}{3})).$$

Если в последнем равенстве раскрыть скобки, то получится:

$$x_1(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}(c_1 ch(\frac{t^3}{3}) + c_2 sh(\frac{t^3}{3})),$$
$$x_2(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}(c_2 ch(\frac{t^3}{3}) + c_1 sh(\frac{t^3}{3})).$$

Этому решению будет соответствовать система из двух уравнений в вещественной области:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + a_1(t)x_1(t) + a_2(t)x_2(t) = 0, \\ \dot{x}_2 + a_2(t)x_1(t) + a_1(t)x_2(t) = 0. \end{cases}$$

3. Система дуальных чисел D.

Решения уравнения (6) в соответствии с (7) имеют вид:

$$X(t) = (C_1 + EC_2)\exp(-\int(t + et^2)dt).$$

В системе дуальных чисел представление экспоненты запишем как [7]:

$$\exp(m_1 + Em_2) = e^{m_1}(1 + m_2 E),$$

отсюда:

$$X(t) = (C_1 + EC_2)e^{-\frac{t^2}{2}}(1 - E\frac{t^3}{3}).$$

Если в последнем равенстве раскрыть скобки, то компоненты решения будут иметь вид:

$$x_1(t) = C_1 e^{-\frac{t^2}{2}},$$
$$x_2(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}(C_2 - C_1 \frac{t^3}{3}).$$

Если заданы начальные условия, то значения произвольных постоянных определяются численно и решения строятся с их учетом. Ниже представлено решение уравнения (6) в гиперкомплексной числовой системе с таблицей умножения базисных элементов:

$$e_1 e_i = e_i e_1 = e_i,\ e_2^2 = -e_1,\ e_2 e_3 = e_3 e_2 = e_4,\ e_3 e_4 = e_4 e_3 = -e_3,\ e_i e_j = 0$$

для остальных комбинаций i и j.

Ввиду громоздкости выкладок они выполнены с применением математической системы аналитических вычислений Maple.

Пусть коэффициент правой части:

$$A = t\sin(5t)e_1 + (t^2 - 1)e_2 + (t^2 + 1)\ln(t)e_3 + t^3 e_4.$$

Тогда общее решение:

$$X = \mathrm{e}^{(0{,}04\sin(5t) - 0{,}2t\cos(5t))}(c_1 e_1 + c_1(\frac{1}{3}t^3 - t)e_2 + c_1(\frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \frac{1}{9}t^3 + t\ln(t) - t)(e_3 + \frac{1}{2}e_4) +$$
$$+ \frac{1}{4}c_1 t^4 e_4 + c_2 e_2 + c_2(\frac{1}{3}t^3 - t)e_4 + c_3 e_3 + c_4 e_4).$$

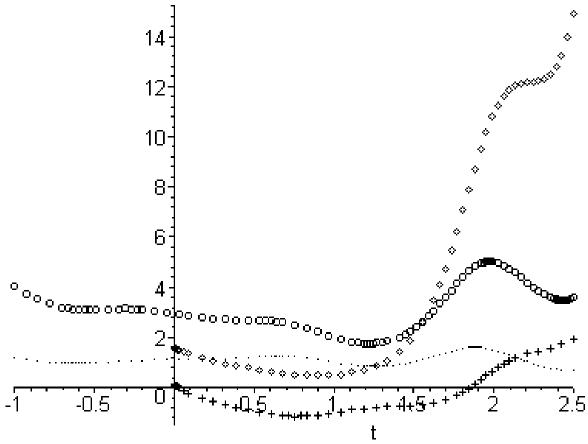
Начальные условия:

$$t0 = 1,$$
$$x0 = e_1 + 2e_2 - e_3 + 0{,}5e_4.$$

Частное решение:

$$X2 = \mathrm{e}^{(0{,}04\sin(5t) - 0{,}2t\cos(5t))}(1{,}099757178\ e_1 + 1{,}099757178\ (\frac{1}{3}t^3 - t)e_2 +$$
$$+ 1{,}099757178\ (\frac{1}{3}t^3 \ln(t) - \frac{1}{9}t^3 + t\ln(t) - t)(e_3 + \frac{1}{2}e_4) +$$
$$+ 0{,}2749392945\ t^4 e_4 + 2{,}932685808\ e_2 + 2{,}932685808\ (\frac{1}{3}t^3 - t)e_4 +$$
$$+ 0{,}1221952415\ e_3 + 1{,}551200711\ e_4).$$

