УДК 519.6(075.8)

А. Г. Додонов, В. Г. Путятин, В. А. Валетчик
Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Обработка оптических измерений траектории летательных объектов

Рассмотрены методы уравнивания угловых измерений по способу наименьших квадратов: метод уравнивания измерений отдельно в каждом временном сечении, предполагающий нулевое математическое ожидание случайных ошибок измерений, и метод уравнивания избыточных оптических измерений с подавлением их постоянных систематических ошибок в предположении засоренности измерений как случайными, так и неизвестными по величине и знаку систематическими погрешностями.

Ключевые слова: *метод, кинотеодолит, измерения, траектория, оценка, обработка, алгоритм.*

1. Постановка задачи

Целый ряд задач, возникающих при летных испытаниях летательных объектов, требует знания траектории их полета. Траекторию летательного объекта (ЛО) можно определить измерительными средствами, установленными на борту ЛО или вне его. Практически, за редким исключением, траекторные измерения выполняют измерительными средствами, расположенными на Земле; в некоторых случаях измерительные средства размещаются на специально оборудованном ЛО.

Контроль за местоположением ЛО в пространстве и параметрами его движения — сфера ответственности комплекса средств внешнетраекторных измерений (СВТИ). Основу траекторных измерительных средств комплекса СВТИ составляют [1, 2]:

— оптические (кинотеодолиты, фоторегистрирующие средства), обладающие высокой точностью измерений и применяемые при оценке взлетно-посадочных характеристик самолетов, аппаратуры слепой посадки, тарировки приемника воздушного давления и т.п.;

— радиотехнические (фазовые пеленгаторы, измерительные радиолокаторы), которые, уступая оптическим по точности измерений, имеют ряд достоинств и, в первую очередь, независимость от метеоусловий.

Оптические средства измерений представляют собой угломерные средства, предназначенные для визуального слежения за движущимся ЛО. Им характерна высокая точность и наглядность получаемых результатов. Для проведения измерений параметров движения ЛО оптическими средствами измерений применяется кинотеодолитный метод. Он реализует пеленгационный способ измерений и состоит в том, что с двух (или трех) кинотеодолитных постов (КТП) одновременно ведут слежение за движением одного объекта, фотографируют его и определяют его координаты в функции времени.

Кинотеодолитные станции (КТС) служат для более точных измерений параметров движения ЛО. Они работают на гораздо меньших дальностях и только в условиях хорошей видимости. Как правило, в КТС входят три поста слежения. Один из них выполняет вспомогательную функцию и может быть использован для контроля определения координат объекта. Кроме того, одновременное слежение с трех КТС позволяет исключить случайные погрешности измерений при засечке объекта под острыми углами, а также при фотографировании против Солнца [1–4].

Для получения параметров траектории ЛО необходима трудоемкая послеполетная обработка данных, зафиксированных на кинопленке. При этом траектория будет получена, если есть информация не менее чем от двух приборов. Но все это окупается высокой точностью как определения местоположения, так и параметров движения ЛО, скорости, ускорений по осям и взаимного положения двух физических тел.

В настоящей работе рассматривается задача обработки кинотеодолитных измерений. Исходными данными служат измеренные кинотеодолитами (КТ) дискретные значения угловых координат некоторой траектории ЛО в функции времени, координаты местоположения и характеристики точности КТ, параметры поправок к измерениям, координаты начала единой прямоугольной декартовой системы координат и дирекционный угол, определяющий ориентацию ее осей, а также единая шкала времени, на дискретно заданные значения которой осуществляется интерполяция и уравнивание кинотеодолитных измерений. Предполагается, что кинотеодолитная информация проверена на достоверность и грубых ошибок не содержит.

Основными конечными данными являются оценки прямоугольных координат некоторой траектории ЛО в функции полетного времени с заданным шагом дискретности.

Рассмотрены методы уравнивания угловых измерений по способу наименьших квадратов: метод уравнивания измерений отдельно в каждом временном сечении, предполагающий нулевое математическое ожидание случайных ошибок измерений, и метод уравнивания избыточных кинотеодолитных измерений с подавлением их постоянных систематических ошибок, применяемый в предположении засоренности измерений не только случайными, но и неизвестными по величине и знаку систематическими погрешностями. В случае расчетов по второму методу дополнительными конечными данными являются оценки систематических ошибок измерения азимутов и углов места каждым кинотеодолитом.

Алгоритм реализации задачи предусматривает следующие процедуры:

— пересчет координат местоположения кинотеодолитов из геодезической системы координат (ГСК) в заданную единую прямоугольную декартовую систему координат;

— редактирование кинотеодолитной (оптической) информации;

— расчет начального приближения линейных координат траектории ЛО (введение поправок);

— уравнивание избыточных кинотеодолитных измерений по способу наименьших квадратов с подавлением их систематических ошибок.

2. Пересчет координат местоположения кинотеодолитов из геодезической системы в местную систему координат

Принято [1–3] местной системой координат (МСК) называть декартовую прямоугольную правую систему, направление оси *OX* которой задано геодезиическим азимутом или дирекционным углом, а ось *OY* совпадает с внешней нормалью к эллипсоиду (или с отвесной линией в точке *O*, так как уклонением отвесных линий можно пренебречь).

Алгоритм пересчета координат точек стояния КТ из геодезической в МСК может быть реализован тремя процедурами.

