

УДК 532.9

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

И. Т. СЕЛЕЗОВ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 20.03.98*

Представлены некоторые математические модели волновой гидродинамики прибрежной зоны шельфа и численные решения, демонстрирующие новые характерные эффекты взаимодействия нелинейных волн на воде с донным рельефом. Исходя из точной двумерной постановки, включающей уравнение Лапласа для потенциала скоростей, нелинейные условия на свободной поверхности и условия на донной поверхности, получены нелинейно-дисперсионные асимптотические аппроксимации, описывающие распространение волн над донным рельефом. При этом предполагается, что параметр дисперсии β и градиент поверхности дна γ малы, в то время как параметр нелинейности α предполагается произвольным в отличие от широко распространенных традиционных приближенных теорий. Представлена также нелинейная модель применительно к исследованию перемещения солёной морской воды, а также переформированию дна под действием волн, распространяющихся над неровным дном. Соответствующая начально-краевая задача решается методом конечных разностей для заданных многократно проходящих от входа волновых импульсов типа полусинусоиды. Кроме того, аналогичная задача рассматривается на основе уравнения КдВ при задании на входе солитона. Представлены результаты численных расчётов и их анализ.

Some mathematical models of wave hydrodynamics of the shelf zone are presented. Corresponding numerical solutions demonstrating new characteristic effects of the interaction of nonlinear water waves with a bottom relief are obtained. The exact 2-D statement includes the Laplace equation for velocity potential, the nonlinear conditions on the free surface and the conditions on a bottom surface. On this basis nonlinear-dispersive asymptotic approximations describing wave propagation over a bottom relief are obtained. At that, it is assumed that the dispersion parameter β and the bottom surface gradient γ are small, while the nonlinear parameter α is arbitrary value unlike widely spreading traditional approximate theories. Also, a nonlinear model to investigate a movement of salt sea water, as well as a bottom reforming due to waves propagating over an uneven bottom are presented. Corresponding initial-boundary value problem is solved by a finite-difference method for given multiincident wave pulses of the semi-sine form generated at inlet. Moreover, the similar problem is considered on the basis of KdV equation when solitons are given at inlet. The results of numerical calculations and their analysis are presented.

Представлено деякі математичні моделі хвильової гідродинаміки прибережної зони шельфу і чисельні розв'язки, що демонструють нові ефекти взаємодії хвиль на волі з донним рельєфом. Виходячи з точної двовимірної постановки, що включає рівняння Лапласа для потенціалу швидкостей, нелінійні умови на вільній поверхні й умови на донній поверхні, одержані нелінійно-дисперсійні асимптотичні апроксимації, що описують поширення хвиль над донним рельєфом. При цьому вводяться припущення, що параметр дисперсії і градієнт поверхні дна γ малі, в той час як параметр нелінійності α покладається довільним на відміну від широко поширених традиційних наближених теорій. Представлена також нелінійна модель стосовно дослідження переміщення солоної морської води, а також переформування дна під дією хвиль, що поширюються над нерівним дном. Відповідна початково-крайова задача розв'язується методом скінченних різниць для заданих багатократних хвильових імпульсів типу півсинусоїди, що генеруються на вході. Крім цього, аналогічна задача розглядається на основі рівняння КдВ при заданні на вході солітона. Представлено результати чисельних розрахунків та їх аналіз.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование распространения длинных нелинейных волн – проблема большой важности, которая развивалась более всего и прежде всего в теории распространения нелинейных поверхностных гравитационных волн, начиная с Лагранжа [1] (1781), Стокса [2] (1847), Буссинеска [3] (1872), Кортвега де Вриза [4] (1895). В связи с большими трудностями построения аналитических решений соответствующих начально-краевых задач в точной постановке большое распространение получило развитие приближенных подходов и, прежде всего, построение длинноволновых приближений, которые представляют собой по существу асим-

птотические нелинейно-дисперсионные аппроксимации исходной задачи.

Построению нелинейно-дисперсионных приближений для жидкости постоянной и переменной глубины посвящено много работ, однако обзор их выходит за рамки данной статьи. Охарактеризуем кратко только основные подходы.

До настоящего времени были развиты некоторые методы построения несвязанных эволюционных уравнений для уединённых волн, см. Френзен и Кеворкян [5] (1985). Наибольшее распространение получили следующие подходы: 1) редукционный метод, развитый Таниути и Веем [6] (1968) и подробно описанный Бхатнагаром [7] (1979); 2) метод многомасштабных разложений, развитый

Найфе [8, 9] (1973, 1981); 3) метод усредненно-го вариационного принципа, развитый Уиземом [10] (1967), [11] (1974); 4) метод гамильтонового формализма, предложенный Захаровым [12] (1968) и развитый Майлсом [13] (1977), Милдером [14] (1977), Бенджамином и Олвером [15] (1982).

