

УДК 537.84 + 532.5

# ОБОБЩЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ И ДИНАМИКЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Н. В. САЛТАНОВ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 15.06.2000*

На основе обобщенных потенциалов общее решение линеаризованной системы уравнений магнитной гидродинамики идеальной проводящей жидкости, находящейся в постоянном магнитном поле, в явном виде представлено через общие решения двух однородных волновых уравнений с альфвеновскими скоростями распространения сигналов и общее решение уравнения Лапласа. Проведено аналогичное преобразование линеаризованной системы уравнений магнитной гидродинамики диссипативной проводящей жидкости, также находящейся в постоянном магнитном поле. Задача сведена к решению трех независимых уравнений для трех обобщенных потенциалов. При наличии циклической координаты система уравнений магнитной гидродинамики диссипативной вращающейся жидкости в нелинейном случае сведена к системе четырех нелинейных уравнений в частных производных, служащей для определения функции тока, ее магнитного аналога и третьих компонент скорости и магнитного поля. Отмечено, что при отсутствии вращения эта система переходит в известную. Линеаризованная система уравнений динамики вращающейся жидкости в приближении мелкой воды сведена к одному линейному дифференциальному уравнению в частных производных третьего порядка, служащему для определения обобщенного потенциала. На основе полученного уравнения для обобщенного потенциала рассмотрена задача о сейшевых колебаниях в бассейне, глубина которого является кусочно-линейной функцией поперечной координаты. Проведено сравнение полученных результатов с результатами других авторов.

На основі узагальнених потенціалів загальний розв'язок линеаризованої системи рівнянь магнітної гідродинаміки ідеальної провідної рідини, що знаходиться в постійному магнітному полі, в явному вигляді представлено через загальний розв'язок двох однорідних хвильових рівнянь з альфвенівськими швидкостями розповсюдження сигналів і загальний розв'язок рівняння Лапласа. Було проведено аналогічне перетворення линеаризованої системи рівнянь магнітної гідродинаміки дисипативної провідної рідини, що також знаходиться в постійному магнітному полі. Задача зведена до рішення трьох незалежних рівнянь для трьох узагальнених потенціалів. При наявності циклічної координати система рівнянь магнітної гідродинаміки дисипативної рідини, що обертається, в нелінійному випадку зведена до системи чотирьох нелінійних рівнянь в частинних похідних, що служать для визначення функції течії, її магнітного аналога і третіх компонент швидкості і магнітного поля. Відмічено, що при відсутності обертання ця система переходить у відому. Линеаризована система рівнянь динаміки рідини, що обертається, в наближенні мелкої води зведена до одного лінійного диференційного рівняння в частинних похідних третього порядку, яке визначає узагальнений потенціал. На основі одержаного рівняння для узагальненого потенціала розглянута задача про сейшеві коливання в басейні, глибина якого є кусочно-лінійною функцією поперечної координати. Було проведено порівняння одержаних результатів з результатами інших авторів.

Based on generalized potentials the general solution of the linearized system of magnetohydrodynamic equations of an ideally conductive fluid in a stationary magnetic field is represented in terms of general solutions of two homogeneous wave equations with Alfvén signal propagation speed and a general solution of the Laplace equation. Transformation of the linearized system of magnetohydrodynamic equations of a dissipative conductive fluid in stationary magnetic field is performed. If the cyclic coordinate exists the system of magnetohydrodynamic equations of dissipative rotating fluid in nonlinear case is reduced to the system of four partial differential nonlinear equations required for finding of the stream function, the magnetic analog of it and the third components of speed and magnetic field. This system is noted to transform into the known one at the absence of rotation. The linearized system of equations of rotating fluid dynamics in the "shallow-water" approximation is reduced to the one linear partial differential equation of third order that define the generalized potential. Based on the obtained equation for generalized potential the problem of seichual oscillations in a reservoir is considered when the reservoir depth is a piecewise function of a cross coordinate. Comparison between the obtained results and the results of other authors is performed.

## ВВЕДЕНИЕ

В математических моделях, используемых в ряде естественных наук, существенное место занимает проблема получения общих решений соответствующих дифференциальных уравнений на основе различного рода потенциалов. В гидромеханике широко применяются потенциалы скорости и ускорения, функции тока, потенциалы Клебша и Соболева, потенциалы теории газодинамических

течений в переменных годографа и спидографа, потенциалы стоковых течений и др. В теории упругости к числу наиболее распространенных относятся потенциалы Гельмгольца - Стокса - Грина - Ламе, Папковича - Нейбера, Галеркина, Дебая - Морса - Фешбаха и другие. В теории электромагнетизма, например, фундаментальное значение имеют электрический и магнитный потенциалы, а также электрический и магнитный потенциалы Герца. Исследование проблемы потенциальных представлений различного рода полей

важно как с точки зрения более глубокого понимания внутренней структуры и особенностей исходных уравнений, так и с точки зрения решения прикладных задач [1, 10, 12, 14, 31, 32, 37, 39, 44, 45, 51, 54, 57, 63, 68]. Потенциальные представления полей физических величин часто имеют существенное значение при построении новых математических моделей и создании эффективных вычислительных алгоритмов. В частности, потенциальные представления могут быть успешно использованы при построении методов численного моделирования вихревых течений в гидромеханике. В ряде случаев оказывается существенным [10, 22, 51] использовать редукцию основных начально-краевых задач к скалярным задачам для одного уравнения, определяющего обобщенный суперпотенциал. Как отмечается в работе [10], наиболее эффективен такой подход проявляется при использовании численных методов. А именно, сокращение числа искомых функций до одной скалярной (обобщенного суперпотенциала) приводит к значительной экономии машинного времени и ресурса используемых ЭВМ.

