

УДК 621.397.6

Г. Ф. Конахович¹, В. П. Вінницький², В. Г. Потапов¹

¹ Національний авіаційний університет
пр. Космонавта Комарова 1, 03058 Київ, Україна

² Національний технічний університет України «КПІ»
пр. Перемоги 7, 03056 Київ, Україна

Метод оцінювання ефективного функціонування системи персонального радіовиклику

Аналіз функціонування системи персонального радіовиклику зводиться до вивчення поведінки за часом логіко-динамічної стохастичної мережі. Запропоновано впорядковану систему аналітичних процедур як метод оцінювання ефективності такого класу телекомунікаційних систем.

Ключові слова: персональний радіовиклик, модель функціонування, згортка функцій, доставляння повідомлення.

Вступ

Системи персонального радіовиклику (СПРВ) використовується не тільки для приватного зв'язку абонентів, але і як система зв'язку між об'єктами виробничих або адміністративно-управлінських процесів. В останньому випадку СПРВ, як канал передачі, виявляється включеним у цикл управління виробництвом (установою), і від успішності її функціонування може суттєво залежати успішність виконання тієї чи іншої виробничої операції.

Згідно загальної теорії систем, ефективність системи керування може бути оцінена за імовірнісним або часовим показниками, тобто за ймовірністю виконання поставленої задачі P_e і тривалістю циклу керування t_{cy} .

Відмітимо, що значення P_e залежить від множини випадкових факторів, з яких, як правило, враховується тільки обмежена кількість. Тому названий показник не завжди виявляється представницьким. Більш представницька й точна оцінка системи за тривалістю циклу керування, до складу якого включаються часи прийняття рішення на виконання тієї або іншої виробничої операції, доведення рішень до виконавців, реалізації рішення й донесення про його виконання.

Очевидно, що якщо передана від керівника (адресанта) виробництва інформація буде затримана, тоді й тривалість циклу керування буде збільшена.

Для оперативного доведення прийнятих рішень до виконавців (адресатів) і збору від них донесень розгортається система зв'язку (в нашому випадку СПРВ),

на утримання якої також необхідні відповідні витрати.

Таким чином, з однієї сторони ефективність СПРВ, як підсистеми керування виробництвом (установою), залежить від часу доведення прийнятого рішення до виконавців, але з другої — матеріальними витратами на її утримання й розгортання. При цьому витрати на СПРВ прийнято оцінювати вартістю монтажу й експлуатації, яка відноситься до кількості користувачів. Указана характеристика називається питомими витратами.

Припустимо, що система зв'язку забезпечує доведення інформації користувачу за деякий випадковий час T_δ , а питомі витрати на одного користувача Z_n . Тоді ефективність такої системи зв'язку може бути оцінена користувачем за допомогою показника [1]:

$$W = Z_n / T_\delta. \quad (1)$$

Питомі витрати Z_n наводяться звично в технічній та експлуатаційній документації.

Таким чином, для оцінки ефективності діючої (проектувальної) СПРВ, необхідно знати за який час вона забезпечить доведення повідомлень до адресатів, і які питомі витрати адресанта на її утримання. Час доведення повідомлення є випадковою величиною, яка повністю визначається своєю функцією розподілу, тому й розроблювальна математична (аналітична) модель повинна дозволити отримувати не тільки середнє та відхилення від нього, але й функцію розподілу цієї випадкової величини.

Постановка задачі

Нехай маємо СПРВ, що складається з типового пейджингового обладнання й включає N робочих місць операторів, які рівно доступні її користувачам з імовірністю $P_{св}$. Припустимо також, що користувачі, які мають однакові пріоритети, утворюють пуассонівськй стаціонарний потік повідомлень, що й підлягають передаванню від користувача до адресата, з інтенсивністю $\lambda_{св}$. Потік задається розподілом $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$. Це ймовірність того, що за час t виникне необхідність у передаванні n повідомлень ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Якщо хоча б один з операторів вільний, тоді передане користувачем повідомлення, яке має випадкову тривалість t_n із функцією розподілу $C(t)$, обробляється оператором протягом випадкового часу $t_{обр}$ з $A_1(t)$, вводиться ним в локальну мережу за випадковий час $t_{вв}$ з $A_2(t)$, і через деякий випадковий час $t_{нв}$ з $A_3(t)$ надходить на вхід пейджингового передавача, який передає його протягом випадкового часу $t_{пер}$ з $M(t)$. Передане передавачем системи радіоповідомлення успішно приймається пейджером адресата в зоні обслуговування з імовірністю P_{yn} .