В последние десятилетия широко исследуются новые более сложные задачи распространения волн на воде, в том числе задачи, характеризующиеся наличием течений, задачи для двухслойных жидкостей, а также задачи вынужденных нелинейных волн, генерируемых взаимодействием течений с локализованными неоднородностями [16] (1990), [17] (1993), [18] (1995), [19] (1996).

С математической точки зрения модели волн на мелкой воде фактически представляют собой длинноволновые аппроксимации исходной модели гидродинамики волн [20] (1987). Открытие уединённых волн – солитонов Скоттом Расселом [21] (1844), а затем вывод уравнений распространения волн в мелкой воде Кортевегом и де Вризом [4] (1895) стимулировали интенсивное и экстенсивное развитие теории уединённых волн в различных средах. С точки зрения волновой теории – это построение нелинейно-дисперсионных аппроксимаций. Почти во всех работах эти аппроксимации основываются на балансе нелинейных и дисперсионных эффектов, приводящих к устойчивому образованию – солитону, который характеризуется перманентностью при распространении, устойчивостью, а также сохранением формы при столкновении двух солитонов. Несмотря на это, были предприняты попытки построения аппроксимаций для случаев, когда баланс нелинейных и дисперсионных эффектов с одной или другой стороны не имеет места. Например, если в длинноволновой аппроксимации удерживать все нелинейные члены, то получаем модель, в которой дисперсионные эффекты проявляются слабо по сравнению с нелинейными эффектами [22] (1981), [23] (1989).

В последние годы рассматривался и другой предельный случай, когда дисперсионные эффекты учитываются полностью (точно), а нелинейные эффекты малы [24] (1992). Этот предельный случай здесь не рассматривается.

В данной статье на основе разложения в степенные ряды по вертикальной переменной и асимптотических оценок выведены два эволюционных уравнения, которые можно рассматривать как обобщение уравнения типа Буссинеска для фронтально падающих волн. Такие асимптотические приближения очень важны для прибрежной зоны, где характерное расстояние достаточно мало, так

что дисперсионные эффекты не успевают накапливаться, в то время как нелинейные эффекты значительны. Из такого приближения как частные случаи следуют известные уравнения, например, уравнение Кортевега де Вриза (КдВ) и уравнение Перегринна, основанные на балансе нелинейных и дисперсионных эффектов ($\alpha \sim \beta \ll 1$). Очевидно, что развитая модель применима для более точного описания наката волн на наклонный пляж с большим значением α , чем известные модели типа КдВ, Перегринна, модель волн на мелкой воде и их модификации. В этом случае распространение уединённой волны сопровождается появлением хвостов в отличие от случая идеального классического решения, предсказываемого КдВ приближением. На основе этого улучшенного приближения численно решается задача наката уединённой волны на пляж и представлен анализ полученных результатов.

Во второй части статьи рассматривается бассейн конечной длины, наполненный пресной водой и примыкающий своим фронтальным сечением к доступу солёной морской воды из моря. Модель описывается системой четырех нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для четырех искомых функций: продольной скорости, солёности, отклонения свободной поверхности и расхода взвешенных наносов. Для этой системы уравнений формулируется начально-краевая задача, которая решается методом конечных разностей для многократно распространяющихся от входа импульсов в форме полусинусоиды. Аналогичная задача рассмотрена на основе уравнения Кортевега де Вриза с входным импульсом типа солитона. Представлены и анализируются результаты численных расчетов.

1. НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННОЕ ДЛИННОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

1.1. Постановка задачи

В отличие от предыдущих исследований здесь рассматривается модель, в которой сняты ограничения на малость нелинейного параметра $\alpha = a/H_0$ (a – максимальное отклонение свободной поверхности, H_0 – глубина). Такое приближение можно рассматривать как обобщение волновой теории мелкой воды.

