УДК 621.301

О. В. Брягин[1], **А. К. Егоров**[2], **Г. Н. Розоринов**[2]
[1]Министерство внутренних дел Украины
ул. Богомольца, 10, 01024 Киев, Украина
[2]Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»
проспект Победы, 37, 03056 Киев, Украина

Определение степени независимости отсчетов случайных процессов

Предложен критерий оценки степени независимости отсчетов произвольных случайных процессов, основанный на анализе их многомерных функций распределения вероятностей. Разработана структурная схема устройства для определения независимости отсчетов. Приведены результаты экспериментальной оценки степени независимости отсчетов произвольно распределенных случайных процессов.

Ключевые слова: *случайные процессы, функция распределения вероятностей, многомерные функции, усреднение, коэффициент независимости.*

Введение

Часто выдвигаемое и широко используемое в различных областях науки и техники предположение о независимости отсчетов случайного процесса является следствием возникающих трудностей измерения и анализа многомерных функций распределения вероятностей произвольно распределенных случайных процессов. В то же время уверенность в том, что отсчеты исследуемых случайных процессов независимы, позволяет существенно облегчить решение таких сложных и важных задач как, например, проверка статистических гипотез о параметрах этих процессов. В настоящей статье предлагается принцип определения степени независимости отсчетов произвольных случайных процессов, оценивается порядок и интервал их независимости, которые могут быть использованы при решении большого круга научно-технических задач.

Известно, что для независимых случайных величин или событий их многомерная функция распределения вероятностей равна произведению соответствующих одномерных функций распределения вероятностей [1, 2], то есть

$$F\{x_1,t_1;x_2,t_2;\ldots;x_n,t_n\}=\prod_{i=1}^{n}F\{x_i,t_i\}, \qquad (1)$$

где $F\{x_1,t_1;x_2,t_2;\ldots;x_n,t_n\}=P\{x(t_1)\le x_1, x(t_2)\le x_2,\ldots,x(t_n)\le x_n\}$ — n-мерная функция распределения вероятностей отсчетов $x(t_1),x(t_2),\ldots,x(t_n)$ случайного процесса $x(t)$; $F\{x_i,t_i\}=P\{x(t_i)\le x_i\}$, $i=\overline{1,n}$ — соответствующие одномерные функции распределения вероятностей.

В частности, из (1) следует, что, измерив n-мерную функцию распределения вероятностей для отсчетов $x(t_1),x(t_2),\ldots,x(t_n)$ случайного процесса $x(t)$ и сравнив результат измерения с произведением результатов измерений соответствующих одномерных функций распределения вероятностей для этих же отсчетов, можно определить степень их независимости.

Критерий и коэффициент независимости отсчетов

Равенство (1) дает достаточную свободу в выборе критерия независимости отсчетов случайного процесса, однако, из практических соображений целесообразно использовать относительный критерий

$$C_R^n(t)=\frac{F\{x_1,t-\tau_1;\,x_2,t-\tau_2;\,\ldots;x_n,t-\tau_n\}}{\prod_{i=1}^{n}F\{x_i,t-\tau_i\}}. \qquad (2)$$

Относительный критерий представляет собой отношение правдоподобия для случая проверки гипотезы, заключающейся в том, что отсчеты $x(t-\tau_i),\, i=\overline{1,n}$ случайного процесса $x(t)$ — ***зависимы*** против простой альтернативы, что отсчеты $x(t-\tau_i),\, i=\overline{1,n}$ — ***независимы*** [4]. Величину $C_R^n(t)$ в дальнейшем будем называть коэффициентом независимости. Таким образом, задача определения независимости отсчетов случайного процесса сводится к измерению коэффициента независимости и проверке выполнения условия:

$$C_R^{n*}(t)=\frac{F^{n*}\{x_1,t-\tau_1;\,x_2,t-\tau_2;\,\ldots;x_n,t-\tau_n\}}{\prod_{i=1}^{n}F^{*}\{x_i,t-\tau_i\}}\ge C_0, \qquad (3)$$

где $C_R^{n*}(t)$ — оценка коэффициента независимости $F^{n*}(x_1,t-\tau_1;\,x_2,t-\tau_2;\ldots;x_n,t-\tau_n)$; — оценка n-мерной функции распределения вероятностей случайного процесса; $F^*(x_i,t-\tau_i)$, $i=\overline{1,n}$ — оценки одномерных функций распределения вероятностей; C_0 — порог, определяемый правилом принятия решения.