У протилежному випадку, з імовірністю $(1 - P_{yn})$ усі оператори СПРВ зайняті обслуговуванням заявок, які надійшли раніше, і користувач через випадковий час $t_{ожо}$ з функцією розподілу $B(t)$ поновлює спробу передавання свого повідомлення до оператора. Якщо повідомлення було прийняте оператором, але з імовірністю $(1 - P_{yn})$ не доведено до адресата, тоді користувач протягом випадкового часу $t_{ожр}$

з $G(t)$ очікує реакції (підтвердження) адресата на отримане повідомлення й здійснює повторну передачу непереданого повідомлення.

Обмеження й припущення. Коефіцієнт технічної надійності обладнання пейджингового обладнання дорівнює одиниці, функції розподілу вказаних у постановці задачі випадкових величин відносяться до складу показникових (експоненціальних); потік повідомлень, який надходить на вхід СПРВ, не містить пріоритетних повідомлень і є пуассонівським стаціонарним.

Необхідно визначити функцію розподілу $F_g(t)$, математичне сподівання (середній час T_g) та дисперсію.

Розв'язання задачі

Для наочності, представлення інтервалу часу доведення повідомлення від адресанта до адресата показано на часовій осі (рис. 1), де X_1, \dots, X_5 будуть невід'ємними, незалежно розподіленими випадковими величинами, функції розподілу яких наведено в постановці задачі.

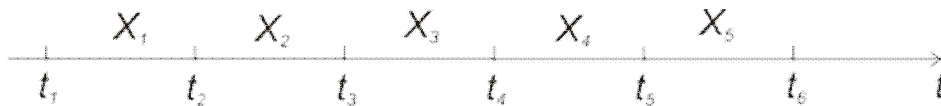


Рис. 1

З рис. 1 видно, що випадкова величина доведення повідомлення до адресата є не що інше як сума незалежних випадкових величин X_1, \dots, X_5 .

Відповідна явна формула для щільності розподілу суми $X_1 + \dots + X_5$ довільно складна і має вигляд [2]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t_1) f_2(t_2 - t_1) f_3(t_3 - t_2) f_4(t_4 - t_3) f_5(t_5 - t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 dt_5, \quad (2)$$

причому $f_i(t)$ передбачається за визначенням рівній нулю для від'ємних x (усі функції розподілу випадкових величин X_1, \dots, X_5 є експоненціальними). Цей інтеграл називають згорткою функції.

Для полегшення пошуку $F_g(t)$ використаємо перетворення Лапласа-Стілт'єса цієї функції [3]. З визначення перетворення

$$F_g(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d[F_g(t)], \quad (3)$$

де $F_g(t)$ — невідома, знайдемо необхідну нам функцію.

У відповідності з теоремою згортки перетворень маємо:

$$F_g(s) = c(s) \cdot a(s) \cdot b(s) \cdot g(s) \cdot m(s), \quad (4)$$

де множники визначаються за формулою (3) при відомих з постановки задачі функції розподілу випадкових величинах X_1, X_2, \dots, X_5 і мають такий вигляд:

$$c(s) = \frac{c}{c+s}, \quad a(s) = \frac{a}{a+s}, \quad b(s) = \frac{b}{b+s}, \quad g(s) = \frac{g}{g+s}, \quad m(s) = \frac{m}{m+s}. \quad (5)$$

У цих формулах a, b, c, g, m — інтенсивності відповідних розподілів (математичних сподівань) випадкових величин $A(t), B(t), C(t), G(t)$ і $M(t)$, які визначаються з виразів:

$$a = \frac{1}{\bar{t}_{обр} + \bar{t}_{вс} + \bar{t}_{нс}}, \quad b = \frac{1}{\bar{t}_{ожо}}, \quad c = \frac{1}{\bar{t}_n}, \quad g = \frac{1}{\bar{t}_{ожр}}, \quad m = \frac{1}{\bar{t}_{пер}}. \quad (6)$$

Функція $F_g(s)$ описує поведінку за часом логіко-динамічної моделі стохастичної мережі, яка представляє в узагальненому вигляді функціонування системи персонального радіовиклику при пейджинговому зв'язку (рис. 2)