Рассматривается жидкость переменной глуби-

ны с невозмущенной в исходном состоянии свободной поверхностью. С этой поверхностью связана система прямоугольных декартовых координат x, y, z так, как это определено формулой (2). Задача характеризуется следующими ключевыми безразмерными параметрами:

$$\alpha = a/H_0, \quad \beta = (H_0/l)^2, \\ \gamma = \operatorname{tg} \theta = H_0/l, \quad Ur = \alpha/\beta \quad (1)$$

и определена в области

$$\Omega = \{(x, y, z) \in R^3 | x^*(x, y) \leq x < \infty, -\infty < y < \infty, \\ -H(x) \leq z \leq \alpha\eta(x, t)\}, \quad t \in T = \{t | 0 \leq t \leq t^*\}. \quad (2)$$

Необходимо найти потенциал скоростей $\varphi(x, z, t)$ и отклонение свободной поверхности $\eta = \eta(x, t)$ как решения задачи

$$\beta\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (3)$$

$$\varphi_z + \beta H_x \varphi_x = 0, \quad z = -H(x), \quad (4)$$

$$\eta_t + \alpha\eta_x \varphi_x - \beta^{-1} \varphi_z = 0, \quad z = \alpha\eta, \quad (5)$$

$$\eta + \varphi_t + (\alpha/2)\varphi_x^2 + 2(\alpha/\beta)\varphi_z^2 = 0, \quad z = \alpha\eta. \quad (6)$$

В уравнениях (2)-(6) безразмерные величины введены по формулам

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad z^* = \frac{z}{H_0}, \quad t^* = \frac{c_0}{l}t = \frac{\sqrt{gH_0}}{l}t,$$

$$\varphi^* = \frac{c_0}{gla} \varphi, \quad \eta^* = \frac{\eta}{a}$$

и приняты следующие обозначения: $x = x^*$ – прямая линия перед зоной обрушения, θ – угол наклона пляжа, l – характерная длина, Ur – число Урселла.

В случае начально-краевой задачи следует дополнительно формулировать начальные условия. Задача (3)-(6) не имеет аналитических решений, несмотря на тот факт, что она долгое время была в центре внимания многих выдающихся ученых. В результате, для построения приближенных решений развиты различные подходы, указанные во введении.

1.2. Построение аппроксимаций

Вывод эволюционных уравнений был представлен в [22]. Поэтому, здесь мы ограничиваемся представлением только окончательных результатов. Основные предположения состоят в том, что параметр дисперсии β и градиент донной поверхности

γ малы, $\beta \ll 1$, $\gamma \ll 1$, в то же время, в отличие от большинства исследований, нет ограничений на нелинейный параметр α , который предполагается произвольным. Функция φ представляется в виде разложения

$$\varphi(x, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (z + H)^n \beta^n f_n(x, t). \quad (7)$$

Подставляя уравнение (7) в (3)-(6), после длинных и громоздких преобразований получаем следующую разрешающую систему уравнений:

$$h_t + (h\bar{u})_x = 0, \quad (8)$$

$$\bar{u}_t + \alpha \left(\frac{\bar{u}^2}{2} \right)_x + \eta_x - \\ - \frac{\beta}{h} \left\{ \frac{h^3}{3} [\bar{u}_{xt} + \alpha(\bar{u}\bar{u}_{xx} - \bar{u}_x^2)] \right\}_x = \\ = \beta \bar{u}_t \left(\alpha\eta_x H_x + \frac{h}{2} H_{xx} \right) + \\ + \alpha \beta \bar{u} \bar{u}_x \left(\alpha\eta_x H_x + \frac{3}{2} h H_{xx} \right) + \alpha \beta \bar{u}_x^2 h H_x + \\ + \alpha \beta \bar{u}^2 \left(\alpha\eta_x H_{xx} + \frac{h}{2} H_{xxx} \right) + O(\beta^2, \alpha^m, \beta^2), \quad (9)$$

где

$$h = H + \alpha\eta, \quad \bar{u} = \int_{-h}^{\alpha\eta} \varphi_x dz, \quad m = 2, 3, 4. \quad (10)$$

Полагая $\alpha \ll 1$, $\beta \ll 1$, а также, что эти величины одного порядка малости $\alpha \sim \beta$, что соответствует числу Урселла $Ur = O(1)$, систему (8), (9) для случая постоянной глубины можно свести к классическим уравнениям Буссинеска и Кортевега де Вриза. В случае переменной глубины при тех же предположениях из уравнений (8), (9) следует уравнение Перегринна [25]

$$u_t + \eta_x + \alpha \bar{u} u_x = \beta \left(\frac{H^3}{3} \bar{u}_{xxt} + \\ + H H_x \bar{u}_{xt} + \frac{H}{2} H_{xx} \bar{u}_t \right) + O(\beta^2). \quad (11)$$