Развитие магнитной гидродинамики (МГД) как новой физической дисциплины поначалу было обусловлено в большей мере различными астрофизическими и геофизическими приложениями (распространение МГД-волн, магнитные бури, полярные сияния, гидромагнитное динамо, МГД-эффекты в крупномасштабных океанических течениях и т. д. [2, 4, 38, 42, 43, 52, 53, 55, 59, 62, 67]). В дальнейшем ее интенсивное развитие связано с рядом технических приложений [7 – 9, 15 – 17, 18, 24, 25, 26, 28, 36, 41, 42, 56, 67, 69, 72]. В числе первых технических задач МГД было изучение движения электропроводных жидкостей в трубах и каналах [7, 8, 41, 42, 70]. Прежде были рассмотрены задачи, связанными с электромагнитными расходомерами и насосами. Электромагнитные насосы для жидких металлов имеют приложения в атомной энергетике (для перекачки носителя), в металлургии и литейном деле (для транспортировки, разлива, перемешивания и очистки расплавленных металлов) и других областях [20, 41, 65, 66, 71]. Однако наиболее интенсивные исследования течений проводящих жидкостей и газов в каналах при наличии магнитного поля связаны с созданием МГД преобразователей тепловой энергии в электрическую за счет возникающей при этом электродвижущей силы. На основе МГД двигателей со скрещенными внешними электрическим и магнитным полями, коаксиальных ускорителей, плазменных и ионных пушек разрабатывались и продолжают разрабатываться различно-

го рода двигатели большого удельного импульса для межпланетных кораблей и для торможения ракет при их возвращении на Землю [19, 40]. Задача овладения практически неограниченными запасами избыточной энергии, содержащейся в ядрах легких элементов, приводит к проблеме управляемого термоядерного синтеза. Эта проблема вызвала всестороннее изучение свойств высокотемпературной плазмы [3, 17, 18, 36, 67]. Для изучения ряда вопросов физики высокотемпературной плазмы широко исследуются различные модели МГД. Определенный интерес представляют внешние задачи МГД. При гиперзвуковых скоростях полета за фронтом ударной волны у поверхности летательного аппарата температура повышается настолько, что газ становится электропроводным. Это создает определенные возможности электромагнитного воздействия на режимы обтекания и теплообмена.

Как известно, [6, 30] различают пять основных типов океанических волн. Это звуковые, капиллярные, гравитационные, инерционные и планетарные волны. Существование звуковых волн связано со сжимаемостью воды. Сила поверхностного натяжения является той возвращающей силой, которая порождает высокочастотные короткие капиллярные волны. Гравитационные волны возникают благодаря возвращающему действию силы тяжести на частицы воды, смещенные относительно равновесных уровней. Такими уровнями могут быть свободная поверхность или некоторая внутренняя поверхность в стратифицированной жидкости. Связанная с вращением Земли сила Кориолиса является причиной возникновения инерционных (гироскопических) волн. Зависимость вертикальной составляющей вектора угловой скорости вращения Земли от горизонтальной координаты является причиной возникновения очень медленных крупномасштабных колебаний, называемых планетарными волнами или волнами Россти. Естественно, что относительный вклад каждой возвращающей силы зависит от свойств среды, геометрии бассейна, частоты и длины волны колебаний.

Вообще говоря, электропроводность морской воды и наличие магнитного поля обуславливают возможность существования в океане волн Альфвена и магнитозвуковых волн. Однако малость магнитного поля Земли приводит к тому, что связанные с ним электромагнитные возвращающие силы также оказываются чрезвычайно малыми. Поэтому в океанологической литературе этим волнам уделяется гораздо меньше внимания.

Данная статья преследует следующие цели:

- развитие представлений обобщенных потенциалов типа [50] в линеаризованных моделях магнитной гидродинамики идеальной и диссипативной жидкости;

- преобразование нелинейных уравнений магнитной гидродинамики диссипативной вращающейся жидкости при наличии циклической координаты на основе функции тока и ее магнитного аналога;

- развитие представлений обобщенных потенциалов в теории сейшевых колебаний, применение полученных представлений к исследованию сейшевых колебаний в бассейне с кусочно-линейным дном на основе аналитико-численного подхода.