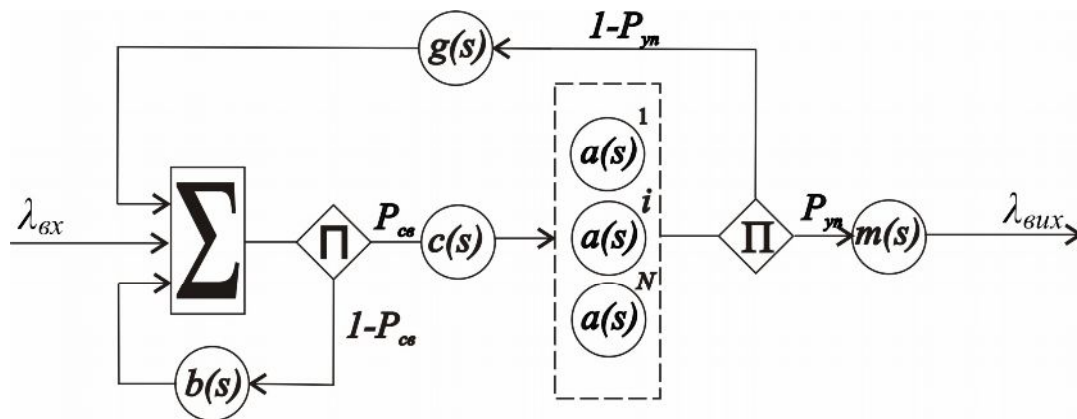


Рис. 2

Тепер перейдемо до визначення функції $F_g(s)$. Процес успішного доведення повідомлення до адресата (пейджингу) розглядатимемо як подію A та її ймовірність виникнення $P(A)$ і неуспішного доведення як подію B (усі оператори N зайняті обслуговуванням повідомлень, які раніше надійшли) та її ймовірність $P(B)$. Тоді протилежна їй подія \bar{B} та її ймовірність $P(\bar{B})$ сприяє успішному доведенню повідомлення, з цих міркувань випливає зв'язок між цими ймовірностями, тобто:

$P(A)$ — ймовірність виникнення події A — успішне доведення повідомлення до адресата;

$P(B)$ — ймовірність виникнення події B — недоведення повідомлення до адресата;

$P(\bar{B})$ — ймовірність виникнення події \bar{B} — сприятливий випадок для виникнення події A .

Звідки $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$ на підставі повної групи подій. Виникнення події A залежить від виникнення події \bar{B} , тоді, використовуючи теорему добутку двох подій, запишемо:

$$P(A\bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P(A/\bar{B}) \quad \text{або} \quad P(A/\bar{B}) = P(A\bar{B})/P(\bar{B}). \quad (7)$$

Переходячи до подій, як до випадкових величин $P(A/\bar{B})$, знайдемо ймовірність успішної доставки повідомлення до адресата $F_g(s)$, тобто:

$$F_g(s) = P(A\bar{B})/P(\bar{B}). \quad (8)$$

Визначимо $P(\bar{B})$. Ймовірність протилежної події $P(B)$ — це є ймовірність того, що повідомлення не дійде до адресата з таких причин:

1) усі оператори зайняті й приходиться через деякий час поновлювати запит на зв'язок та передачу оператору повідомлення, ймовірність цього випадку має такий вигляд: $(1 - P_{ce}) \cdot c(s) \cdot b(s)$;

2) на ділянці (каналу зв'язку між передавачем СПРВ і пейджингом адресата) виникнуть помилки в адресній частині повідомлення, і повідомлення може бути направлено іншому адресату, ймовірність цього випадку має такий вигляд:

$$(1 - P_{yn}) \cdot P_{ce} \cdot g(s) \cdot a(s) \cdot m(s),$$

тоді повна ймовірність того, що повідомлення не надійде до адресата або ймовірність $P(B)$ визначається як:

$$P(B) = (1 - P_{ce}) \cdot c(s) \cdot b(s) + (1 - P_{yn}) \cdot P_{ce} \cdot g(s) \cdot a(s) \cdot m(s). \quad (9)$$

У такому разі:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - [(1 - P_{ce}) \cdot c(s) \cdot b(s) + (1 - P_{yn}) \cdot P_{ce} \cdot g(s) \cdot a(s) \cdot m(s)]. \quad (10)$$