1. Координаты некоторой точки, заданные в ГСК, пересчитываются в центральную земную систему координат (ЦСК) обращением к процедуре ЦСК (*B*, *L*, *H*, *X*, *Y*, *Z*), где *B* — геодезическая широта, рад; *L* — долгота точки, рад; *H* — высота точки над уровнем моря, м; *X*, *Y*, *Z* — координаты точки в ЦСК (выходные параметры процедуры), м.

2. Вычисляется матрица направляющих косинусов (МНК) преобразования координат из центральной земной системы координат в МСК обращением к процедуре МНК (*АЗ*, *B*, *L*, *A*), где *АЗ* — геодезический азимут оси *OX* местной системы координат, рад; *B* — геодезическая широта, рад; *L* — долгота начала местной системы координат, рад; *A* — матрица размерности 3×3 направляющих косинусов преобразования координат.

3. Производится пересчет координат из центральной в МСК обращением к процедуре МСК (*X*, *Y*, *Z*, *K*, *L*, *M*, *A*), где *X*, *Y*, *Z* — координаты точки в центральной земной системе координат, м; *K*, *L*, *M* — координаты начала МСК в центральной системе координат, м.

На практике принято задавать направление оси *OX* местной системы координат не геодезическим азимутом, а дирекционным углом. Поэтому в алгоритме предусмотрено вычисление геодезического азимута $\beta_г$ по следующей формуле:

$$\beta_г = \beta_д + \operatorname{arctg}\left[(L - L_0)\sin B\right], \tag{1}$$

где $\beta_д$ — дирекционный угол направления оси *OX*; *B*, *L* — широта и долгота начала МСК; L_0 — долгота осевого меридиана 6-градусной зоны.

Величина L_0 представлена константой Q_1, что в градусной мере соответствует G_1 град, то есть долготе осевого меридиана *j*-й зоны.

3. Редактирование кинотеодолитной информации

3.1. Задача редактирования

Информация в виде дискретных значений угловых координат в функции времени, получаемая в результате дешифрирования кинотеодолитных фильмов и сопровождающих их осциллограмм, не может быть непосредственно использована для расчета линейных координат траектории ЛО. Это вызвано следующими причинами: угловые координаты содержат систематические погрешности, которые должны быть устранены путем вычисления и введения соответствующих поправок; угловые координаты должны быть преобразованы из местной системы КТ в единую МСК; фильмы двух и более КТ, снятые с различной частотой или при одинаковой частоте съемки, не синхронны.

Редактирование информации включает следующие операции: перевод в Радианы информации, заданной в градусной мере; введение в массивы угловых координат поправок на ориентирование горизонтального лимба и место нуля вертикального лимба, на коллимационную ошибку и ошибку увода; преобразование угловых координат из местных систем КТ в единую МСК; устранение конечного разрыва в массивах азимутов при переходе через нуль; восстановление нормальной записи массивов времени, азимута и угла места в соответствии с расшифровкой условной записи времени; интерполяция измерений для заданных моментов времени.

3.2. Перевод из градусной меры в радианную

Среди исходных данных, представляемых в градусной мере, есть простые переменные и массивы. Предусмотрено две формы представления величин в градусной мере: в градусах, минутах и секундах; в градусах и минутах. Первая форма — для геодезической широты, долготы и азимута или дирекционного угла, вторая — для измеренных кинотеодолитом угловых координат и поправок к ним.

Значение простой переменной *X* в градусной мере, представленной по первой форме, переводится в радианы посредством обращения к процедуре-функции *X* := *РАД* (*X*). Если переменная *X* записана по второй форме, то следует обращаться к процедуре-функции *X* := *РАДМ* (*X*). Перевод массива чисел *X*[1:*П*] из градусной меры в радианную осуществляется путем обращения соответственно к процедурам *РАД* (*X*, *П*) или *РАД*1*М* (*X*, *П*).

3.3. Введение поправок

Измеренные кинотеодолитом углы места $(\bar{\varepsilon})$ исправляются в соответствии с величиной места нуля (МО), определенной по результатам съемки ориентиров (реперных знаков) при двух положениях вертикального круга:

$$\varepsilon_i = \bar{\varepsilon}_i + \Delta\varepsilon_{MO}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{2}$$

где $\Delta\varepsilon_{mo}$ = –МО; n — количество дискретных реализаций угла места.

В измеренные азимуты $(\bar{\beta})$ вводятся три поправки:

$$\beta_i = \bar{\beta}_i + \Delta\beta_{op} - \frac{c}{\cos\varepsilon_i} - \gamma tg\,\varepsilon_i,\ \ i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где $\Delta\beta_{op}$ — поправка на ориентирование горизонтального лимба; c — коллимационная ошибка; γ — ошибка увода — угол между горизонтальной осью вращения КТ и плоскостью, перпендикулярной вертикальной оси вращения КТ.

Введение поправок предусмотрено только для угловых координат, величина которых отлична от нуля.

3.4. Преобразование угловых координат в единую местную систему координат

Алгоритм преобразования угловых координат из одной МСК в другую реализуется следующими процедурами.

1. Матрица *A* направляющих косинусов осей МСК по отношению к осям центральной земной системы координат вычисляется обращением к процедуре МНКО (*AЗ*, *B*, *L*, *A*), где: *AЗ* — геодезический азимут оси *OX* местной системы кинотеодолита, рад; *B* — геодезическая широта, м; *L* — долгота точки стояния КТ, рад.