### 1. ПРОВОДЯЩАЯ НЕДИССИПАТИВНАЯ НЕСЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ

1. Система уравнений динамики проводящей не-диссипативной несжимаемой жидкости в форме Громеки-Ламба имеет следующий вид [2, 28, 42]:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \Pi = \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v} - \frac{1}{4\pi\rho_0} \vec{H} \times \operatorname{rot} \vec{H}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{H}), \quad \Pi \equiv \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + F. \quad (4)$$

Здесь использованы общепринятые обозначения. Пусть в невозмущенном состоянии скорость жидкости равна нулю, а магнитное поле постоянно и направлено вдоль оси  $z$ ,  $\vec{H} = H_0 \vec{e}_z$ . Пусть  $\vec{h}$ ,  $\vec{v}_1$  и  $\Pi_1$  есть возмущения магнитного поля, скорости и величины  $\Pi$  соответственно. Запишем обычным образом линеаризованные аналоги уравнений (3) и (4) и введем следующие безразмерные величины

$$\vec{h} \equiv \frac{\vec{h}}{H_0}, \quad \vec{v} \equiv \frac{\sqrt{4\pi\rho_0} \vec{v}_1}{H_0}, \quad \Pi \equiv \frac{4\pi\rho_0 \Pi_1}{H_0^2},$$

$$(x, y, z) \equiv \frac{1}{L}(x, y, z), \quad t \equiv \frac{H_0 t}{L\sqrt{4\pi\rho_0}}. \quad (5)$$

Здесь  $L$  – характерный линейный размер. В результате приходим к уравнению (1), а также к следующим уравнениям

$$\operatorname{div} \vec{h} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \Pi = (\operatorname{rot} \vec{h}) \times \vec{e}_z, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{e}_z). \quad (8)$$

2. Используем для векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{h}$  следующие представления через обобщенные потенциалы [46–51]:

$$\vec{v} = \nabla \Phi + \operatorname{rot}(\chi \vec{e}_z) + S \vec{e}_z, \quad (9)$$

$$\vec{h} = \nabla \Phi_h + \operatorname{rot}(\chi_h \vec{e}_z) + S_h \vec{e}_z. \quad (10)$$

Подставляя выражения (9) и (10), соответственно, в уравнения (1) и (6), будем иметь

$$\Delta \Phi + \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \quad (11)$$

$$\Delta \Phi_h + \frac{\partial S_h}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

Подставим выражения (9) и (10) в уравнения (7) и (8) и приравняем в получившихся соотношениях нулю суммы слагаемых под знаками градиента и ротора и суммы слагаемых при единичном векторе " $\vec{e}_z$ ". В результате получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Pi + S_h = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial \chi_h}{\partial z} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial S_h}{\partial z} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Phi_h}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \chi_h}{\partial t} - \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial S_h}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Соотношения (1) и (6)-(8) представляют собой систему восьми скалярных уравнений, служащую для определения семи скалярных величин: трех компонент скорости, трех компонент магнитного поля и величины  $\Pi$ .

Соотношения (11)-(18) также представляют собой систему восьми уравнений, служащую для определения семи величин: шести обобщенных потенциалов  $\Phi$ ,  $\chi$ ,  $S$ ,  $\Phi_h$ ,  $\chi_h$ ,  $S_h$  и величины  $\Pi$ .

Таким образом, как исходная система уравнений (1) и (6)-(8), так и система уравнений (11)-(18) являются переопределенными. Однако, как будет показано далее, эта переопределенность оказывается преодолимой.

Общие решения систем уравнений (14), (17), (15), и (18), соответственно, имеют следующий вид:

$$\chi = \frac{\partial \Omega_\chi}{\partial z}, \quad \chi_h = \frac{\partial \Omega_{\chi_h}}{\partial t}, \quad (19)$$

$$\Omega_\chi = \Omega_{\chi 1}(z-t, x, y) + \Omega_{\chi 2}(z+t, x, y), \quad (20)$$

$$S = \frac{\partial \Omega_S}{\partial t}, \quad S_h = \frac{\partial \Omega_S}{\partial z}, \quad (21)$$

$$\Omega_S = \Omega_{S1}(z-t, x, y) + \Omega_{S2}(z+t, x, y). \quad (22)$$

Здесь  $\Omega_{\chi 1}$ ,  $\Omega_{\chi 2}$ ,  $\Omega_{S1}$ ,  $\Omega_{S2}$  – произвольные функции своих аргументов.

Обратимся к уравнениям (11), (12) и (16). Поскольку для величин  $S$  и  $S_h$  уже получены явные выражения (20), то указанные уравнения представляют собой систему трех уравнений для определения двух величин  $\Phi$  и  $\Phi_h$ . Решая уравнение (16), вводим обобщенный потенциал  $\Omega_\Phi$  следующим образом:

$$\Phi = \frac{\partial \Omega_\Phi}{\partial t}, \quad \Phi_h = \frac{\partial \Omega_\Phi}{\partial z}; \quad \Omega_\Phi = \Omega_\Phi(t, z, x, y). \quad (23)$$

Подставим далее выражения (21) и (23) для величин  $S$ ,  $S_h$ ,  $\Phi$  и  $\Phi_h$  в уравнения (11) и (12). Получившиеся два уравнения будут удовлетворены тождественно, если выполнено соотношение

$$\Delta \Omega_\Phi = -\frac{\partial \Omega_S}{\partial z}. \quad (24)$$

Поскольку функция  $\Omega_S$  выше определена в явном виде, то соотношение (24) представляет собой уравнение Пуассона, теория которого разработана весьма полно [21, 23, 33, 60]. В частности, если функция  $\partial \Omega_S / \partial z$  отлична от нуля лишь в конечной области  $G$  пространственных переменных, ограничена и имеет непрерывные частные производные первого порядка, то частное решение уравнения (24) имеет вид [33, 60]:

$$\begin{aligned} \Omega_{\Phi S} &= \frac{1}{4\pi} \iint \int_G \frac{\partial \Omega_S(z', x', y', t)}{R \partial z'} dz' dx' dy', \\ \Omega_S(z', x', y', t) &= \Omega_{S1}(z' - t, x', y') + \\ &+ \Omega_{S2}(z' + t, x', y'), \\ R &= \sqrt{(z - z')^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Сделаем подстановку [33, 60]:

