

УДК 532.5:517.958

ВИНТОВОЙ АНАЛОГ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ СФЕРЫ

Н. В. САЛТАНОВ, П. А. ШЕСТОПАЛ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 20.03.97

На основе обобщенного потенциала получено решение задачи обтекания сферы однородным винтовым потоком. Показано, что при стремлении коэффициента спиральности винтового потока к нулю это решение переходит в традиционное решение задачи потенциального обтекания. Проанализировано влияние коэффициента спиральности на картины линий тока и коэффициент давления.

На основі узагальненого потенціалу одержано розв'язок задачі обтікання сфери гвинтовим потоком. Показано, що при наближенні коефіцієнта спіральності до нуля цей розв'язок переходить в традиційний розв'язок задачі потенційного обтікання. Проаналізовано вплив коефіцієнта спіральності на картини ліній течії та коефіцієнт тиску.

The resolution of flow-past problem of the sphere by homogeneous helical flow is obtained. The generalized potential is used. This resolution turn into potential resolution, when the helicity coefficient equal to zero. The stream lines and pressure coefficient are considered.

ВВЕДЕНИЕ

Класс винтовых течений является весьма существенным [1–8, 10–16]. Начало теории винтовых потоков положено И.С.Громекой [5]; винтовое движение вязкой жидкости впервые рассмотрел В.А.Стеклов [4, 13]. Н.Е.Жуковский [6] понятие винтового движения использовал при создании вихревой теории винта; математическому обоснованию подхода Н.Е.Жуковского посвящена работа М.В.Келдыша и Ф.И.Франкля [8]; систематическое изложение механики винтовых и циркуляционных потоков дано О.Ф.Васильевым [4]; обобщение винтовых движений на случай многокомпонентной магнитной гидродинамики получено В.С.Ткаlichem и Е.Ф.Ткалич [15]. Ряд работ Н.А.Слезкина [13, 14] посвящен применению аппарата теории винтовых течений к задачам динамики атмосферы. Некоторые точные решения, описывающие осесимметричные винтовые движения несжимаемой жидкости, получены А.Б.Айрапетовым и Е.М.Жмулиным [1]. Такого рода решения могут представить интерес для описания вихрей за гребными винтами, вихревых жгутов, сходящих с концов крыла, вторичных течений в искривленных каналах, течений в воронках, торнадо и закрученных струях. Результаты, позволяющие провести полный анализ течения, индуцируемого вихревыми нитями винтовой формы в трубе и оценить влияние конвективного переноса в процессе энергоразделения в вихревой трубке Ранка, получены А.А.Борисовым, М.А.Куйбиным и В.Л.Окуловым [3]. Данная статья посвящена некоторым аспектам внешнего об-

текания сферы винтовым потоком.

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Обратимся к соотношениям, описывающим однородные винтовые течения несжимаемой жидкости [4, 5, 12, 13]:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \beta_0 \mathbf{v}, \beta_0 = \text{const}, \quad (1)$$

$$p = \rho(B_0 - \frac{v^2}{2}). \quad (2)$$

Здесь β_0 – коэффициент спиральности; B_0 – постоянная Бернулли. В сферических координатах (R, θ, ϕ) при наличии симметрии вращения ($\partial/\partial\phi = 0$) на основе соотношения (1) получаем [12, 13]:

$$v_R = (\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \beta_0^2)S, \quad (3)$$

$$v_\theta = (\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R}) \frac{\partial S}{\partial \theta}, \quad (4)$$

$$v_\phi = -\beta_0 \frac{\partial S}{\partial \theta}, \quad (5)$$

$$(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\text{ctg } \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \beta_0^2)S = 0. \quad (6)$$

Здесь S – специально введенный обобщенный потенциал [12, 13], связанный с функцией тока ψ следующим образом:

$$\psi = -R \sin \theta \frac{\partial S}{\partial \theta}. \quad (7)$$

Заметим, что в отличие от функции тока ψ обобщенный потенциал S удовлетворяет уравнению Гельмгольца (6). В случае потенциальных ($\beta_0 \rightarrow 0$) течений соотношения (3), (5) и (6) принимают вид

$$v_R = (R \frac{\partial^2}{\partial R^2} + 2 \frac{\partial}{\partial R})S, \quad (8)$$

$$v_\phi = 0, \quad (9)$$

$$(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{R^2 \partial \theta^2} + \frac{\text{ctg} \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta})S = 0. \quad (10)$$