2. Элементы матрицы поворота осей (МПО) координат из старого положения в новое *M* положение вычисляются обращением к процедуре МПО (*C*, *H*, *M*), где *C* — матрица размерности 3×3, элементами которой являются направляющие косинусы осей МСК по отношению к центральной земной системе (вычисляется процедура МНКО), *H* — матрица направляющих косинусов осей центральной земной системы по отношению к единой местной системе координат (вычисляется процедура МНК).

3. Преобразования измеренных угловых координат (ПИУК) осуществляется обращением к процедуре ПИУК (*Г*, *В*, *Т*, *М*), где *Г* [1:*Т*] — массив азимутов (горизонтальных углов); *В* [1:*Т*] — массив углов места (вертикальных углов), измеренных кинотеодолитом, рад; *М* — матрица поворота осей координат.

3.5. Устранение разрыва в массиве азимута

Рабочий диапазон некоторых КТ по азимуту может включать нуль — пункт горизонтального лимба. В этом случае в таблице результатов измерения азимута неизбежно появление двух соседних отсчетов, один из которых принадлежит первой четверти круга, другой — четвертой. Иными словами, имеют место дискретные реализации функции $\beta(t)$ до и после точки конечного разрыва, равного 2π. Поскольку в алгоритме предусмотрена возможность интерполяции измерений, разрыв должен быть устранен. При этом возникает дополнительная задача: отличить разрыв функции в районе перехода через нуль от искусственно созданного разрыва за счет обнуления значений угловых координат в районах кратковременного пропуска (потери) информации.

Для устранения разрыва применяется следующий алгоритм. Абсолютные величины первых разностей массива азимута подвергаются проверке по критерию

$$\left|\beta_{i+1}-\beta_i\right\rangle 4_{рад,} \quad i=\overline{1,n}\,. \tag{4}$$

Если для некоторого $i = k$ выполняется неравенство (4) и при том $\left|\varepsilon_k\right\rangle 10^{-17}$ и $\left|\varepsilon_{k+1}\right\rangle 10^{-17}$, то это значит, что обнаружен разрыв. При $\beta_k\langle\beta_{k+1}$ разрыв устраняется прибавлением к каждому значению $\beta_j,\left(j=\overline{1,k}\right)$ величины 2π, если же $\beta_k\rangle\beta_{k+1}$, то из каждого значения β_j вычитается 2π, после чего проверка продолжается.

3.6. Восстановление массивов времени, азимута и угла места

Кинотеодолитные фильмы, полученные в одном сеансе измерений, могут отличаться по длительности регистрации траектории ЛО, количеству и длительности информационных потерь. Линейные координаты будут оцениваться только в тех точках, угловые координаты которых измерялись не менее чем с двух КТП. Таким образом, первая оцениваемая точка траектории определится вторым (по времени начала съемки ЛО) кинотеодолитным фильмом, а последняя точка — предпоследним (по времени окончания съемки) фильмом.

Кроме первого по времени начала и последнего по времени окончания съемки, все остальные фильмы полностью входят в этот интервал оценок линейных координат траектории, который наряду с частотой съемки служит основанием для задания длины массивов времени, азимута и угла места, полученных при дешифрировании каждого из этих остальных фильмов. При этом фактическая длина массивов из-за потерь информации (в начале, в середине и в конце съемки) может быть меньше заданной.

Кратковременные пропуски информации (до 15–20 кадров) условно заполняются в массивах азимута и угла места нулевыми значениями. Более продолжительные «сбои» игнорируются в этих массивах (последующий фрагмент угловых координат записывается непосредственно за предыдущим), но их интервалы отличаются условной записью в массиве времени t.

Поскольку частота кинотеодолитной съемки постоянна, то целесообразно вместо дискретных значений аргумента (времени) использовать условную запись, содержащую минимум необходимой информации. Если фильм не имеет существенных потерь информации, то условная запись аргумента состоит из пяти величин: t_n — время первой точки массивов азимутов и угла места, с; Δt — интервал дискретности аргумента, с; I — признак наличия измерений; t_k — время последней точки массивов азимута и угла места, с; $-I$ — признак окончания условной записи аргумента.

Участок «сбоя» информации, расположенной в начале или в середине фильма, отмечается в массиве времени четырьмя величинами: t_n — время первой точки, в которой нет информации, с; Δt — интервал дискретности аргумента, с; $-I$ — признак отсутствия измерений; t_k — время последней точки, в которой нет информации, с.

Если участок «сбоя» находится в конце фильма, то к четырем указанным величинам добавляется «*–I*» — признак окончания условной записи. Так, например, условная запись аргумента

$$\underline{t_{н1}, \Delta t_1, -1, t_{k1}}, \underline{t_{н2}, \Delta t_2, 1, t_{k2}}, \underline{t_{н3}, \Delta t_3, -1, t_{k3}, -1} \qquad (5)$$

означает, что существенные потери информации имеют место в начале и в конце фильма на временных интервалах $t_{н1} - t_{k1}$ и $t_{н3} - t_{k3}$, а пригодные к обработке измерения представлены фрагментом на интервале $t_{н2} - t_{k2}$.