$$\Omega_\Phi = \Omega_{\Phi 0} + \Omega_{\Phi S}. \quad (26)$$

В результате решение краевых задач для уравнения Пуассона (24) сводится к решению краевых задач для уравнения Лапласа:

$$\Delta \Omega_{\Phi 0} = 0. \quad (27)$$

Подставляя выражения (19), (21) и (23) в выражения (9), (10) и (13), соответственно будем иметь:

$$\vec{v} = \nabla \frac{\partial \Omega_\Phi}{\partial t} + \text{rot} \left( \frac{\partial \Omega_\chi}{\partial z} \vec{e}_z \right) + \frac{\partial \Omega_S}{\partial t} \vec{e}_z, \quad (28)$$

$$\vec{h} = \nabla \frac{\partial \Omega_\Phi}{\partial z} + \text{rot} \left( \frac{\partial \Omega_\chi}{\partial t} \vec{e}_z \right) + \frac{\partial \Omega_S}{\partial z} \vec{e}_z, \quad (29)$$

$$\Pi = -\frac{\partial^2 \Omega_\Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Omega_S}{\partial z}. \quad (30)$$

Таким образом, решение исходной системы восьми уравнений в частных производных первого порядка (1) и (6)-(8) сведено к решению уравнения Лапласа (27). Если его решение найдено, то поля физических величин определим с помощью выражений (20), (22), (25), (26) и (28) – (30).

В рассматриваемом случае возможен также и несколько иной способ ввода обобщенных потенциалов. Как следует из (15) и (21), величина  $\Omega_S$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Omega_S = 0.$$

Решая уравнение (24), вводим обобщенный потенциал  $\Psi_S$ :

$$\Omega_S = -\Delta \Psi_S, \quad \Omega_\Phi = \frac{\partial \Psi_S}{\partial z}.$$

Подставляя полученное выражение для  $\Omega_S$  в волновое уравнение для  $\Omega_S$ , имеем

$$\Delta \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi_S = 0.$$

Общее решение этого уравнения таково:

$$\begin{aligned} \Psi_S &= \Psi_{S0} + \Sigma_{S1}(z-t, x, y) + \Sigma_{S2}(z+t, x, y), \\ \Delta \Psi_{S0} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $\Sigma_{S1}$  и  $\Sigma_{S2}$  – произвольные функции своих аргументов.

Таким образом, решение исходной системы уравнений сведено к решению уравнения Лапласа для функции  $\Psi_{S0}$ . Если его решение найдено, то, по-прежнему, поля физических величин определим с помощью выражений (28) – (30).

3. В пункте 2 данного параграфа рассмотрен случай, когда физические величины в общем случае зависят от трех пространственных координат и времени. В случае наличия симметрии по одной из координат ( $\partial/\partial y = 0$ ) имеет определенное значение анализ с использованием функции тока  $\psi$  и ее магнитного аналога  $A$ :

$$\vec{v} = \nabla \psi \times \vec{e}_y + v_y \vec{e}_y, \quad (31)$$

$$\vec{h} = \nabla A \times \vec{e}_y + h_y \vec{e}_y. \quad (32)$$

Здесь  $\vec{e}_y$  – единичный вектор в направлении оси  $y$ . Заметим, что выражения (31) и (32) являются решениями уравнений (1) и (6), соответственно. Подставляя выражения (31) и (32) в уравнения

(7) и (8), приходим к следующим пяти скалярным уравнениям:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0, \quad (33)$$

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \Delta A = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial h_y}{\partial z}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (36)$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial z}. \quad (37)$$

Решая систему уравнений (35) и (37), получаем

$$v_y = \frac{\partial \Omega_y}{\partial z}, \quad h_y = \frac{\partial \Omega_y}{\partial t}, \quad (38)$$

$$\Omega_y = \Omega_{y1}(z - t, x) + \Omega_{y2}(z + t, x). \quad (39)$$

Здесь величины  $\Omega_{y1}$  и  $\Omega_{y2}$  являются произвольными функциями своих аргументов. Решая уравнение (36), вводим обобщенный потенциал  $\Omega$  следующим образом:

$$\psi = \frac{\partial \Omega}{\partial t}, \quad A = \frac{\partial \Omega}{\partial z}. \quad (40)$$

Подставим выражения (40) в уравнения (33) и (34) и исключим из получившихся соотношений величину  $\Pi$  перекрестным дифференцированием. В результате приходим к следующему уравнению для определения обобщенного потенциала  $\Omega$ :

$$\Delta \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Omega = 0. \quad (41)$$

Общее решение уравнения (41) имеет вид

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_1(z - t, x) + \Omega_2(z + t, x), \quad (42)$$

$$\Delta \Omega_0 = 0. \quad (43)$$

Здесь  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  – произвольные функции своих аргументов. Подставляя выражения (38) и (40) в выражения (31) и (32), запишем

$$\vec{v} = \nabla \frac{\partial \Omega}{\partial t} \times \vec{e}_y + \frac{\partial \Omega_y}{\partial z} \vec{e}_y, \quad (44)$$

$$\vec{h} = \nabla \frac{\partial \Omega}{\partial z} \times \vec{e}_y + \frac{\partial \Omega_y}{\partial t} \vec{e}_y. \quad (45)$$

Таким образом, при наличии симметрии по одной из координат ( $\partial/\partial y = 0$ ) исходная система восьми уравнений (1) и (6)–(8) также сведена к одному уравнению Лапласа (43). Если это уравнение решено, то поля  $\vec{v}$  и  $\vec{h}$  определяются выражениями (39),

(42), (44) и (45). Нахождение поля величины  $\Pi$  сводится, вообще говоря, к вычислению квадратур от известных функций.