Выражения (4) и (7) при этом не меняют своего вида.¹

2. ВИНТОВОЙ АНАЛОГ ОДНОРОДНОГО ПОТОКА

Функция тока однородного потока в сферических координатах, как известно [9], имеет вид

$$\psi = \frac{1}{2} U_\infty R^2 \sin^2 \theta, \quad (11)$$

где U_∞ – скорость потока. Подставляя (11) в (7) и интегрируя получившееся соотношение, находим соответствующий обобщенный потенциал S :

$$S = \frac{1}{2} U_\infty R \cos \theta. \quad (12)$$

Рассмотрим следующее частное решение уравнения Гельмгольца (6):

$$S = \frac{3\sqrt{\pi}U_\infty}{2\sqrt{2}\beta_0^{3/2}\sqrt{R}} J_{3/2}(\beta_0 R) \cos \theta. \quad (13)$$

Здесь $J_{3/2}(\beta_0 R)$ – функция Бесселя порядка 3/2. Устремляя в (13) $\beta_0 \rightarrow 0$, приходим к выражению (12). Таким образом, простейшим аналогом однородного потока в классе однородных винтовых течений является течение, описываемое обобщенным потенциалом (13).

3. ВИНТОВОЙ АНАЛОГ ДИПОЛЯ

Функция тока диполя в сферических координатах такова [9]:

$$\psi = \frac{\mu \sin^2 \theta}{4\pi R}. \quad (14)$$

Здесь μ – момент диполя. Подставляя (14) в (7) и проводя интегрирование, находим соответствующий обобщенный потенциал S :

$$S = \frac{\mu}{4\pi R^2} \cos \theta. \quad (15)$$

¹ Отметим, что в работе [12] в конце абзаца, следующего сразу за формулой (1.9) на стр. 98, вместо "[5]" должно быть "[15]".

Рассмотрим, далее, следующее частное решение уравнения Гельмгольца (6):

$$S = -\frac{\mu\beta_0^{3/2}}{4\sqrt{2}\pi\sqrt{R}} J_{-3/2}(\beta_0 R) \cos \theta. \quad (16)$$

Здесь $J_{-3/2}(\beta_0 R)$ – функция Бесселя порядка -3/2. Устремляя в (16) $\beta_0 \rightarrow 0$, приходим к выражению (15). Таким образом, простейшим аналогом диполя в начале координат с моментом μ в классе однородных винтовых течений является течение, описываемое обобщенным потенциалом (16).

4. ВИНТОВОЙ АНАЛОГ ОБТЕКАНИЯ СФЕРЫ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ПОТОКОМ

Функция тока потенциального обтекания сферы радиуса a , как известно, представляет собой сумму функций тока однородного потока и диполя при $\mu = -2\pi a^3 U_\infty$ [9]:

$$\psi = \frac{1}{2} U_\infty R^2 [1 - (\frac{a}{R})^3] \sin^2 \theta. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (7) и проводя интегрирование, находим соответствующий обобщенный потенциал S :

$$S = \frac{1}{2} U_\infty R [1 - (\frac{a}{R})^3] \cos \theta. \quad (18)$$

Рассмотрим далее винтовое течение, представляющее собой сумму аналогов однородного потока (13) и диполя (16):

$$S = \frac{\beta_0^{3/2}}{4\sqrt{2}\pi R} [\frac{6\pi U_\infty}{\beta_0^3} J_{3/2}(\beta_0 R) - \mu J_{-3/2}(\beta_0 R)] \cos \theta. \quad (19)$$

Пусть выполнено условие

$$J_{-3/2}(\beta_0 a) \neq 0. \quad (20)$$

Подставим (19) в (3) и удовлетворим с помощью получившегося выражения для v_R условию непротекания на сфере

$$R = a, \quad v_R = 0.$$

В результате определим величину μ :

$$\mu = \frac{6\pi U_\infty}{\beta_0^3} \frac{J_{3/2}(\beta_0 a)}{J_{-3/2}(\beta_0 a)}. \quad (21)$$

Учитывая (21) и (19), запишем

$$S = \frac{3\sqrt{\pi}U_\infty}{2\sqrt{2}\beta_0^{3/2}\sqrt{R}} [J_{3/2}(\beta_0 R) -$$

$$-\frac{J_{3/2}(\beta_0 a)}{J_{-3/2}(\beta_0 a)} J_{-3/2}(\beta_0 R)] \cos \theta. \quad (22)$$

Устремляя в соотношении (22) $\beta_0 \rightarrow 0$, приходим к выражению (18). Таким образом, простейшим аналогом потенциального обтекания сферы в классе однородных винтовых течений является течение, описываемое обобщенным потенциалом (22).