Оценка коэффициента независимости отсчетов

В основу структуры устройства для оценки коэффициента независимости отсчетов случайных процессов положено видоизмененное устройство для измерения многомерных функций распределения вероятностей [3]. Структурная схема этого устройства показана на рис. 1.

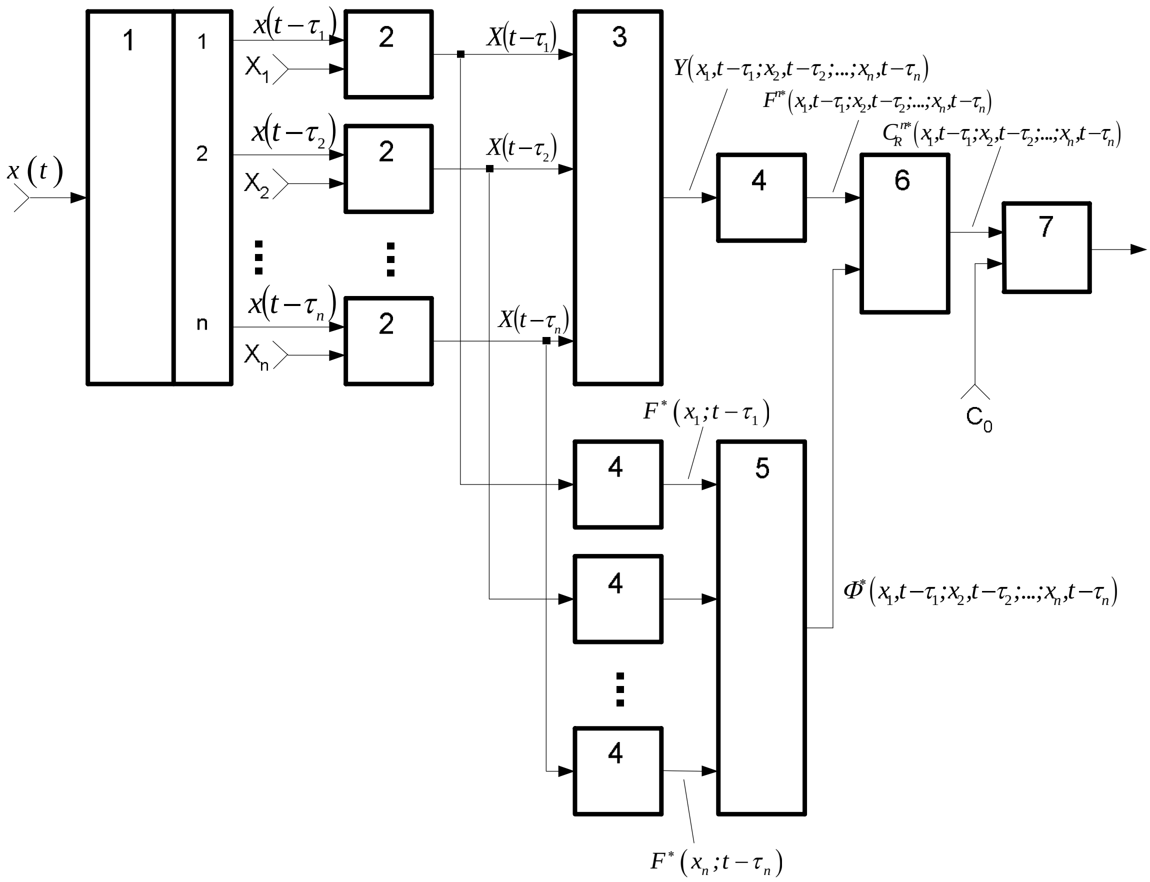

Рис. 1. Структурная схема устройства для оценки коэффициента независимости отсчетов