Обратимся снова к системе уравнений (33), (34) и (36). Решая уравнения (36), вводим обобщенный потенциал  $\Psi$  следующим образом:

$$\psi = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z \partial x \partial t}, \quad A = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^2 \partial x}. \quad (46)$$

Подставим выражения (46) в уравнения (33) и (34). Получившиеся при этом соотношения будут удовлетворены тождественно, если положить

$$\Pi = -\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial t^2}, \quad (47)$$

$$\Delta \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = 0. \quad (48)$$

Общее решение уравнения (48) таково:

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1(z - t, x) + \Psi_2(z + t, x). \quad (49)$$

$$\Delta \Psi_0 = 0. \quad (50)$$

Здесь  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  – произвольные функции своих аргументов. Подставляя выражение (38) и (46) в выражения (31) и (32), запишем:

$$\vec{v} = \nabla \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z \partial x \partial z} \times \vec{e}_y + \frac{\partial \Omega_y}{\partial z} \vec{e}_y, \quad (51)$$

$$\vec{h} = \nabla \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^2 \partial x} \times \vec{e}_y + \frac{\partial \Omega_y}{\partial t} \vec{e}_y. \quad (52)$$

Таким образом, если в рассматриваемом случае решено уравнение Лапласа (50), то поля величин  $\Pi$ ,  $\vec{v}$  и  $\vec{h}$  определяются выражениями (39), (49), (51) и (52).

## 2. ПРОВОДЯЩАЯ ДИССИПАТИВНАЯ НЕСЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ

1. С учетом вязкости и конечной проводимости ( $\sigma < \infty$ ) уравнения движения и электрической индукции магнитной гидродинамики несжимаемой жидкости имеют следующий вид [28, 42]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \Pi = \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} - \frac{1}{4\pi\rho_0} \vec{H} \times \text{rot} \vec{H} - \nu \text{rot} \text{rot} \vec{v}, \quad (53)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{H}) - \nu_m \text{rot} \text{rot} \vec{H}. \quad (54)$$

Здесь  $\nu$  и  $\nu_m \equiv (c^2/4\pi\sigma)$  – коэффициенты обычной и "магнитной" вязкостей. Систему уравнений (53) и (54) замыкают уравнения (1) и (2). Систему линеаризованных уравнений составляют уравнения (1), (6), а также следующие уравнения

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \Pi = (\text{rot} \vec{h}) \times \vec{e}_z - \nu \text{rot rot} \vec{v}, \quad (55)$$

$$\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{e}_z) - \nu_m \text{rot rot} \vec{h}. \quad (56)$$

При этом использованы безразмерные величины (5), а также следующие безразмерные величины:

$$\nu \equiv \frac{\sqrt{4\pi\rho_0\nu}}{H_0 L}, \quad \nu_m \equiv \frac{\sqrt{4\pi\rho_0\nu_m}}{H_0 L}. \quad (57)$$

2. Используем для векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{h}$  представления (9) и (10). Подставляя выражения (9) и (10), соответственно, в уравнения (1) и (6), приходим к соотношениям (11) и (12). Подставим выражения (9) и (10) в уравнения (53) и (54) и приравняем в получившихся соотношениях нулю суммы слагаемые под знаками градиента и ротора и суммы слагаемых при единичном векторе  $\vec{e}_z$ . В результате получаем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Pi + S_h + \nu \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \quad (58)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \chi - \frac{\partial \chi_h}{\partial z} = 0, \quad (59)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) S - \frac{\partial S_h}{\partial z} = 0, \quad (60)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \Delta\right) \Phi_h - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (61)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \Delta\right) \chi_h - \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0, \quad (62)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \Delta\right) S_h - \frac{\partial S}{\partial z} = 0. \quad (63)$$

Соотношения (1), (6), (55) и (56) представляют собой систему восьми скалярных уравнений, служащую для определения семи скалярных величин: трех компонент скорости, трех компонент магнитного поля и величины  $\Pi$ .

Соотношения (11), (12) и (58) – (63) также представляют собой систему восьми уравнений, служащую для определения семи величин: шести обобщенных потенциалов  $\Phi$ ,  $\chi$ ,  $S$ ,  $\Phi_h$ ,  $\chi_h$ ,  $S_h$  и величины  $\Pi$ .

Таким образом, как исходная система уравнений (1), (6), (55) и (56), так и система уравнений (11), (12) и (58)–(63) являются переопределенными. Однако, как и в параграфе 1, эта переопределенность оказывается преодолимой.