Ймовірність добутку події A і \bar{B} $P(A\bar{B})$ визначається:

$$P(A\bar{B}) = P_{ce} \cdot P_{yn} \cdot a(s) \cdot c(s) \cdot m(s). \quad (11)$$

З урахуванням (10) і (11) отримаємо:

$$F_g(s) = \frac{P_{ce} \cdot P_{yn} \cdot a(s) \cdot c(s) \cdot m(s)}{1 - (1 - P_{ce}) \cdot c(s) \cdot b(s) - (1 - P_{yn}) \cdot P_{ce} \cdot g(s) \cdot a(s) \cdot m(s)}. \quad (12)$$

Підставимо у вираз (12) значення перетворень Лапласа інтенсивностей a , b , m , g , c , які визначені в (5), і отримаємо в остаточному вигляді перетворення Лапласа функції розподілу доставки повідомлення від користувача до визначеного адресата (адресного пейджингу) тобто:

$$F_g(s) = \frac{P_{ce} \cdot P_{yn} cam(b+s)(g+s)}{s^5 + As^4 + Bs^3 + Cs^2 + Ds + E}, \quad (13)$$

де A, B, C, D і E — коефіцієнти при відповідних степенях s ;

$$\begin{aligned} A &= a + b + c + g + m; \quad E = P_{ce} \cdot P_{yn} abcm, \\ B &= P_{ce} bc + a(c + b) + g(a + b + c) + m(a + b + c + g), \\ C &= ab(P_{ce}c + g) + cg(P_{ce}b + a) + m[P_{ce}bc + a(b + c) + g(a + b + c)] + (1 - P_{yn})P_{ce} agm, \\ D &= P_{ce} bc[ag + m(a + g)] + agm(b + c)[1 - (1 - P_{yn})P_{ce}]. \end{aligned}$$

Нагадаємо, що справжнє значення перетворення Лапласа полягає в тому, що воно має характер відображення, яке замінює функції із простору оригіналів, і проведені тут над ними операції, у простір зображень. Ці операції значно простіші, ніж початкові рівняння в просторі оригіналів, і розв'язуються ці відображені рівняння набагато легше.

Отримане зображення $F_g(s)$ з математичної точки зору є розв'язанням поставленої задачі. Тепер із практичної точки зору необхідно зробити обернений перехід у простір оригіналів, тобто знайти функцію розподілу $F_g(t)$ та її середні характеристики: математичне сподівання та дисперсію як квадратичне відхилення від математичного сподівання.

Характеристики $F_g(t)$ знайдемо при безпосередніх операціях над $F_g(s)$.

Математичне сподівання по визначенню знаходиться як:

$$Tg = \int_0^{\infty} tf_g(t)dt = \int_0^{\infty} t dF_g(t) \quad (14)$$

$F_g(t)$ має зображення $F_g(s)$ (вираз (13)). Застосуємо відому операцію диференціювання $F_g(s)$ і визначення значень цих функцій при $s = 0$, тобто:

$$\begin{aligned} F_g(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dF_g(t), \\ \frac{d}{ds} F_g(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} dF_g(t) = - \int_0^{\infty} te^{-st} dF_g(t) = f_g(s). \end{aligned}$$

Знайдемо значення функції $f_g(s)$ при $s = 0$, а саме:

$$f_g(0) = \left. \frac{d}{ds} F_g(s) \right|_{s=0} = - \int_0^{\infty} t dF_g(t). \quad (15)$$

Таким чином, взявши першу похідну від $F_g(s)$, яка знаходиться з виразу (13), і визначивши її в точці $s = 0$, знайдемо середнє значення інтервалу часу доставки повідомлення.

Дисперсія по визначенню знаходиться наступним чином:

$$D_g = \int_0^{\infty} (t - T_g)^2 f(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} t^2 f(t) \cdot dt - T_g^2. \quad (16)$$

Значення другого початкового моменту функції $F_g(s) \int_0^{\infty} t^2 f(t) \cdot dt$ визначимо з другої похідної по s функції $F_g(s)$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt &= \frac{d^2}{ds^2} \int_0^{\infty} e^{-st} dF_g(t) \Big|_{s=0} = -\frac{d}{ds} \int_0^{\infty} t e^{-st} dF_g(t) \Big|_{s=0} = \\ &= \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dF_g(t) \Big|_{s=0} = \int_0^{\infty} t^2 dF_g(t). \end{aligned} \quad (17)$$

З (17) видно, що D_g можна визначити за формулою (16).