Условная запись аргумента t служит ключом к выполнению следующих операций:

1) определения суммарной длины фрагментов массива азимута (угла места);

2) формирования массива t в нормальном виде (в виде дискретных значений времени);

3) формирования массивов азимута и угла места в соответствии с нормальной записью аргумента t (элементы массивов в точках потери информации обнуляются).

Первая операция необходима для того, чтобы осуществить перевод угловых координат из градусной меры в радианную и введение поправок. Последовательно по мере увеличения индекса j = 1,5,9, …, l ($l \le n$, n — длина массива t) и до тех пор, пока $t_j \rangle 0$, при каждом $t_{j+2} \rangle 0$ вычисляется длина i-го фрагмента информации

$$m_i = \frac{t_{j+3} - t_j}{t_{j+1}} + 1, \quad i = \overline{1,k}, \qquad (6)$$

а затем и суммарная длина всех фрагментов $q = \sum^{k} m_i$.

С учетом обозначений (5) выражение (6) обретает конкретный физический смысл:

$$m_i = \frac{t_k - t_н}{\Delta t} + 1.$$

Две другие операции выполняются по следующему алгоритму. Последовательно по мере уменьшения индекса j = l – 4, l – 8, …, 5, *I*, где l — индекс последнего числа условной записи аргумента (t_l = –1), по формуле (6) вычисляется длина каждого участка фильма, начиная с последнего, и определяются порядковые номера первого ($N_н$) и последнего ($N_к$) элементов каждого участка, которые они должны иметь при нормальной записи аргумента:

$$N_{нi} = n - \sum_i m_i + 1, \quad N_{кi} = N_{нi} + m_i - 1,$$

а также порядковые номера первого ($\overline{N}_н$) и последнего ($\overline{N}_к$) элементов каждого фрагмента, которые они имеют в исходной записи массивов азимута и угла места:

$$\overline{N}_{нi} = q - \sum_i \overline{m}_i + 1; \quad \overline{N}_{кi} = \overline{N}_{нi} + \overline{m}_i - 1,$$

где $\overline{m}_i$ — длина i-го фрагмента (участки «сбоев» не засчитываются).

Пригодные к обработке участки (фрагменты) отличаются от участков информационного «сбоя» по величине t_{j+2} (в первом случае t_{j+2} = 1, во втором — t_{j+2} = –1).

Формирование массива времени в нормальном виде начинается с присвоения его последнему элементу числового значения t_{l-1}, предпоследнему –($t_{l-1} - \Delta t$) и так далее с шагом Δt от конца к началу последнего участка. Затем подобным же образом заполняется предпоследний участок и т.д. до заполнения всего массива.

Формирование массивов азимута и угла места происходит путем пересылки числовых значений элементов каждого фрагмента, начиная с последнего, таким образом, чтобы порядковым номерам элементов в исходной записи $\overline{N}_н,...,\overline{N}_к$ соответствовали порядковые номера $N_н,...,N_к$ нормальной записи. При этом элементы массивов, соответствующие участкам «сбоев», заполняются нулевыми значениями.

В заключение отметим, что массив единого времени (МЕВ) — аргумент вычисляемых линейных координат траектории — также задается условной записью, состоящей из числовых значений следующих величин: $t_н, \Delta t_н, 0, t_k, -1$. Если для различных участков траектории выбран различный шаг дискретности таблицы по времени, то условная запись единого времени должна отразить это следующим образом:

$$t_{н1}, \Delta t_1, 0, t_{k1}, t_{н2}, \Delta t_2, 0, t_{k2}, ..., t_{нq}, \Delta t_q, 0, t_{kq}, -1, \tag{7}$$

где q — количество участков таблицы с различной дискретностью аргумента.

Формирование МЕВ по его условной записи осуществляется обращением к процедуре МЕВ (T, N, R*) , где T, N — массив единого времени, в котором до обращения к процедуре находится условная запись типа (7), а после работы процедуры — дискретные значения единого времени; R* — метка «ошибка в условной записи единого времени».

3.7. **Интерполяция измерений**

Потребность в интерполяции измерений возникает из-за несинхронности или различия в частотах съемки КТ одного и того же измерительного комплекса, в связи с чем моменты единого времени, в общем случае, являются промежуточными точками по отношению к узлам интерполяции — моментам регистрации угловых координат. Для определения значений угловых координат в промежуточных точках используется полином Лагранжа. Поскольку некоторые из дискретных значений функций искусственно обнулены (потеря информации), то в алгоритме предусмотрен анализ числовых значений функций в узлах с тем, чтобы предотвратить включение таких обнуленных значений в интервал интерполяции.

Алгоритм интерполяции измерений представлен в виде процедуры «сведения к единому времени» СЕВ (*X*, *Y*, *Z*, *П*, *XИ*, *YИ*, *ZИ*, *И*, *P*, *Ж*), где *X*[1:*П*] — массив значений аргумента, расположенных в возрастающем порядке (углы интерполяции); *Y*[1:*П*], *Z*[1:*П*] — массивы значений двух функций, соответствующих значениям аргумента *X*; *XИ*[1:*И*] — массив заданных значений аргумента, расположенных в возрастающем порядке (промежуточные точки); *YИ*[1:*И*], *ZИ*[1:*И*] — массивы значений двух функций в промежуточных точках (результат работы процедуры); *P* — степень интерполяционного полинома Лагранжа; *R* — метка, на которую передается управление, если при интерполяции аргумент выходит за пределы таблицы.