Обратимся к системам уравнений (59), (62) и (60), (63). Для величин  $\chi$ ,  $\chi_h$ ,  $S$  и  $S_h$ , входящих в эти системы уравнений, вводим обобщенные потенциалы  $\Omega_\chi$  и  $\Omega_S$  следующим образом:

$$\chi = \frac{\partial \Omega_\chi}{\partial z}; \quad \chi_h = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \Omega_\chi, \quad (64)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \Delta\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \Omega_\chi - \frac{\partial^2 \Omega_\chi}{\partial z^2} = 0, \quad (65)$$

$$S = \frac{\partial \Omega_S}{\partial z}, \quad S_h = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \Omega_S, \quad (66)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \Delta\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \Omega_S - \frac{\partial^2 \Omega_S}{\partial z^2} = 0. \quad (67)$$

Подставляя выражения (66) в уравнения (11), (12) и (58), запишем

$$\Delta \Phi + \frac{\partial^2 \Omega_S}{\partial z^2} = 0, \quad (68)$$

$$\Delta \Phi_h + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \frac{\partial \Omega_S}{\partial z} = 0, \quad (69)$$

$$\Pi = -\nu \frac{\partial^2 \Omega_S}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \Omega_S - \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (70)$$

При заданных величинах  $\Omega_S$  и  $\Phi$  выражение (70) служит для определения величины  $\Pi$ . Поскольку обобщенный потенциал  $\Omega_S$  находится из уравнения (67), то уравнения (61), (68) и (69) представляют собой систему трех уравнений, служащую для определения двух величин  $\Phi$  и  $\Phi_h$ . Покажем, что эта переопределенность преодолима. Решая уравнение (61), вводим обобщенный потенциал  $\Omega_\Phi$ :

$$\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \Delta\right) \Omega_\Phi, \quad \Phi_h = \frac{\partial \Omega_\Phi}{\partial z} \quad (71)$$

Подставив выражения (71) в уравнения (68) и (69), будем иметь

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \Delta\right) \Delta \Omega_\Phi + \frac{\partial^2 \Omega_S}{\partial z^2} = 0, \quad (72)$$

$$\Delta \frac{\partial \Omega_\Phi}{\partial z} + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \frac{\partial \Omega_S}{\partial z} = 0. \quad (73)$$

Положим

$$\Omega_S = -\Delta \Psi_S, \quad (74)$$

$$\Delta \left[ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \Delta\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi_S = 0. \quad (75)$$

Подставим выражение (74) в уравнения (72) и (73). Оба получившихся соотношения будут удовлетворены тождественно в силу уравнения (75), если

$$\Omega_\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \Psi_S. \quad (76)$$

Выражая с помощью соотношений (9), (10), (58), (64), (66), (71), (74) и (76) поля величин  $\vec{v}$ ,  $\vec{h}$  и  $\Pi$  через потенциалы  $\Psi_S$  и  $\Omega_\chi$ , будем иметь:

$$\vec{v} = \nabla \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \Delta \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \Psi_S + \text{rot} \left( \frac{\partial \Omega_\chi}{\partial z} \vec{e}_z \right) - \Delta \frac{\partial \Psi_S}{\partial z} \vec{e}_z, \quad (77)$$

$$\vec{h} = \text{rotrot} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \Psi_S \vec{e}_z \right] + \text{rot} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \Omega_\chi \vec{e}_z \right], \quad (78)$$

$$\Pi = \nu \Delta \frac{\partial^2 \Psi_S}{\partial z^2} + \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) \left[ \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \Delta \right) \right] \Psi_S, \quad (79)$$

Таким образом, при сделанных допущениях задача сведена к отысканию решений двух уравнений (65) и (75) для обобщенных потенциалов  $\Omega_\chi$  и  $\Psi_S$ . Первое из этих уравнений имеет четвертый порядок по производной, второе – шестой. Если решения указанных уравнений найдены, то поля величин  $\vec{v}$ ,  $\vec{h}$  и  $\Pi$  определим с помощью выражений (77) – (79).

В связи с тем, что оператор Лапласа и оператор в квадратных скобках, входящие в (75), коммутируют друг с другом, решение уравнения (75) представим в виде

$$\Psi_S = \Psi_{S0} + \Sigma_S,$$

$$\Delta \Psi_{S0} = 0,$$

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \Delta \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Sigma_S = 0.$$

Таким образом, при сделанных допущениях задача сведена к отысканию решений трех уравнений для обобщенных потенциалов  $\Omega_\chi$ ,  $\Psi_{S0}$  и  $\Sigma_S$ . Уравнения для обобщенных потенциалов  $\Omega_\chi$  и  $\Sigma_S$  одинаковые и имеют четвертый порядок по производным. Уравнение для обобщенного потенциала  $\Psi_{S0}$  является уравнением Лапласа.

3. В монографии [58] приводятся важные для практического использования уравнения для функции тока и третьей компоненты скорости  $v_3$  вязкой несжимаемой жидкости в нелинейном случае в произвольной ортогональной системе координат.