Исследуемый случайный процесс $x(t)$ подается на вход элемента задержки 1 с n выходами. Задержанные на разное время процессы $x(t-\tau_i)$, $i=\overline{1,n}$ квантуются по уровню с помощью пороговых элементов 2 в соответствии с правилом

$$X(t-\tau_i)=\begin{cases}1 & при \quad x(t-\tau_i)\le x_i \\ 0 & при \quad x(t-\tau i)>x_i\end{cases}, \quad i=\overline{1,n}, \tag{4}$$

после чего поступают на n-входовый элемент ИЗ и на n t-текущих интеграторов 4. Принцип работы t-текущего интегратора описан, например в [5]. Интеграторы формируют оценки $F^*(x_i,t-\tau_i)$, $i=\overline{1,n}$ процессов $x(t-\tau_i)$, $i=\overline{1,n}$. Полученные оценки $F^*(x_i, t-\tau_i)$, $i=\overline{1,n}$ подаются на вход n-входового перемножителя 5, отклик которого

$$\Phi^{n*}\left(x_1, t-\tau_1;\, x_2, t-\tau_2;\, \ldots;\, x_n, t-\tau_n\right) = \prod_{i=1}^{n} F^*(x_i, t-\tau_i) \qquad (5)$$

поступает на один из входов делителя 6. В свою очередь, процесс, вырабатываемый на выходе элемента ИЗ

$$Y^n(x_1, t-\tau_1;\, x_2, t-\tau_2;\, \ldots;\, x_n, t-\tau_n) = \bigcap_{i=1}^{n} X(x_i, t-\tau_i) \qquad (6)$$

также обрабатывается t-текущим интегратором 4, вследствие чего формируется оценка $F^{n*}\left(x_1, t-\tau_1;\, x_2, t-\tau_2;\, \ldots;\, x_n, t-\tau_n\right)$ для тех же задержанных процессов $x(t-\tau_i)$, $i=\overline{1,n}$. Сформированная таким образом оценка n-мерной функции подается на другой вход делителя 6. На выходе делителя 6 вырабатывается сигнал, величина которого отображает оценку коэффициента независимости отсчетов $x(t-\tau_i)$, $i=\overline{1,n}$ исследуемого процесса $x(t)$. По результату сравнения полученной оценки коэффициента независимости отсчетов с пороговым значением C_0 на пороговом элементе 7 принимается решение о степени независимости отсчетов.

На рис. 2 показаны экспериментальные результаты оценки коэффициента независимости отсчетов

$$C_R^{n*}(t) = \frac{F^{n*}\left\{x_1, t-\tau_1;\, x_2, t-\tau_2;\, \ldots;\, x_n, t-\tau_n\right\}}{\prod_{i=1}^{n} F^*\left\{x_i, t-\tau_i\right\}} \qquad (7)$$

как функции времени.

Для формирования ***зависимых*** отсчетов использовался итерационный алгоритм вида

$$X(k\Delta t) = X_0(k\Delta t) + K \cdot X((k-1)\Delta t),\; k = 1, 2, \ldots, \qquad (8)$$

где $X_0(k\Delta t)$, $k=1, 2, \ldots$ — последовательность независимых случайных отсчетов; K — коэффициент статистической связи между отсчетами.

При проведении эксперимента по оценке коэффициентов независимости отсчетов были приняты следующие значения параметров измерительного тракта:

— мерность измеряемой функции распределения вероятностей: $n = 7$;

— значения аргументов: $x_1 = x_2 = \ldots = x_7 = 0{,}4$;

— относительные задержки: $\tau_i = (i-1)\Delta\tau$, $i=\overline{1,7}$;

— постоянная интегрирования (накопления): $N = 40000$.