Процедура СЕВ пригодна для интерполяции двух любых таблично заданных функций, в том числе и при неравноотстоящих значениях аргумента.

4. Расчет начального приближения линейных координат траектории

Для уравнивания измерений по способу наименьших квадратов необходимо задать начальное приближение линейных координат траектории, которые уточняются итеративным способом в процессе уравнивания. В общем случае линии визирования одного и того же объекта несколькими КТ из-за ошибок измерения угловых координат не пересекаются. Для получения наиболее вероятных оценок линейных координат траектории необходимо найти такую точку в декартовой прямоугольной системе координат, взвешенная сумма квадратов расстояний до которой от линий визирования минимальна. Поскольку, приступая к уравниванию, мы не располагаем весами расстояний, сумма квадратов которых минимизируется, то на первом шаге приближений используется гипотеза равновесности. Этот первый шаг позволяет дать грубую оценку координат траектории, принимаемых за координаты начального приближения.

5. Уравнивание угловых измерений по способу наименьших квадратов

5.1. Решение в матричной форме задачи уравнивания угловых измерений с подавлением их систематических погрешностей

Вектор измерений *K* кинотеодолитов $/K \geq 3/$ в *T* точках траектории /*T*>>2/ обозначим

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ Q_T \end{bmatrix}, \quad Q_j = \begin{bmatrix} q_{1j} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ q_{2kj} \end{bmatrix}.$$

Кроме того, используем обозначения:

$$C=\begin{bmatrix} C_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ C_{2k} \end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix} M_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ M_T \end{bmatrix},\ M_j=\begin{bmatrix} \mu_{1j} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \mu_{2kj} \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} X_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ X_T \end{bmatrix},\ X_j=\begin{bmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix},\ P=\begin{vmatrix} P_{i1} & & & 0 \\ & \bullet & & \\ & & \bullet & \\ & & & \bullet \\ 0 & & & P_{iT} \end{vmatrix},$$

$$P_{ij}=\begin{vmatrix} P_{q1} & & & 0 \\ & \bullet & & \\ & & \bullet & \\ & & & \bullet \\ 0 & & & P_{q2k} \end{vmatrix},\ P_{qi}=\frac{\sigma_i^2}{\sigma_{qi}^2},$$

в которых символы имеют следующий смысл: C — вектор постоянных систематических ошибок измерений; M — вектор случайных нормальных ошибок с нулевым средним; X_j — вектор координат j-й точки измеряемой траектории; P_{ij} — матрица весов.

Вектор результатов измерений Q представим суммой истинного значения $Q_0=Q(X_0)$, систематической и случайной ошибок:

$$Q=Q_0+C+M\ . \tag{8}$$

В число оцениваемых параметров наряду с координатами включим ошибки измерений. В связи с этим введем в рассмотрение расширенный вектор неизвестных

$$\overline{X}=\begin{bmatrix} X_1 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ X_T \\ C \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Преобразуем уравнение (8) с учетом (9) в систему условных уравнений:

$$Q(\overline{X}_0)-Q=-M\ . \tag{10}$$

Уравнения системы (10) трансцендентные и, в общем случае, неравноточные. Предположение о малости ошибок позволяет линеаризовать условные уравнения:

$$Q\left(\overline{X}_N\right)+\left(\frac{\partial Q}{\partial \overline{X}}\right)_{Q=Q_N}\cdot\Delta\overline{X}_N-Q=-M\ . \qquad (11)$$

В уравнениях (11) матрица частных производных вектора измеряемых значений по оцениваемым параметрам $\left(\frac{\partial Q}{\partial \overline{X}}\right)_{Q=Q_N}=Д$ имеет следующую блочную структуру:

$$Д\ =\left[\begin{array}{cccc|c} Д_{X1} & & & 0 & Д_{C1} \\ \bullet & & & & \bullet \\ & \bullet & & & \bullet \\ & & \bullet & & \bullet \\ 0 & & & Д_{XT} & Д_{CT} \end{array}\right],\quad Д_{Xj}=\begin{bmatrix} \frac{\partial q1j}{\partial xj} & \frac{\partial q1j}{\partial yj} & \frac{\partial q1j}{\partial zj} \\ \bullet\bullet & \bullet\bullet & \bullet\bullet \\ \frac{\partial q2kj}{\partial xj} & \bullet\bullet\bullet & \frac{\partial q2kj}{\partial zj} \end{bmatrix},\quad Д_{Cj}=\begin{bmatrix} \frac{\partial q1j}{\partial C1} & \bullet\ \bullet\ \bullet & \frac{\partial q1j}{\partial C2k} \\ \bullet\bullet\bullet & \bullet\bullet\bullet & \bullet\bullet\bullet \\ \frac{\partial q2kj}{\partial C1} & \bullet\ \bullet\ \bullet & \frac{\partial q2kj}{\partial C2k} \end{bmatrix},$$