Получим уравнения для функции тока, ее магнитного аналога и третьих компонент скорости и магнитного поля  $v_3$  и  $H_3$  вязкой проводящей вращающейся несжимаемой жидкости в нелинейном

случае в произвольной ортогональной системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$ . Исходную систему уравнений составляют уравнение неразрывности (1), а также уравнения (2), (53) и (54), которые в рассматриваемом случае удобнее использовать в таком виде:

$$\text{div} \vec{v}_m = 0, \quad (80)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_m}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{v}_m) - \nu \text{rotrot} \vec{v}_m, \quad (81)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \Pi = \vec{v} \times (\text{rot} \vec{v} + 2\omega_* \vec{e}_*) - \vec{v}_m \times \text{rot} \vec{v}_m - \nu \text{rotrot} \vec{v}, \quad (82)$$

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\rho_0}},$$

$$\Pi \equiv \frac{p}{\rho} + \frac{\vec{v}^2}{2} + G(\vec{R}) - \omega_*^2 (\vec{e}_* \times \vec{R})^2. \quad (83)$$

Здесь  $\vec{e}_*$  – единичный вектор вдоль оси вращения жидкости как целого,  $\omega_*$  – угловая скорость вращения,  $\vec{R}$  – радиус – вектор текущей точки пространства,  $G(\vec{R})$  – гравитационный потенциал. Если величины  $\vec{v}$  и  $\vec{v}_m$  определены, то напряженность электрического поля и плотность тока определяются следующими выражениями:

$$\vec{E} = \frac{\sqrt{4\pi\rho_0}}{c} (\nu_m \text{rot} \vec{v}_m - \vec{v} \times \vec{v}_m),$$

$$\vec{j} = \frac{c\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{4\pi}} \text{rot} \vec{v}_m.$$

Полагая выполненным условие симметрии по координате  $x_3$  ( $\partial/\partial x_3 = 0$ ), решаем уравнение неразрывности (1) и условие отсутствия источников магнитного поля (80):

$$\vec{v} = \nabla \psi \times \frac{\vec{e}_3}{h_3} + q \frac{\vec{e}_3}{h_3}, \quad q \equiv h_3 v_3, \quad (84)$$

$$\vec{v}_m = \nabla \psi_m \times \frac{\vec{e}_3}{h_3} + q_m \frac{\vec{e}_3}{h_3}, \quad q_m \equiv h_3 v_{m3}. \quad (85)$$

Здесь  $\psi$  – функция тока,  $\psi_m$  – ее магнитный аналог,  $h_1, h_2, h_3$  – коэффициенты Ламе ортогональной системы координат. Применяя к выражениям (84) и (85) операции ротора и двойного ротора, запишем

$$\text{rot} \vec{v} = -D^* \psi \frac{\vec{e}_3}{h_3} + \nabla q \times \frac{\vec{e}_3}{h_3},$$

$$\text{rotrot} \vec{v} = -\nabla(D^* \psi) \times \frac{\vec{e}_3}{h_3} - D^* q \frac{\vec{e}_3}{h_3},$$

$$\text{rot} \vec{v}_m = -D^* \psi_m \frac{\vec{e}_3}{h_3} + \nabla q_m \times \frac{\vec{e}_3}{h_3},$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}_m = -\nabla(D^* \psi_m) \times \frac{\vec{e}_3}{h_3} - D^* q_m \frac{\vec{e}_3}{h_3},$$

$$D^* = \frac{h_3}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{h_1}{h_3 h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \quad (86)$$

Подставим выражения (84) - (86) в уравнение движения (82) и в получившемся соотношении приравняем нулю сумму множителей при векторе  $\vec{e}_3$ . В результате запишем

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(\psi, q)}{\partial(x_1, x_2)} - \nu D^* q - 2\omega_* (\vec{e}_* \cdot \nabla \psi) + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(\psi_m, q_m)}{\partial(x_1, x_2)} = 0 \quad (87)$$

К оставшейся части указанного соотношения применим операцию ротора, исключая таким образом из нее величину  $\Pi$ . В результате будем иметь

$$\frac{\partial D^* \psi}{\partial t} - \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial(\psi, h_3^{-2} D^* \psi)}{\partial(x_1 x_2)} - \nu D^* D^* \psi + \frac{2q}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(q, h_3)}{\partial(x_1 x_2)} + 2\omega_* \left[ h_3^2 \operatorname{div} \left( \frac{q \vec{e}_*}{h_3^2} \right) + \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial(\psi, h_3^{-1} \epsilon_{*3})}{\partial(x_1, x_2)} \right] + \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial(\psi_m, h_3^{-2} D^* \psi_m)}{\partial(x_1, x_2)} - \frac{2q_m}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(q_m, h_3)}{\partial(x_1, x_2)} = 0. \quad (88)$$

Здесь  $\epsilon_{*3}$  есть проекция единичного вектора на орт  $\vec{e}_3$ ,  $\epsilon_{*3} = (\vec{e}_3 \vec{e}_*)$ . Подставим выражения (84) - (86) в уравнение электрической индукции (81) и приравняем в получившемся соотношении нулю сумму коэффициентов, стоящих множителями при векторе  $\vec{e}_3$  под знаком ротора, и сумму коэффициентов, стоящих множителями при векторе  $\vec{e}_3$  не под знаком ротора. В результате приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \psi_m}{\partial t} - \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(\psi, \psi_m)}{\partial(x_1, x_2)} - \nu_m D^* \psi_m = 0, \quad (89)$$

$$\frac{\partial q_m}{\partial t} - \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial(\psi, h_3^{-2} q_m)}{\partial(x_1, x_2)} + \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial(\psi_m, h_3^{-2} q)}{\partial(x_1, x_2)} - \nu_m D^* q_m = 0. \quad (90)$$