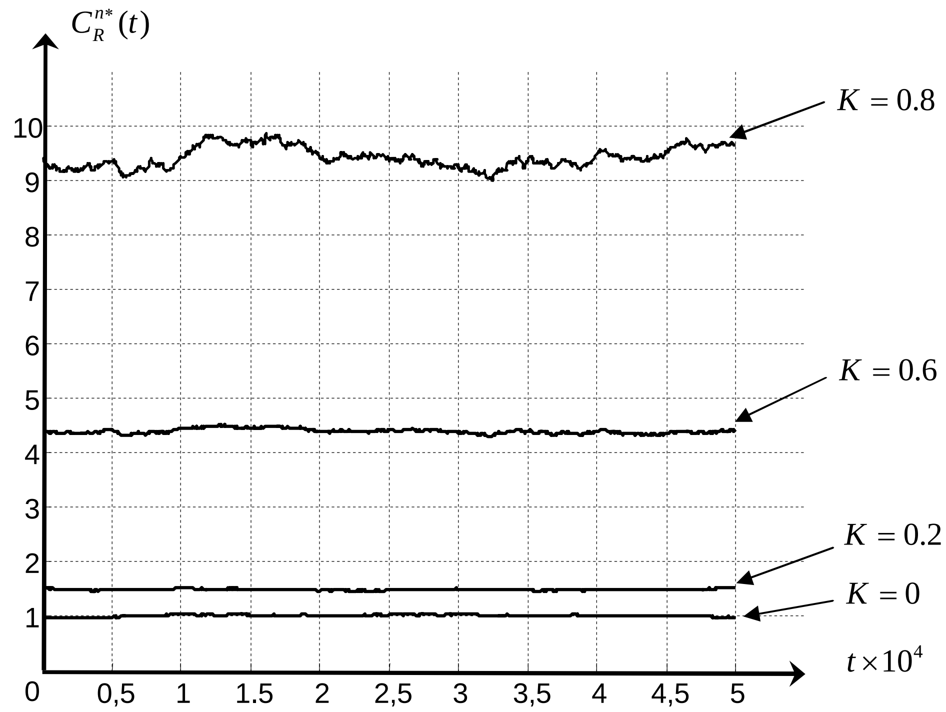

Рис. 2. Экспериментальные значения коэффициента независимости отсчетов случайного процесса при разных значениях коэффициента статистической связи между отсчетами

Учитывая, что при проведении эксперимента время полагалось безразмерным, для параметра $\Delta\tau$ было принято значение $\Delta\tau = 1$.

Из приведенных на рис. 2 результатов оценки коэффициента независимости $C_R^n(t)$ с очевидностью следует, что использованный в работе относительный критерий независимости отсчетов случайного процесса и принцип оценки коэффициента независимости достаточно эффективны и могут быть рекомендованы для практического применения.

Достоверность оценки коэффициента независимости отсчетов

Учитывая, что коэффициент независимости отсчетов $C_R^n(t)$ совпадает с отношением правдоподобия, результаты его оценки, являющиеся случайными величинами, приводят к следующим четырем возможным событиям:

— отсчеты независимы, и принимается решение об их независимости;

— отсчеты независимы, но принимается решение о том, что они зависимы;

— отсчеты зависимы, и принимается решение о том, что они зависимы;

— отсчеты зависимы, но принимается решение о том, что они независимы.

Каждое из этих событий в соответствии с теорией статистических решений характеризуется соответствующими вероятностями осуществления [4]. Очевидно, что эти вероятности определяются как свойствами самих отсчетов случайного процесса, так и параметрами устройства, измеряющего коэффициент независимости, в частности величинами x_i, $i = \overline{1,n}$ и постоянной интегрирования (накопления) N. При этом возможно принятие как правильного решения:

— отсчеты независимы, и принимается решение об их независимости;

— отсчеты зависимы и принимается решение о том, что они зависимы;

так и одного из двух ошибочных решений:

— отсчеты случайного процесса зависимы, но принимается решение о том, что они независимы;

— отсчеты независимы, но принимается решение об их зависимости.

Далее эти ошибки будем называть ошибками первого и второго рода, а их вероятности обозначать P_1 и P_2 соответственно.

Для выявления влияния на принятие решения о независимости или зависимости отсчетов случайного процесса, например, величины постоянной интегрирования (накопления) N, были проведены несколько серий экспериментов по оценке коэффициента независимости для статистически слабо связанных отсчетов случайного процесса при $n = 7$, $x_1 = x_2 = \ldots = x_7 = 0{,}4$ и $\Delta\tau = 1$. Результаты этих экспериментов для $N = 10000$ и $N = 40000$ показаны на рис. 3, 4.