и при любой размерности элементы ее вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial\beta_{ij}}{\partial x_j}=-\frac{z_{ij}}{d_{ij}^2},\ \frac{\partial\beta_{ij}}{\partial y_j}=0,\ \frac{\partial\beta_{ij}}{\partial z_j}=\frac{x_{ij}}{d_{ij}^2},\ \frac{\partial\beta_{ij}}{\partial z_{opi}}=-\frac{d}{d_{opi}^2},\ \frac{\partial\beta_{ij}}{\partial y_{opi}}=0,\ \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial x_j}=-\frac{x_{ij}y_{ij}}{d_{ij}D_{ij}^2},$$

$$\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial y_j}=\frac{d_{ij}}{D_{ij}^2},\ \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial z_j}=-\frac{y_{ij}z_{ij}}{d_{ij}D_{ij}^2},\ \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial z_{opi}}=\frac{\Delta y_{opi}\Delta z_{opi}}{d_{opi}D_{opi}^2},\ \frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial y_{opi}}=-\frac{d_{opi}}{D_{opi}^2},$$

где $\beta_{ij},\varepsilon_{ij}$ — азимут и угол места j-й точки траектории, измеренные i-м кинотеодолитом; $x_{ij}=x_j-x_i, y_{ij}=y_j-y_i, z_{ij}=z_j-z_i$ — координаты j-й точки траектории после параллельного переноса системы координат в точку стояния i-го КТ; $\Delta y_{opi},\Delta z_{opi}$ — линейные аналоги угловых ошибок ориентирования вертикального и горизонтального лимбов i-го КТ по фиктивному ориентиру, расположенному на оси Xi на расстоянии d от КТ

$$d_{ij}^2=x_{ij}^2+z_{ij}^2,\ \ D_{ij}^2=d_{ij}^2+y_{ij}^2,\ \ d_{opi}^2=d^2+\Delta z_{opi}^2,\ \ D_{opi}^2=d_{opi}^2+\Delta y_{opi}^2.$$

Система уравнений (11) решается относительно вектора поправок $\Delta\overline{X}_N$ к некоторому приближению вектора оцениваемых параметров $\overline{X}_N$ под условием минимума диагональной квадратичной формы

$$M^T PM\ =\min. \qquad (12)$$

Для выполнения условия (12) необходимо, чтобы все $m = 3T + 2K$ частных производных от $M^T PM$ по $\Delta\overline{X}$ равнялись нулю:

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \overline{X}}\left(M^T PM\right) = 0\,,$$

откуда и получим систему нормальных линейных уравнений

$$A\Delta\overline{X}_N = B\,, \tag{13}$$

где $A = Д^T РД$, $B = ДР(Q - Q_N)$.

Оценка вектора $\overline{X}_N$ уточняется на каждом шаге решения системы уравнений (13) относительно $\Delta\overline{X}_N$ по алгоритму:

$$\Delta\overline{X}_N = A^{-1}B,\ \overline{X}_{N+1} = \overline{X}_N + \Delta\overline{X}_N\,,\ N = 0{,}1{,}2... \tag{14}$$

до вхождения в заданную ε-окрестность. На последнем k-м шаге производится оценка точности определения вектора $\overline{X}_K$, для которого выражение

$$\frac{1}{n-m} M^T P\ M\ \ A^{-1} \approx \sigma^2 A^{-1}$$

имеет смысл матрицы вторых моментов:

$$\sigma_{\{\overline{X}\}_S} = \sigma_0 \sqrt{\left\{A^{-1}\right\}_{SS}} \approx \sqrt{\frac{M^T PM}{n-m}} \cdot \sqrt{\left\{A^{-1}\right\}_{SS}},\ s = \overline{1,m}\,. \tag{15}$$

5.2. **Алгоритм уравнивания измерений с подавлением систематических погрешностей**

Заведомо не равные нулю элементы матриц A_{mm} и B_{m1} системы (13) вычисляются по следующим формулам:

$$a_{pp} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{z_{ij}^2}{d_{ij}^4} p_{\beta i} + \frac{x_{ij}^2 y_{ij}^2}{D_{ij}^4 d_{ij}^2} p_{\varepsilon i}\right), \quad a_{qq} = \sum_{i=1}^{k} \frac{d_{ij}^2}{D_{ij}^4} p_{\varepsilon i}\,,$$

$$a_{rr} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{x_{ij}^2}{d_{ij}^4} p_{\beta i} + \frac{y_{ij}^2 z_{ij}^2}{D_{ij}^4 d_{ij}^2} p_{\varepsilon i}\right), \quad a_{pq} = -\sum_{i=1}^{k} \frac{x_{ij} y_{ij}}{D_{ij}^4} p_{\varepsilon i}\,;$$

$$a_{pr} = \sum_{i=1}^{k}\left(-\frac{x_{ij} z_{ij}}{d_{ij}^4} p_{\beta i} + \frac{x_{ij} y_{ij}^2 z_{ij}}{D_{ij}^4 d_{ij}^2} p_{\varepsilon i}\right), \quad a_{qr} = -\sum_{i=1}^{k} \frac{y_{ij} z_{ij}}{D_{ij}^4} p_{\varepsilon i}\,,$$

$$a_{ps}=\frac{z_{ij}d}{d_{ij}^2 d_{opi}^2}p_{\beta i}-\frac{x_{ij}y_{ij}\Delta y_{opi}\Delta z_{opi}}{D_{ij}^2 d_{ij}D_{opi}^2 d_{opi}}p_{\varepsilon i},\quad a_{qs}=\frac{d_{ij}\Delta y_{opi}\Delta z_{opi}}{D_{ij}^2 D_{opi}^2 d_{opi}}p_{\varepsilon i},$$