В случае $\beta \ll 1$ и $\beta \ll \alpha$ система (8), (9) сводится к уравнениям мелкой воды

$$\bar{u}_t + \alpha \bar{u} \bar{u}_x + \eta_x = 0, \quad \eta_t + [(h + \alpha\eta)\bar{u}]_x = 0, \quad (12)$$

из которых при $\alpha \ll 1$ следуют линеаризованные уравнения

$$\bar{u}_t = -\eta_x, \quad \eta_t = -(h\bar{u})_x, \quad (13)$$

а при $u = \partial\varphi/\partial x$ они сводятся к волновому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (14)$$

1.3. Накат уединённых волн на пляж ¹

Здесь представлены результаты численного моделирования трансформации волн и их наката на пляж на основе улучшенной модели, развитой в предыдущей части. Это типичная задача распространения волн цунами, которая в прибрежной зоне сопровождается совместным влиянием нелинейных эффектов, характеризуемых параметром α , и дисперсионных эффектов, характеризуемых параметром β . Приемлемое описание волновых процессов в этой области ($Ur = \alpha/\beta \geq 1$) можно получить посредством уравнений, включающих оба эти эффекта.

Распространение длинных волн в области постоянной и переменной глубины исследовалось ранее в [25], а также Мадсен и Меем [26], Хаммаком [27]. В этих исследованиях основные результаты соответствуют уравнению Кортевега де Вриза и его модификациям. Такие уравнения были выведены в предположении, что α и β одного порядка, в то время как члены более высокого порядка малости отбрасываются. Но некоторые из этих отброшенных членов могут существенно влиять на развитие волн в областях постоянной и особенно переменной глубины. Такие аппроксимации более высоких порядков могут расширить пределы наклонов исследуемого дна и проводить расчёты трансформации волн ближе к точке опрокидывания. Для случая постоянной глубины такого рода уравнения были получены в виде законов сохранения в работах Су и Гарднера [28], Венециана [29]. В этом случае правая часть уравнения (9) исчезает и система (8), (9) имеет решение типа уединённой волны:

$$h = H + \eta_0 c h^{-2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3\eta_0}{H + \eta_0} \right)^{1/2} (x - ct) \right]. \quad (15)$$

Это точное решение использовалось как тестовое для схемы конечных разностей. Принятая двухшаговая схема является явной-неявной и устойчивой, если выполняется условие Куранта и схема имеет второй порядок точности относительно Δx и Δt .

¹Численное моделирование проведено М.И.Железняком

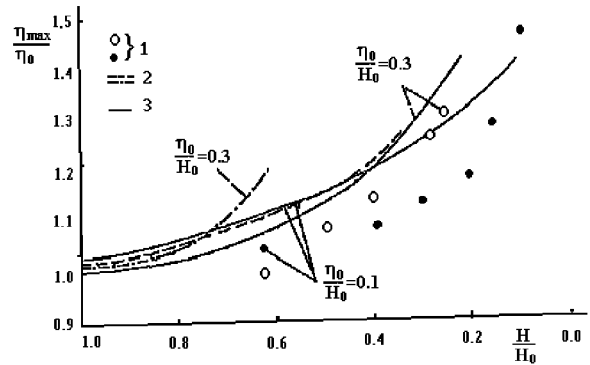


Рис. 1. Амплитуда уединенной волны над однородным дном $\gamma = 1/20$: 1- экспериментальные данные (Киши и Саеки [31]); 2- численные результаты (Мадсен и Мей [26]); 3- численное решение уравнений (8),(9)

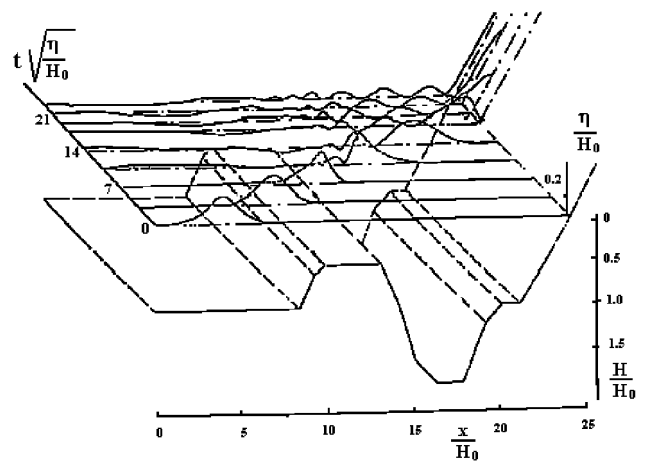


Рис. 2. Трансформация уединенной волны в прибрежной зоне

В случае постоянной глубины уравнение (9) содержит не только обычные аппроксимирующие члены приближения Кортевега де Вриза порядка $1, \beta, \alpha$, но включает также члены порядка $\alpha\beta$ и $\alpha^2\beta$. Важность этих дополнительных членов была показана численными экспериментами для случая "лобового" соударения солитонов. При этом было обнаружено генерирование быстро осциллирующих хвостов за солитонами после их взаимодействия. Амплитуды этих осциллирующих волн резко возрастают с ростом амплитуд взаимодействующих солитонов. Такое же поведение солитонов при "лобовом" столкновении было обнаружено Максворси [30] в лабораторном волновом лотке.