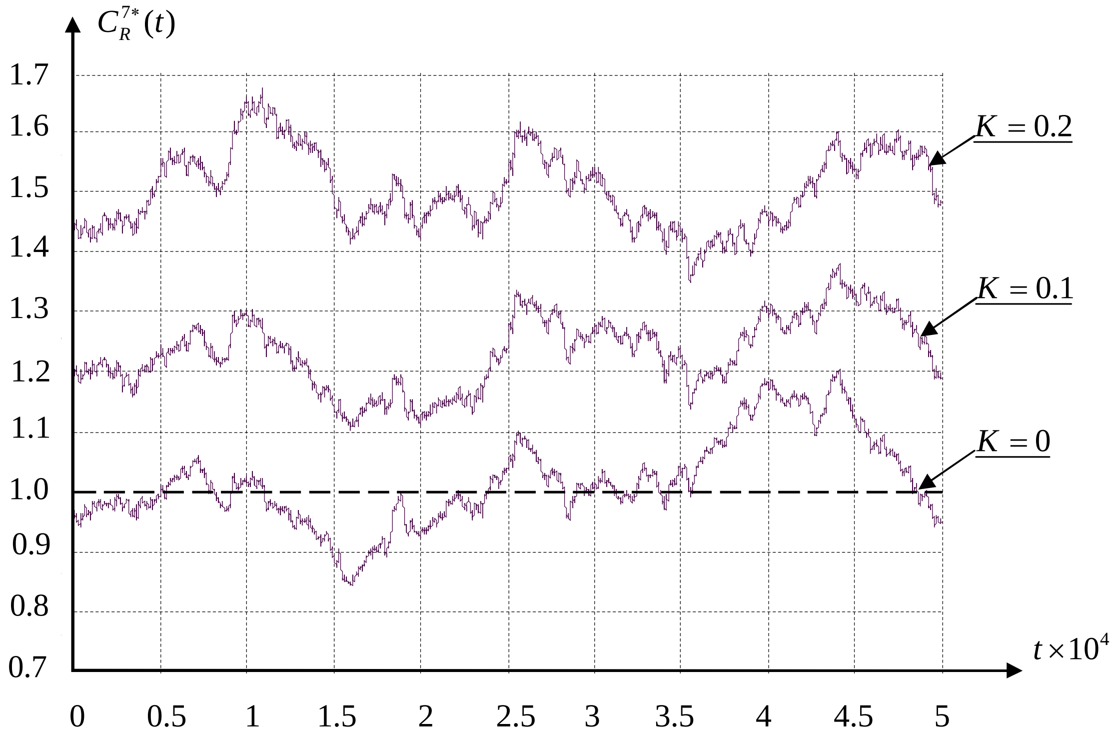

Рис. 3. Экспериментальные значения коэффициента независимости отсчетов при малых значениях коэффициента статистической связи K и N = 10000

Из полученных данных видно, что при $C_0 = 1{,}1$ и $N = 40000$ для $K = 0$ (независимые отсчеты) и для $K = 0{,}1$ вероятности $P_1 = P_2 = 0$. В то же время при $C_0 = 1{,}1$ и $N = 10000$ для $K = 0$ вероятность $P_1 = 0{,}158$, а для $K = 0{,}1$ вероятность $P_2 = 0$. При значениях $C_0 = 1{,}15$ и $N = 10000$ для $K = 0$ вероятность $P_1 = 0{,}078$, а для $K = 0{,}1$ вероятность $P_2 = 0{,}108$. Таким образом, выбор значения порога $x_i, i = \overline{1,n}$ существенно влияет на вероятности ошибок при принятии решения о независимости отсчетов случайного процесса.