5. КАРТИНЫ ЛИНИЙ ТОКА

Подставим (22) в (7), проведем интегрирование, а затем обезразмеривание. В результате получим следующее выражение для функции тока:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \frac{3\sqrt{\pi\bar{R}}}{\sqrt{2}(\bar{\beta}_0^{3/2})} [J_{3/2}(\bar{\beta}_0\bar{R}) - \\ & - \frac{J_{3/2}(\bar{\beta}_0)}{J_{-3/2}(\bar{\beta}_0)} J_{-3/2}(\bar{\beta}_0\bar{R})] \sin^2 \theta, \quad (23) \\ \bar{\psi} &\equiv \frac{2\psi}{U_\infty a^2}, \quad \bar{\beta}_0 \equiv \beta_0 a, \quad \bar{R} \equiv \frac{R}{a}. \end{aligned}$$

В случае потенциального ($\beta_0 \rightarrow 0$) обтекания выражение (23) переходит в традиционное [9]

$$\bar{\psi} = [\bar{R}^2 - \frac{1}{\bar{R}}] \sin^2 \theta. \quad (24)$$

На основе (23) и (24) были построены картины линий тока $\bar{\psi} = \text{const}$ в области

$$0 \leq \bar{r} \leq 2, \quad -3 \leq \bar{z} \leq 3, \quad \bar{r} \equiv \frac{r}{a}, \quad \bar{z} \equiv \frac{z}{a},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от оси симметрии z . Для $\beta_0 = 0; 0,8; 2,5$ эти картины представлены, соответственно, на рис. 1 – 3. Нетрудно заметить, что при $\beta_0 = 0,8$ картина линий тока еще "близка" к картине линий тока при потенциальном обтекании. При $\beta_0 = 2,5$ эта картина принципиально иная – в рассматриваемой области появляется циркуляционная зона.

6. КОЭФФИЦИЕНТ ДАВЛЕНИЯ

Обратимся к выражению (2). Пусть

$$B_0 = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U_\infty^2}{2}, \quad (25)$$

где p_∞ и U_∞ – давление и скорость на бесконечности при потенциальном обтекании сферы (9). Легко убедиться в том, что в этом случае при $\beta_0 \rightarrow 0$ выражение для давления (2), где вектор скорости определяется согласно зависимостей (3) – (5) и

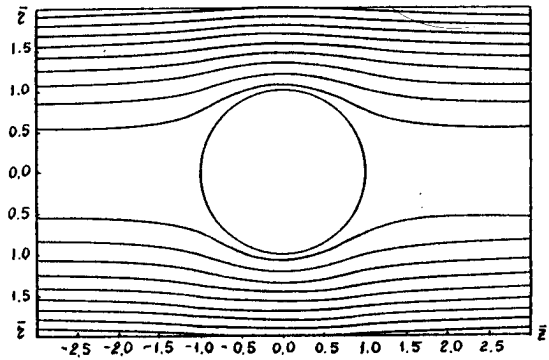


Рис. 1. Картина линий тока, $\bar{\beta}_0 = 0$

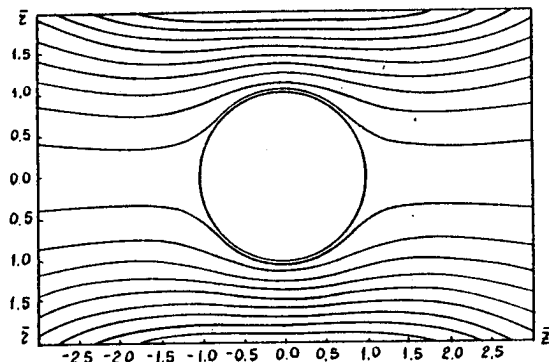


Рис. 2. Картина линий тока, $\bar{\beta}_0 = 0,8$

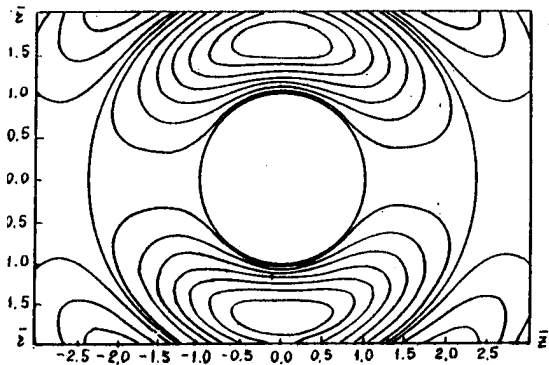


Рис. 3. Картина линий тока, $\bar{\beta}_0 = 2,5$

(22), переходит в соответствующее выражение для давления теории потенциального обтекания сферы [9]. Как и в случае потенциального обтекания, коэффициент давления в рассматриваемом случае обтекания сферы определим следующим образом:

$$c_p = \frac{p|_{R=a} - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}. \quad (26)$$

Подставим в (26) выражения (2), (3) – (5), (22) и (25). После проведения некоторых преобразова-