В случае переменной глубины в уравнениях появились дополнительные члены. Их порядок за-

висит от характерного наклона дна γ . Если в уравнении (9) удерживаются только члены порядка $1, \delta, \beta, \delta\gamma\sqrt{\beta}$ и γ^2 , то уравнение (9) преобразуется в уравнение Перегринна (11). Для проведения численных расчётов был развит подход, основанный на методе конечных разностей и тестированный в случае постоянного наклона. Результаты расчетов показаны на рис. 1, где представлены некоторые экспериментальные и численные результаты. Преимущества системы (8), (9) можно непосредственно увидеть в случае больших начальных амплитуд уединённой волны. Более того, удержание членов более высоких порядков позволяет проводить расчёты трансформации волн для больших наклонов пляжа (рис. 2).

2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НА ВОДЕ В БАССЕЙНЕ С СОЛЁНОСТЬЮ И ЭРОЗИЕЙ ДНА ²

Исследуется миграция солёной морской воды и переформирование дна, обусловленные распространением волн над неровным дном. Рассматривается бассейн конечной длины, заполненный пресной водой. Бассейн примыкает своим фронтальным поперечным сечением к морю как источнику солёности. Эта часть бассейна сначала имеет постоянную глубину. За этой частью следует ещё одна часть с линейно уменьшающейся к берегу глубиной. Исследуются загрязнение свежей воды и эрозия дна под действием нелинейных волн.

Соответствующая математическая задача представляется в виде начально-краевой задачи на конечном интервале $x \in [0, L]$. Исходные уравнения включают систему четырех связанных уравнений в частных производных для продольной скорости $u(x, t)$, солёности $S(x, t)$, глубины $H(x, t)$ и расхода $Q(x, t)$, а также граничные и начальные условия. При $x = 0$ нелинейная входная функция задаётся в виде половины синусоиды, задаются также и остальные функции. При $x = L$ формулируется условие поглощения. Рассматриваются два случая. В первом случае движение волн обуславливается уравнениями волн на мелкой воде. Во втором случае как первичное принимается уравнение Кортевега де Вриза, и при $t = 0$ профиль задается в форме уединённой волны. Представлены и анализируются результаты численных расчётов.

Двумерная начально-краевая задача ставится

²В сотрудничестве с Р.И.Волынским

следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(H + \xi) u] = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial (SH)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (SH)u = \frac{\partial}{\partial x} \left[v_s H \frac{\partial S}{\partial x} \right], \quad (18)$$

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q_H}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

$$Q_H = CHu - v_H \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (20)$$

$$C = \alpha \frac{u^3}{gHw}, \quad (21)$$

где u – горизонтальная составляющая скорости; ξ – отклонение свободной поверхности от невозмущенного уровня; H – изменяющаяся во времени глубина бассейна; S и C – усреднённые по поперечному сечению солёность и мутность; Q_H – расход взвешенных наносов; v_s – коэффициент турбулентной диффузии для солёности (определяется по известным в литературе данным); v_H – коэффициент турбулентной диффузии для взвеси (определяется из натуральных и лабораторных данных); g – ускорение свободного падения; w – гидравлическая крупность взвеси; ε – пористость взвеси; α – эмпирическая константа.

Гиперболические уравнения (16), (17) описывают распространение длинных поверхностных гравитационных волн в мелком бассейне, а параболические уравнения (18), (19) описывают перенос солёности в приближении адвекции-диффузии и переформирование дна. Из формулы (20) видно, что расход взвеси в волновом потоке состоит из средней и пульсирующей составляющих. Формула (21) – аналог соответствующей формулы для мутности воды, применяемой в теории потоков в речном русле.