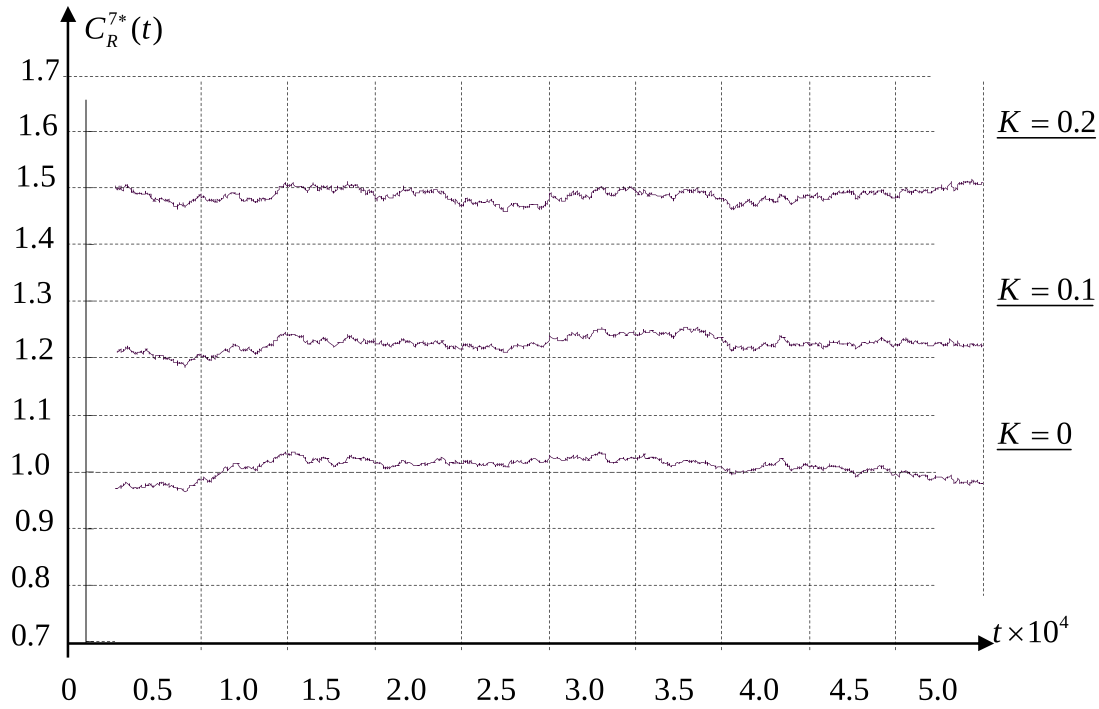

Рис. 4. Экспериментальные значения коэффициента независимости отсчетов при малых значениях коэффициента статистической связи *K* и *N* = 40000

Необходимо отметить, что выбор значения порога C_0 для принятия решения, и оценка влияния на вероятности ошибок первого и второго рода параметров устройства измерения коэффициента независимости весьма сложны, вследствие чего им будет посвящена отдельная статья.

Порядок и интервал независимости отсчетов

Под порядком независимости отсчетов случайного процесса будем понимать мерность n измеряемой многомерной функции распределения вероятностей, а под интервалом независимости — интервал времени Δt_n, при котором измеряемое значение коэффициента независимости $C_R^n(t)$ меньше порогового значения принятия решения C_0. Обратим внимание на то, что из независимости отсчетов случайного процесса порядка n следует их независимость порядка $k < n$, но не следует их независимость порядка $m > n$.

На рис. 5 показана взаимосвязь коэффициента независимости отсчетов с интервалом независимости Δt для негауссовского случайного процесса $x(t)$, сформированного в соответствии с алгоритмом (8) для ряда значений коэффициента статистической связи K, при следующих параметрах измерительного тракта:

— мерность измеряемой функции распределения вероятностей: $n = 7$;

— значения аргументов: $x_1 = x_2 = \ldots = x_7 = 0,4$;

— постоянная интегрирования (накопления): $N = 10000$.