$$a_{rs}=-\frac{x_{ij}d}{d_{ij}^2 d_{opi}^2}p_{\beta i}-\frac{y_{ij}z_{ij}\Delta y_{opi}\Delta z_{opi}}{D_{ij}^2 d_{ij}D_{opi}^2 d_{opi}}p_{\varepsilon i},\quad a_{pu}=\frac{x_{ij}y_{ij}d_{opi}}{D_{ij}^2 d_{ij}D_{opi}^2}p_{\varepsilon i},$$

$$a_{qu}=-\frac{d_{ij}d_{opi}}{D_{ij}^2 D_{opi}^2}p_{\varepsilon i},\quad a_{ru}=\frac{y_{ij}z_{ij}d_{opi}}{D_{ij}^2 d_{ij}D_{opi}^2}p_{\varepsilon i}, \tag{16}$$

$$a_{ss}=\sum_{j=1}^{T}\left(\frac{d^2}{d_{opi}^4}p_{\beta i}+\frac{\Delta y_{opi}^2\Delta z_{opi}^2}{D_{opi}^4 d_{opi}^2}p_{\varepsilon i}\right),\quad a_{uu}=\sum_{j=1}^{T}\frac{d_{opi}^2}{D_{opi}^4}p_{\varepsilon i},$$

$$a_{su}=-\sum_{j=1}^{T}\frac{\Delta y_{opi}\Delta z_{opi}}{D_{opi}^4}p_{\varepsilon i},$$

$$a_{qp}=a_{pq},\quad a_{rp}=a_{pr},\quad a_{rq}=a_{qr},$$

$$a_{sp}=a_{ps},\quad a_{sq}=a_{qs},\quad a_{sr}=a_{rs},$$

$$a_{up}=a_{pu},\quad a_{uq}=a_{qu},\quad a_{ur}=a_{ru},$$

$$a_{us}=a_{su},\quad s=3T+i,\quad u=3T+K+i,$$

$$b_p=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{z_{ij}}{d_{ij}^2}H_{\beta ij}p_{\beta i}+\frac{x_{ij}y_{ij}}{D_{ij}^2 d_{ij}}H_{\varepsilon ij}p_{\varepsilon i}\right),\quad b_q=-\sum_{i=1}^{k}\frac{d_{ij}}{D_{ij}^2}H_{\varepsilon ij}p_{\varepsilon i},$$

$$b_r=\sum_{i=1}^{k}\left(-\frac{x_{ij}}{d_{ij}^2}H_{\beta ij}p_{\beta i}+\frac{y_{ij}z_{ij}}{D_{ij}^2 d_{ij}}H_{\varepsilon ij}p_{\varepsilon i}\right),$$

$$b_s=\sum_{j=1}^{T}\left(\frac{d}{d_{opi}^2}H_{\beta ij}p_{\beta i}-\frac{\Delta y_{opi}\Delta z_{opi}}{D_{opi}^2 d_{opi}}H_{\varepsilon ij}p_{\varepsilon i}\right),\quad b_u=\sum_{j=1}^{T}\frac{d_{opi}}{D_{opi}^2}H_{\varepsilon ij}p_{\varepsilon i},$$

где $x_{ij}=x_j^{(n)}-x_i$; $y_{ij}=y_j^{(n)}-y_i$; $z_{ij}=z_j^{(n)}-z_i$; $d_{ij}^2=x_{ij}^2+z_{ij}^2$; $D_{ij}^2=d_{ij}^2+y_{ij}^2$; $\Delta y_{opi}=y_{opi}-y_i$; $\Delta z_{opi}=z_{opi}-z_i$; $d_{opi}^2=d^2+\Delta z_{opi}^2$; $D_{opi}^2=d_{opi}^2+\Delta y_{opi}^2$; $p_{\beta i}=\dfrac{1}{\sigma_{\beta i}^2}$;

$p_{\beta i}=\dfrac{1}{\sigma_{\beta i}^2}$; $H_{\beta ij}=\operatorname{arctg}\dfrac{z_{ij}}{x_{ij}}-\operatorname{arctg}\dfrac{\Delta z_{opi}}{d}-\beta_{ij}$; $H_{\varepsilon ij}=\operatorname{arctg}\dfrac{y_{ij}}{d_{ij}}-\operatorname{arctg}\dfrac{\Delta y_{opi}}{d_{opi}}-\varepsilon_{ij}$;
$i=\overline{1,K};\ j=\overline{1,T}$.

Для вычисления невязок $H_{\beta ij}$ и $H_{\varepsilon ij}$ (формулы (16)) используется процедура ВН (*K*, *L*, *M*, *X*, *Y*, *Z*, *Г*, *В*), где *X*, *Y*, *Z* — координаты точки «*a*» в прямоугольной правой системе, м; *K*, *L*, *M* — координаты точки «*b*» в той же системе, м; *В* — угловые координаты (азимут и угол места) точки «*a*», измеряемые из точки «*b*», рад.