Для решения системы (16)-(19) записываются следующие граничные и начальные условия:

$$u(0, t) = u_0 \cdot \sin \sigma t, \quad u(L, t) = 0, \quad (22)$$

$$\xi(0, t) = \xi_0 \cdot \sin \sigma t, \quad \xi(L, t) = 0, \quad (23)$$

$$u_0 = \sqrt{\frac{g}{H}} \xi_0, \quad (24)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \xi(x, 0) = 0, \quad (25)$$

$$S(0, t) = S_0, \quad S(L, t) = 0, \quad (26)$$

$$S(x, 0) = 0, \quad x \neq 0, \quad H(x, 0) = H_0(x), \quad (27)$$

$$H(0, t) = H_1, \quad H(L, t) = H_2. \quad (28)$$

Граничные и начальные условия (22)-(28) означают, что изучаемый процесс распространения волн

генерируется в левой части области интегрирования $(0, L)$. При этом на левой границе задаются постоянная величина солёности S_0 и постоянная глубина H_1 , в то время как на правой границе вода находится в состоянии покоя, солёность равна нулю и глубина неизменна. Функция $H_0(x)$ является исходным рельефом дна и может характеризовать наличие донной неоднородности.

Гиперболо-параболическая система уравнений (16)-(19) представляется в дивергентной форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Q_u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial Q_\xi}{\partial x} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial SH}{\partial t} + \frac{\partial Q_s}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q_H}{\partial x} = 0. \quad (30)$$

где Q_u, Q_ξ, Q_s, Q_H – потоки, определяемые формулами

$$Q_u = u^2 \cdot 0.5 + g\xi, \quad Q_\xi = (H + \xi)u, \quad (31)$$

$$Q_s = SuH - v_s H \frac{\partial S}{\partial x},$$

$$Q_h = CuH - v_H H \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (32)$$

2.1. Численные решения нелинейной задачи

Гиперболические уравнения (29) решаются на основе явной трёхслойной схемы

$$u_i^{j+2} = u_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{u,i+1}^{j+1} - Q_{u,i-1}^{j+1}), \quad (33)$$

$$\xi_i^{j+2} = \xi_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{\xi,i+1}^{j+1} - Q_{\xi,i-1}^{j+1}). \quad (34)$$

Для численного решения параболических уравнений (30) применяется интегрально-интерполяционный метод с последующим применением трёхточечного алгоритма прогонки. В численных экспериментах влияние нелинейных волн на перенос солёности и деформации дна исследуется при следующих параметрах: средний диаметр донной взвеси $d = 0.5\text{mm}$, гидравлическая крупность $w = 0.1\text{m/s}$, глубина бассейна $H_1 = 1\text{m}$, глубина выемки $H_2 = 5\text{m}$, граничная амплитуда при входе в выемку $\xi = 0.3\text{m}$, граничная солёность на входе $s_0 = 0.3$, период волны $\tau = 5.66\text{s}$, шаг по времени $\Delta t = 0.01\text{s}$, шаг по координате $\Delta x = 0.5\text{m}$, длительность численного эксперимента $T = 600\Delta t$.

Результаты численных экспериментов представлены на рис. 3 для времени $t = T$.

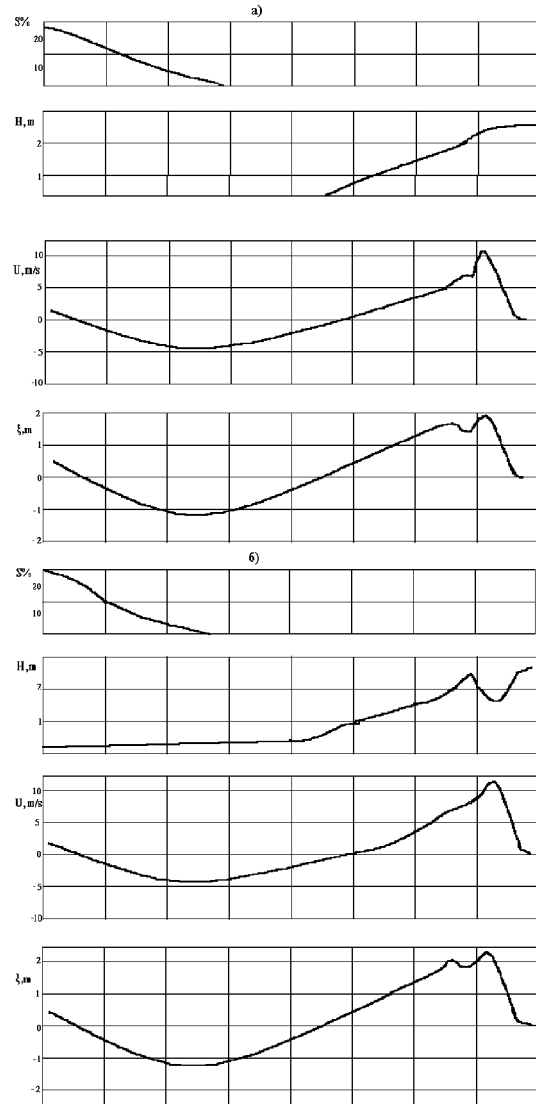


Рис. 3. Распределение солёности S , высоты H , скорости U и подъема свободной поверхности ξ по времени T : а – недеформированное дно ; б – деформированное дно