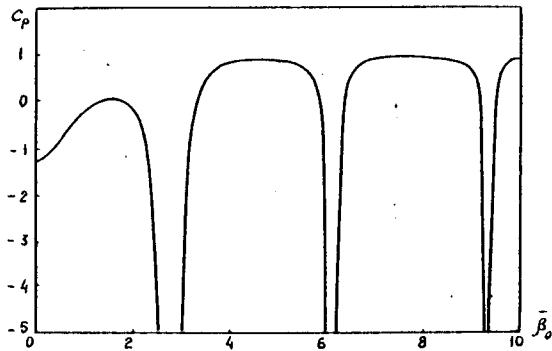


Рис. 4. Зависимость коэффициента давления от коэффициента спиральности при $\theta = (\pi/2)$

ний, получим

$$c_p = 1 - \frac{9}{2\pi(\bar{\beta}_0^3)J_{-3/2}^2(\bar{\beta}_0)} \sin^2 \theta. \quad (27)$$

Как следует из (27), экстремумы зависимости коэффициента давления от коэффициента спиральности $\bar{\beta}_0$ находятся в точках

$$\bar{\beta}_0 = 0 \text{ и } \bar{\beta}_0 = (n - \frac{1}{2})\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (28)$$

Экстремум в точке $\bar{\beta}_0 = 0$ является локальным минимумом. При этом

$$c_p(0) = 1 - (9/4) \sin^2 \theta. \quad (29)$$

Таким образом, при $\bar{\beta}_0 = 0$ выражение (27) переходит в соответствующее выражение для коэффициента давления при потенциальном обтекании [9]. Экстремумы функции $c_p(\bar{\beta}_0)$ при $\bar{\beta}_0 = ((2n-1)\pi/2)$ являются локальными максимумами. При этом для $\theta = (\pi/2)$ $c_p(\pi/2) = 0,087$; $c_p(3\pi/2) = 0,899$; $c_p(5\pi/2) = 0,964$; $c_p((2n-1)\pi/2) |_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 1$. Зависимость $c_p = c_p(\bar{\beta}_0)$ при $\theta = (\pi/2)$ для $0 \leq \bar{\beta}_0 \leq 10$ представлена на рис.4. Как видим, и при $\theta = (\pi/2)$ в отличие от (29) коэффициент давления при обтекании сферы винтовым потоком может принимать не только отрицательные, но и положительные значения, не превышающие, однако, единицы.

1. Айрапетов А. Б., Жмулин Е. М. О винтовом осесимметричном движении несжимаемой вязкой жидкости // Прикл. математика и механика. – 1988. – 52, Вып. 1. – С. 64–69.
2. Афанасенко А. Н., Гостинцев Ю. А., Успенский О. А. Квазиодномерная теория сопла для винтового потока газа // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1977. – N 5. – С. 186–191.
3. Борисов А. А., Куйбин П. А., Окулов В. Л. Моделирование течения и конвективного энергообразования в вихревых трубах // Сибирск. физ.-техн. журнал. – 1993. – Вып. 1. – С. 30–38.
4. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. – М.: Госэнергоиздат, 1958. – 144 с.
5. Громека И. С. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 76–148 с.
6. Жуковский Н. Е. Вихревая теория гребного винта // Избр. соч.: В 2-х т. – М. – Л.: Гостехиздат. – 1948. – Т. 2. – С. 191–355.
7. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З., Черников А. А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. – М.: Наука, 1991. – 240 с.
8. Келдыш М. В., Франкль Ф. И. Строгое обоснование винта Жуковского // Келдыш М. В. Избранные труды. Механика. – М.: Наука. – 1985. – С. 43–75.
9. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978. – 736 с.
10. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Яновский В. Об интегралах замороженности и лагранжевых инвариантах в гидродинамических моделях // Журн. эксп. и теор. физ. – 1981. – 83, Вып. 1(7). – С. 215–226.
11. Салтанов Н. В. Аналитическая гидромеханика. – К.: Наук. думка, 1984. – 200 с.
12. Салтанов Н. В. Обобщенный гидродинамический потенциал и его аналоги в теории упругости // Прикл. механика. – 1990. – 26, N 4. – С. 97–101.
13. Салтанов Н. В., Горбань В. А. Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения. – К.: Наук. думка, 1993. – 244 с.
14. Слезкин Н. А. Гидродинамическая модель тайфуна с учетом вращения Земли // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 1990. – 26, N 5. – С. 493–501.
15. Ткалич В. С., Ткалич Е. Ф. Винтовые движения в многокомпонентной магнитной гидродинамике // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1960. – N 5. – С. 184–186.
16. Ярмицкий А. Г. Смерчеподобный вихрь Чаплыгина // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1992. – N 4. – С. 52–59.