Построим график изменения компонентов частного решения на интервале $-1 \le t \le 2{,}5$, где первая компонента обозначена точками, вторая — окружностями, третья — крестиками и четвертая — ромбами.



Графики решений

Рассмотрим теперь нестационарное неоднородное линейное дифференциальное уравнение в гиперкомплексной области вида (1).

Покажем, что решения (1) имеют такой же вид, как и для уравнений в вещественной области:

$$X = C\exp(-\int A(t)dt) + \exp(-\int A(t)dt)\int G(t)\exp(\int A(t)dt)dt\,, \tag{12}$$

где C — тоже гиперкомплексная произвольная постоянная.

Используя (4) и другие правила дифференцирования, получим:

$$\begin{gathered} \dot{X} = -C \cdot A(t)\exp(-\int A(t)dt) - A(t)\times \\ \times\exp(-\int A(t)dt)\cdot\int G(t)\exp(\int A(t)dt)dt + \\ +\exp(-\int A(t)dt)\cdot\int G(t)\exp(\int A(t)dt) = \\ = -A(t)\exp(-\int A(t)dt)(C + \int G(t)\exp(\int A(t)dt)dt) + G(t). \end{gathered} \tag{13}$$

Подставляя (1) и (12) в (13), получим тождество.

Таким образом, выражение (12) — это решение уравнения (13).

Уравнение (1) может быть представлено в виде системы уравнений в вещественной области:

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^{n} \dot{X}_i e_i\,, \tag{14}$$

$$G(t) = \sum_{i=1}^{n} G_i(t) e_i . \tag{15}$$

Используя закон композиции заданной ГЧС, можно получить:

$$A(t)X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_i(t) X_j \gamma_{ij}{}^{k} e_k . \tag{16}$$

Приравнивая выражения при одинаковых базисных элементах e_i, получим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\dot{X}_k + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_i(t) X_j \gamma_{ij}{}^{k} = G_k(t), \qquad k = 1,\dots, n. \tag{17}$$

Подставляя сюда структурные константы различных ГЧС и функции $A_i(t)$, $G_k(t)$, можно получить классы систем дифференциальных уравнений, решение которых определяются компонентами гиперкомплексного решения (12).

1. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Синькова Т.В.* Применение гиперкомплексных чисел для эффективного представления систем дифференциальных уравнений // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2004. — Т. 6, № 1. — С. 53–61.

2. *Калиновский Я.А.* Разработка алгоритмов решения однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка от гиперкомплексного переменного // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2001. — Т. 3, № 1. — С. 22–29.

3. *Калиновский Я.А.* Алгоритм решения систем однородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка от гиперкомплексного переменного, основанный на удвоении исходной гиперкомплексной числовой системы // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2001. — Т. 3, № 3. — С. 43–48.

4. *Синьков М.В., Калиновский Я.А.* Исследование алгоритмов решения некоторых типов дифференциальных уравнений от гиперкомплексного переменного // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2001. — Т. 3, № 4. — С. 32–36.

5. Развитие и исследование методов гиперкомплексных числовых систем применительно к моделированию систем уравнений для широкого класса задач. Отчет о НИР (заключ.) / ИПРИ НАНУ; № ГР 0193V002037. — К., 1993. — 192 с.

6. *Синьков М.В., Калиновский Я.А, Роенко Н.В.* Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4. — С. 178–181.

7. *Калиновский Я.А., Роенко Н.В., Синьков М.В.* Методы построения нелинейностей в расширениях комплексных чисел // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 4. — С. 178–181.

Поступила в редакцию 30.11.2006