2.2. Нелинейно-дисперсионная задача

В этом случае вместо нелинейного уравнения (17) рассматривается уравнение Кортевега де Вриза [32]

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \sqrt{gH} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi}{H} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{H^2 \sqrt{gH}}{6} \cdot \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \sqrt{gH} \cdot \frac{h}{4H} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (35)$$

Для случая постоянной глубины уравнение (35) имеет аналитическое решение в форме уединённой волны

$$\xi(x, t) = \xi_0 ch^{-2} [(x - x_0 - Vt)/l], \quad (36)$$

$$l = \sqrt{\frac{4H_0^3}{3\xi_0}}, \quad V = \sqrt{gH_0} \left(1 + \frac{\xi}{2H_0}\right). \quad (37)$$

Принятое в уравнении (36) время $t = 0$ даёт начальное условие для уравнения Кортевега де Вриза для случая постоянной глубины

$$\xi(x, 0) = \xi_0 ch^{-2} [(x - x_0)/l]. \quad (38)$$

Граничные условия на концах интервала интегрирования заданы следующим образом:

$$\xi(0, t) = 0, \quad \xi(L, t) = 0. \quad (39)$$

Скорость потока в уравнении (36) выражается через ξ посредством соотношений, аналогичных уравнению (24). Уравнения для солёности S и глубины H остаются такими же, как и в предыдущей нелинейной модели. Начальные условия для солёности S формулируются в виде

$$S(x, 0) = 0, 03, \quad 0 \leq x \leq x_1, \quad (40)$$

$$S(x, 0) = 0, \quad x_1 \leq L, \quad (41)$$

где x_1 – граница начального распределения солёности; L – длина интервала интегрирования. Граничные условия для солёности S задаются в виде

$$S(0, t) = 0, 03, \quad S(L, t) = 0. \quad (42)$$

Исходный рельеф дна представляется в виде двух частей: постоянной глубины и наклона постоянного заложения. Граничные условия для функций, описывающих донный рельеф, приняты такими же, как и в предшествующих нелинейных моделях.

Уравнение Кортевега де Вриза (35) решалось методом Забуски-Крускала, применявших трёхслойную схему со специальной аппроксимацией нелинейных и дисперсионных членов. Параболические уравнения решались на основе трёхточечного алгоритма прогонки. Результаты численных экспериментов представлены на рис. 4, который демонстрирует влияние уединённых волн на размыв дна. Можно заметить, что проходящие солитоны приводят к развитию специфической абразивно-аккумулятивной формы.