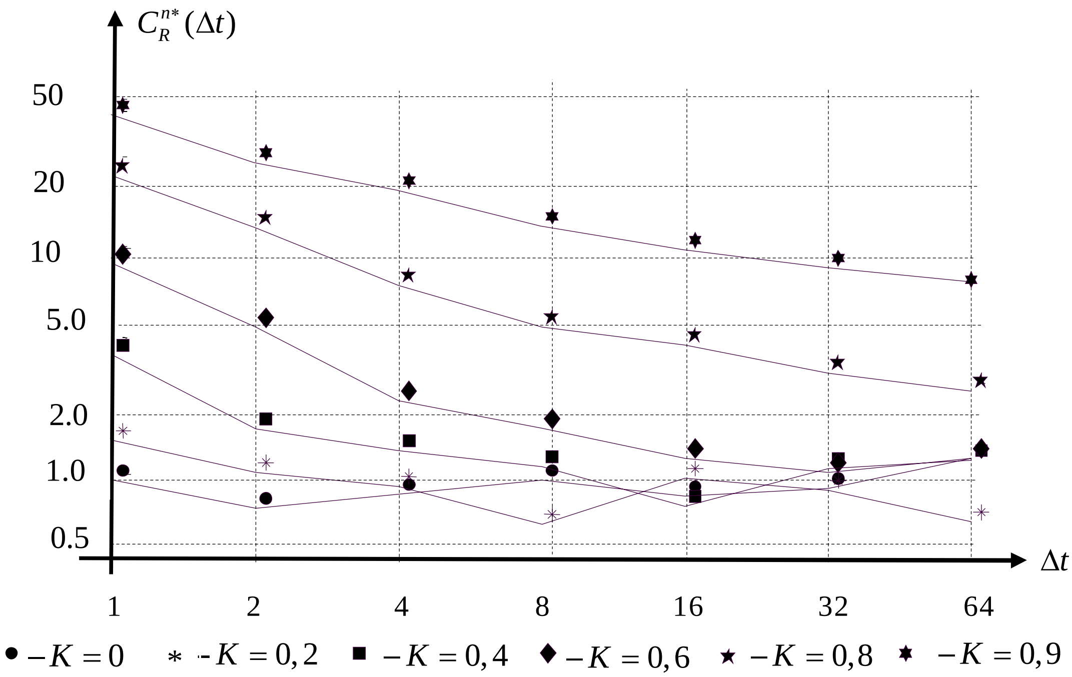

Рис. 5. Взаимосвязь коэффициента независимости отсчетов и интервала независимости для разных значений коэффициента статистической связи

Как и ранее при измерении значений коэффициента независимости для различных интервалов времени $\Delta t = k\Delta\tau$, $k = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$ между отсчетами случайного процесса полагалось, что $\Delta\tau = 1$. Полученные результаты сведены в таблицу.

Взаимосвязь коэффициента статистической связи между отсчетами и интервала независимости

Коэффициент статистической связи между отсчетами, *K*	**Интервал независимости** Δt_7
0,2	$: 2\Delta\tau$
0,4	$: 8\Delta\tau$
0,6	$: 32\Delta\tau$
0,8	$> 64\Delta\tau$
0,9	$> 64\Delta\tau$

Из приведенных на рис. 5 и в таблице результатов видно, что оценка коэффициента независимости отсчетов позволяет вполне определенно выявлять интервалы независимости для произвольно распределенных случайных процессов.

Выводы

1. Введено понятие коэффициента независимости отсчетов случайного процесса и показано, что он совпадает с отношением правдоподобия для случая проверки гипотезы, заключающейся в том, что отсчеты случайного процесса зависимы против простой альтернативы, а также, что отсчеты случайного процесса независимы.

2. Предложена структурная схема устройства для оценки коэффициента независимости отсчетов случайного процесса. Определены понятия порядка и интервала независимости для отсчетов случайного процесса.

3. Экспериментально подтверждена эффективность использованного критерия независимости отсчетов случайного процесса и принципа оценки коэффициента независимости, позволяющие определить интервалы независимости для отсчетов произвольно распределенных случайных процессов.

1. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. — М.: Сов. радио. — 1974. — 504 с.

2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — М.: Наука. — 1984. — 832 с.

3. *Брягин О.В.*, *Егоров А.К.*, *Розоринов Г.Н.* Об оценке многомерных функций распределения вероятностей речевых сигналов // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2004. — Т. 6, № 3. — С. 41–49.

4. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 2. — М.: Сов. радио. — 1968. — 552 с.

5. *Мирский Г.Я.* Аппаратурное определение характеристик случайных процессов. — М.: Энергия. — 1972. — 456 с.

Поступила в редакцию 10.11.2004