Підсумок по визначенню середньої характеристики T_g та D_g дисперсії зводиться до пошуку першої й другої похідної перетворення Лапласа функції ймовірності розподілу часу доставки повідомлення до адресата.

Для проведення повного розрахунку T_g та D_g необхідно визначити з постійних початкових даних P_{cv} і P_{yn} .

Визначення P_{cv} і P_{yn} . У постановці задачі було визначено, що СПРВ має N незалежних операторів, які повинні обслуговувати потік заявок користувачів, з параметрами λ_{ex} . Цей ланцюг мережі можна розглядати як систему масового обслуговування типу M|M|N|O, на вхід якої надходить потік заявок на передавання повідомлень із параметром (інтенсивністю) λ_{ex} . Для цієї моделі визначено формули обчислення ймовірності зайнятості й обслуговуючих апаратів у вигляді:

$$P_i = \left(\frac{\lambda_{ex}}{a} \right)^i / i! \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda_{ex}}{a} \right)^m, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (18)$$

Ці формули звично називають формулами Ерланга. Якщо в $i = N$, тоді ми отримаємо формулу для обчислення ймовірності P_N , що в будь-який момент часу будуть усі N операторів зайняті для наступного користувача, але протилежною подією буде ймовірність того, що хоча б один оператор буде доступний користувачеві, тобто:

$$P_{cv} = 1 - P_N = 1 - \left(\frac{\lambda_{ex}}{a} \right)^N / N! \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} \left(\frac{\lambda_{ex}}{a} \right)^m. \quad (19)$$

Визначимо ймовірність P_{yn} вірної передачі адресату повідомлення передавачем СПРВ. P_{yn} — це ймовірність успішного неспотвореного приймання пейджером адресата переданого повідомлення, яка розраховується з урахуванням впровадження того чи іншого завадостійкого коду. При цьому визначається ймовірність вірної доставки повідомлення адресату, при застосованому способі боротьби з можливими завадами, які можуть внести помилки в повідомлення (особливо це стосується адресної частини повідомлення).

Так, наприклад, за ймовірності помилки (що дорівнює P_0) на біт, при використанні завадостійкого кодування кодом Боуза–Чоудхури–Хоквінгема (БЧХ) (l, n), визначено ймовірність із достатньою для практичних розрахунків точністю:

$$P_{yn} = P_{mc} \prod_{j=1}^{\frac{2vz}{n}} \sum_{i=1}^{xl} \frac{n! P_0 (1 - P_0)^{(n-1)}}{(n-i)! i!}, \quad (20)$$

де V — об'єм перерваного повідомлення (інформаційних знаків); z — число біт в одному інформаційному знаку первинного коду; $xl = \left\lceil \frac{l-n}{\log_2(l+1)} \right\rceil$ — число ви-

правлених кодом помилок; $P_{mc} = (1 - P_0)^x$; x — математичне сподівання числа біт тактової послідовності, яка необхідна для тактової синхронізації генераторного обладнання пейджера при заданому співвідношенні сигнал/шум на його вході.

Таким чином, вищесказане відносно визначення P_{yn} не є простим питанням. Упорядкуємо дії по визначенню P_{yn} у реальних умовах у вигляді алгоритму послідовності кроків дії.

Перший крок. В експериментальних умовах проводяться вимірювання (реєстрація) помилок, які виникають при передаванні повідомлень у дискретній формі простим кодом. Статистичним аналізом установлюється закономірність виникнення помилок за умов: 1) коли апіорі відомо форму закону — функції розподілу, або клас функцій, тоді на підставі результатів обробки вимірених даних оцінюються параметри розподілу; 2) перевіряється висунута гіпотеза про закон розподілу випадкових величин — помилок, які виникають у каналі передачі даних між передавачем та пейджером адресата. При виконанні першої умови можна апіорі підібрати відомі моделі помилок, і за результатами вимірювання оцінити їх параметри. Отже, на першому кроці знаходиться закон розподілу помилок (модель помилок).