Коэффициенты системы уравнений, полученной в результате последовательного исключения из (13) неизвестных поправок к координатам траектории, то есть системы $\overline{G}_{ll} \cdot \Omega_{l1} = \overline{B}_{l1}$, в которой Ω_{l1} — вектор неизвестных поправок к линейным аналогам систематических ошибок угловых координат (l = 2K), вычисляются по следующим формулам:

$$\overline{q}_{ui} = a_{wv} - \sum_{j=1}^{T} \Big[a_{pv} \big(a_{pw} A_{pp} + a_{qw} A_{pq} + a_{rw} A_{pr} \big) + a_{qw} \big(a_{pw} A_{pp} + a_{qw} A_{pq} + a_{rv} A_{pr} \big) + \\ + a_{rw} \big(a_{pw} A_{pp} + a_{qw} A_{pq} + a_{rv} A_{pr} \big) \Big],$$

$$\overline{b}_{u} = b_{w} - \sum_{j=1}^{T} \Big[a_{pw} \big(b_{p} A_{pp} + b_{q} A_{pq} + b_{r} A_{pr} \big) + a_{qw} \big(b_{p} A_{pq} + b_{q} A_{qq} + b_{r} A_{qr} \big) + \\ + a_{rw} \big(b_{p} A_{pr} + b_{q} A_{qr} + b_{r} A_{rr} \big) \Big], \\ (w = 3T + u,\ v = 3T + i,\ i = \overline{1,2K}, u = \overline{1,2K},\ j = \overline{1,T}), \tag{17}$$

где A_{pp}, A_{pq}, A_{pr},…, A_{rr} — элементы подвергнутого обращению j-го диагонального подблока квазидиагонального блока матрицы A системы (13).

Решение системы $\overline{G}_{ll} \cdot \Omega_{l1} = \overline{B}_{l1}$ производится матричным способом:

$$\Omega_{l1} = \overline{G}_{ll}^{-1} \overline{B}_{l1}. \tag{18}$$

Поправки к значениям систематических ошибок, найденные в результате решения системы (18), исключаются из 3T первых уравнений системы (13). В результате исключения поправок к систематическим ошибкам система (13) распадается на T систем третьего порядка, решаемых способом определителей; координаты траектории уточняются очередными поправками. Значимость поправок проверяется на каждом шаге последовательных приближений, итерации прекращаются, если все поправки становятся по абсолютной величине меньше заданного положительного числа.

5.3. Уравнивание угловых измерений в предположении отсутствия систематических погрешностей

Если в векторе неизвестных (9) положить C = 0, то задача сводится к уравниванию измерений отдельно в каждом сечении, и вместо системы уравнений (13) будем иметь T систем линейных уравнений третьего порядка. При этом часть вычислений, предусмотренных в алгоритме 5.2, опускается.

5.4. Алгоритм оценки элементов корреляционной матрицы ошибок

В подразделе 5.1 было показано, что для оценки точности определения неизвестных системы уравнений (13) используются диагональные элементы матрицы A^{-1} и взвешенная сумма квадратов невязок (12). Оценки средних квадратических отклонений координат и систематических ошибок измерений вычисляются по формуле (15). Диагональные элементы матрицы A^{-1} могут быть вычислены без обращения матрицы A [5].

Последние $2K$ диагональных элементов матрицы A^{-1} вычисляются в процессе решения (18), обозначим их $\tilde{c}_{ll}$, то есть как диагональные элементы матрицы $\overline{G}_{ll}^{-1}$.

Вычисление первых 3Т диагональных элементов матрицы A^{-1} производится по формулам:

$$\left(A_{mm}^{-1}\right)_{pp} = A_{pp} + \sum_{i=1}^{2k} v_{pi} z_{pi}, \quad \left(A_{mm}^{-1}\right)_{qq} = A_{qq} + \sum_{i=1}^{2k} v_{qi} z_{qi}, \quad \left(A_{mm}^{-1}\right)_{rr} = A_{rr} + \sum_{i=1}^{2k} v_{ri} z_{ri},$$

где

$$v_{pu} = \sum_{i=1}^{2k} z_{pi} \tilde{c}_{iu}, \quad v_{qu} = \sum_{i=1}^{2k} z_{qi} \tilde{c}_{iu}, \quad v_{ru} = \sum_{i=1}^{2k} z_{ri} \tilde{c}_{iu}, \quad u = \overline{1,2K}, \tag{19}$$

$$z_{pi} = A_{pp} a_{pv} + A_{pq} a_{qv} + A_{pr} a_{rv},$$
$$z_{qi} = A_{pq} a_{pv} + A_{qq} a_{qv} + A_{qr} a_{rv},$$
$$z_{ri} = A_{pr} a_{pv} + A_{qr} a_{qv} + A_{rr} a_{rv}.$$

Для вычисления невязок условных уравнений в их окончательном виде используется описанная ранее в подразделе 5.2 процедура ВН.

1. Внешняя баллистика: Учебник для студентов втузов / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лысенко, С.С. Богодистов. — М.: Машиностроение, 1991. — 640 с.

2. *Акимов А.И., Берестов Л.М., Михеев Р.А.* Летные испытания вертолетов. — М.: Машиностроение, 1980. — 400 с.

3. *Плотников В.С.* Геодезические приборы. — М.: Недра, 1987. — 396 с.

4. Справочник геодезиста: В 2 кн. / Под ред. В.Д. Большакова и Г.П. Левчука. — М.: Недра, 1975. — 1056 с.

5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Физматгиз, 1968. — 720 с.

Поступила в редакцию 19.11.2004