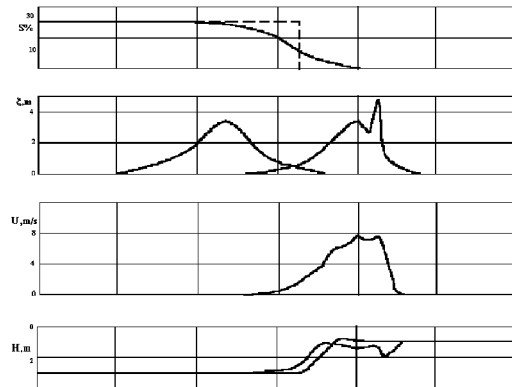


Рис. 4. Эрозия дна, вызванная воздействием уединённых волн

1. Lagrange J.L. Memoire sur la theorie du mouvement des fluides // Oeuvres.– 1781.– 4.– P. 132-143.

2. Stokes G.G. On the theory of oscillating waves // Camb. Trans.– 1847.– 8.– P. 441-473.
 3. Boussinesq J. Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'une canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond // J. Math. Pures Appl., Se.2.– 1872.– 17.– P. 55-108.
 4. Korteweg D.G. and De Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves // Philos. Mag.– 1895.– 39.– P. 422-443.
 5. Frenzen C.L. and Kevorkian J. A review of the multiple scale and reductive perturbation methods for deriving uncoupled nonlinear evolution equations // Wave Motion.– 1985.– 7.– P. 25-42.
 6. Taniuti T. and Wei C.C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation // J. Phys. Soc., Japan.– 1968.– 24.– P. 941-966.
 7. Bhatnagar P.L. Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems.– London: Clarendon Press, 1979.– 136 p.
 8. Nayfeh A.H. Perturbation method.– New York: Wiley-Interscience, 1973.– 456 p.
 9. Nayfeh A.H. Introduction to perturbation techniques.– New York: Wiley-Interscience, 1981.– 536 p.
 10. Whitham G.B. Variational methods and applications to water waves // Proc. Roy. Soc. A.– 1967.– 299.– P. 6-25.
 11. Whitham G.B. Linear and nonlinear waves // Wiley-Interscience.– New York.– 1974.– P. 636.
 12. Захаров В.Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ.– 1968.– 6, N2.– P. 86-94.
 13. Miles J.W. On Hamilton's principle for surface waves // J. Fluid Mech.– 1997.– 83, Part 1.– P. 153-158.
 14. Midler D.M. A note regarding on Hamilton's principle for surface waves // J. Fluid Mech.– 1977.– 83.– P. 159-161.
 15. Benjamin T.B. and Olver P.J. Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves // J. Fluid Mech.– 1982.– 125.– P. 137-185.

16. *Nirmala N. and Vedan M.J.* Wave interaction on water of variable depth // *J. Math. Phys. Sci.*– 1990.– **24**, N2.– P. 107-114.
17. *Selezov I. and Volynski R.* Sediment transport in the shelf coastal zone as an area of mathematical physics // *Workshop of Math. Physics. Towards the 21th Century.*– Israel, Beer Sheva, 1993.– P. 29.
18. *Rao A.D.* A numerical modelling study of the flow and salinity structure in the Godavari Estuary, East Coast of India // *Int. J. for Numerical Methods in Fluids.*– 1995.– 21.– P. 35-48.
19. *Ren X. and Wang K.-H.* A Boussinesq model for a wave-current interaction system // *Proc. 6th Int. Off-shore and Polar Eng. Conference.*– Los Angeles, USA, 1996.– P. 81-86.
20. *Selezov I.T.* Wave hydraulic models as mathematical approximations // *Proc. 22nd Congress of IAHR, Techn. Session B.*– Lousanne, Switzerland, 1987.– P. 301-306.
21. *Scott Russel J.* Report on waves.– London: Brit. Assoc. Rep, 1844.– 131 p.
22. *Selezov I.T. and Zheleznyak M.I.* On the numerical modelling of long wave propagation in open channels // *Proc. Int. Conf. On Numer. Modelling of River, Channel Overland Flow.* Bratislava.– Sec.1.1, 1981.– P. 1-11.
23. *Селезов И.Т.* Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах.– Киев: Наук. думка, 1989.– 204 с.
24. *Matsuno Y.* Nonlinear evolutions of surface gravity waves of fluid of finite depth // *Phys. Review Letters.*– 1992.– **69**, N4.– P. 609-611.
25. *Peregrine D.E.* Long waves on a beach // *J. Fluid Mech.*– 1967.– **2**, Part 2.– P. 321-330.
26. *Madsen O.S. and Mel C.C.* The transformation of solitary wave over an uneven bottom // *J. Fluid Mech.*– 1969.– 39. Part 4.– P. 781-797.
27. *Hammack J.L.* A note on tsunami: their generation and propagation in an ocean of uniform depth // *J. Fluid Mech.*– 1973.– 60. Part 4.– P. 769-799.
28. *Su G.H. and Gardner C.S.* Korteweg-de Vries equation and generalization. 3. Derivation of KdV and Burgers equations // *J. Math. Phys.*– 1969.– **10**, N3.– P. 536-539.
29. *Venezian G.* Nonlinear dispersive waves in shallow water // *Proc. 16 Congr. IAHR. V.1.*– San Paolo, Brazil, 1975.– P. 322-329.
30. *Maxworthy T.* Experiments of collisions between solitary waves // *J. Fluid Mech.*– 1976.– 76. Part 1.– P. 177-186.
31. *Kishi T. and Saeki H.* The shoaling, breaking and run-up of the solitary wave on impermeable rough slopes // *Proc. 10th Conf. Coastal Eng.,1.*– Tokyo, 1966.– P. 284-301.
32. *Wu T.U.* Long waves on ocean and coastal waters // *J. Engng. Mech. Div.*– 1981.– ASCE. 107.– P. 501-522.