Другий крок. Відомо, що для підвищення вірності передавання інформації в дискретній формі, одним із самих потужних методів є завадостійке кодування, в основі якого є введення надмірної інформації, що дозволяє виявляти помилки або виконувати їхнє корегування. У зв'язку з цим підбираються такі завадостійкі коди, які «борються» із помилками, закономірність яких установлено на першому кроці.

Третій крок. Відомо, що будь-який завадостійкий код не може зі стовідсотковою «гарантією» забезпечити виявлення та корегування помилок. Тому після визначення типу (класу) завадостійкого кодування необхідно обчислити ймовірність

вірної доставки повідомлень, як вище показано у вигляді прикладу впровадження кодів БЧХ для «боротьби» із незалежними помилками.

Тепер ми можемо перейти до визначення ефективності визначеної СПРВ, використовуючи при цьому оцінки середнього значення часу доставки повідомлення до адресата (пейджингу) T_g та його дисперсію D_g . Враховуючи, що T_g і D_g мають різні одиниці виміру, зведемо їх до однакової одиниці виміру через середнє квадратичне відхилення, яке визначається як:

$$\bar{D}_g = \sqrt{D_g}.$$

Для оцінювання ефективності СПРВ використаємо вищенаведений підхід, для чого скористаємось графіком питомих витрат, опублікованим у матеріалах по пейджинговим системам, які побудовані на основі обладнання «OpenPage ТМ» (рис. 3).

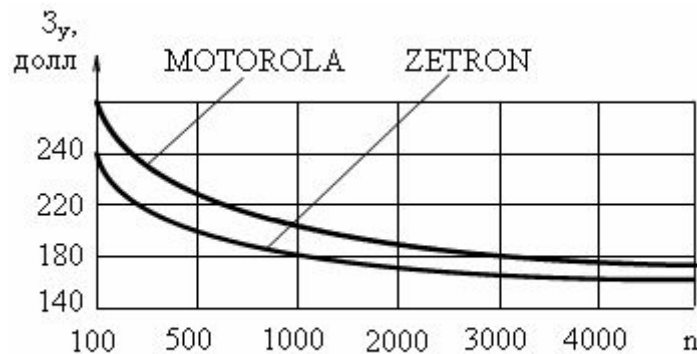


Рис. 3

Очевидно, що залежність (рис. 3) з достатньою точністю може бути апроксимована функцією вигляду:

$$Z_y = q_{\min} + q_{\max} e^{-ax}, \quad (21)$$

де a — параметр форми, який визначається методами, відомими з теорії функцій; q_{\min} і q_{\max} — відповідно мінімальне і максимальне значення функції питомих витрат; x — параметр експоненціальної функції числа користувачів СПРВ.

Таким чином, питомі витрати розраховуються для визначеної кількості користувачів, які охоплює СПРВ.

Визначимо середній час доставки повідомлення T_g , використовуючи формули (6) і (13), звідки отримаємо:

$$T_g = \left. \frac{d}{ds} F_g(s) \right|_{s=0} = - \int_0^{\infty} t dF_g(t) = \frac{P_{cs} P_{yn} [bgD - (b+g)E]}{E^2}. \quad (22)$$

Оцінку ефективності такої системи зв'язку можна отримати при використанні формул (1), (21) і (22).

Висновки

Запропонований метод аналізу функціонування системи персонального радіовиклику ґрунтується на апроксимації логіко-динамічної стохастичної мережі випадковим процесом у вигляді суми незалежних випадкових величин X_1, \dots, X_5 , яка задається згорткою 5-ти функцій. Отримано перетворення Лапласа–Стілт'єса випадкової функції розподілу $F_g(s)$ часу доставки повідомлення адресату з імовірнісними коефіцієнтами, які визначають ділянки напряму передавання повідомлення.

1. *Бабаков В.Ю., Воробьев О.В., Карпов Л.П., Певцов Н.В., Привалов А.А., Рыжков А.Е., Сиверс М.А.* Современные системы персонального радиовызова. — СПб.: Судостроение, 1998. — 72 с.
2. *Кокс Д.Р., Смит В.Л.* Теория восстановления — М.: Сов. радио, 1967. — 299 с.
3. *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования — М.: Наука, 1971. — 288 с.
4. *Вінницький В.П., Поліщук В.Г.* Термінальне устаткування та передавання інформації в телекомунікаційних системах — К.: ІВЦ видавництва «Політехніка», 2004. — 436 с.

Надійшла до редакції 20.02.2006