Соотношения (87) - (90) представляют собой систему четырех нелинейных уравнений в частных производных, служащую для определения четырех величин  $\psi$ ,  $\psi_m$ ,  $q$  и  $q_m$ . В случае отсутствия магнитного поля ( $\psi_m = 0, q_m = 0$ ) уравнения (87) и (90) упрощаются и принимают вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(\psi, q)}{\partial(x_1, x_2)} - 2\omega_* (\vec{e}_* \cdot \nabla \psi) - \nu D^* q = 0, \quad (91)$$

$$\frac{\partial D^* \psi}{\partial t} - \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial(\psi, h_3^{-2} D^* \psi)}{\partial(x_1, x_2)} - \nu D^* D^* \psi + \frac{2q}{h_1 h_2 h_3^2} \frac{\partial(q, h_3)}{\partial(x_1, x_2)} + 2\omega_* \left[ h_3^2 \operatorname{div} \left( \frac{q \vec{e}_*}{h_3^2} \right) + \frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial(\psi, h_3^{-1} \epsilon_{*3})}{\partial(x_1, x_2)} \right] = 0. \quad (92)$$

Система уравнений (91) и (92) служит для определения величин  $\psi$  и  $q$ . При  $\omega_* = 0$  она переходит в систему уравнений, полученную в монографии [58].

Обратимся снова к системе уравнений (87) - (90). Рассмотрим круговую цилиндрическую систему координат:

$$x_1 = z, \quad x_2 = r, \quad x_3 = \varphi,$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = r.$$

Положим в этом случае

$$\vec{e}_* = \vec{e}_z,$$

где  $\vec{e}_z$  - единичный вектор вдоль оси  $z$ . В результате имеем следующие уравнения:

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad r v_\varphi = q,$$

$$v_{mz} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_m}{\partial z}, \quad v_{mr} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_m}{\partial z}, \quad r v_{m\varphi} = q_m,$$

$$D^* = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial D^* \psi}{\partial t} - r \frac{\partial(\psi, r^{-2} D^* \psi)}{\partial(z, r)} +$$

$$+ 2(\omega_* + \frac{q}{r^2}) \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{2q_m}{r^2} \frac{\partial q_m}{\partial z} +$$

$$+ r \frac{\partial(\psi_m, r^{-2} D^* \psi_m)}{\partial(z, r)} - \nu D^* D^* \psi = 0,$$



$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, q)}{\partial(z, r)} - 2\omega_* \frac{\partial\psi}{\partial z} + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi_m, q_m)}{\partial(z, r)} - \nu D^* q = 0, \\ & \frac{\partial\psi_m}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi, \psi_m)}{\partial(z, r)} - \nu D^* \psi_m = 0, \\ & \frac{\partial q_m}{\partial t} - r \frac{\partial(\psi, r^{-2} q_m)}{\partial(z, r)} + \\ & + r \frac{\partial(\psi_m, r^{-2} q)}{\partial(z, r)} - \nu_m D^* q_m = 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим сферическую систему координат:  $x_1 = R$ ,  $x_2 = \Theta$ ,  $x_3 = \varphi$ ,  $h_1 = 1$ ,  $h_2 = R$ ,  $h_3 = R \sin \Theta$ . Положим и в этом случае

$$\vec{e}_* = \vec{e}_z = \cos \Theta \vec{e}_R - \sin \Theta \vec{e}_\Theta,$$

где  $\vec{e}_R$  и  $\vec{e}_\Theta$  суть единичные векторы в радиальном и меридиальном направлениях. В результате имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} v_R &= \frac{1}{R^2 \sin \Theta} \frac{\partial\psi}{\partial\Theta}, \quad v_\Theta = -\frac{1}{R \sin \Theta} \frac{\partial\psi}{\partial R}, \\ v_\varphi &= \frac{q}{R \sin \Theta}, \quad v_{mR} = \frac{1}{R^2 \sin \Theta} \frac{\partial\psi_m}{\partial\Theta}, \\ v_{m\Theta} &= -\frac{1}{R \sin \Theta} \frac{\partial\psi_m}{\partial R}, \quad v_{m\varphi} = \frac{q_m}{R \sin \Theta}, \\ D^* &= \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin \Theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \right), \\ \frac{\partial D^* \psi}{\partial t} - \sin \Theta \frac{\partial(\psi, R^{-2} \sin^{-2} \Theta D^* \psi)}{\partial(R, \Theta)} - \\ & - \nu D^* D^* \psi + 2 \left( \omega_* + \frac{q}{R^2 \sin^2 \Theta} \right) \left( \frac{\partial q}{\partial R} \cos \Theta - \right. \\ & \left. - \frac{\partial q}{R \partial \Theta} \sin \Theta \right) + \sin \Theta \frac{\partial(\psi_m, R^{-2} \sin^{-2} \Theta D^* \psi_m)}{\partial(R, \Theta)} - \\ & - \frac{2q_m}{R^2 \sin^2 \Theta} \left( \frac{\partial q_m}{\partial R} \cos \Theta - \frac{\partial q_m}{R \partial \Theta} \sin \Theta \right) = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1}{R^2 \sin \Theta} \frac{\partial(\psi, q)}{\partial(R, \Theta)} + \frac{1}{R^2 \sin \Theta} \frac{\partial(\psi_m, q_m)}{\partial(R, \Theta)} - \\ & - 2\omega_* \left( \frac{\partial\psi}{\partial R} \cos \Theta - \frac{\partial\psi}{R \partial \Theta} \sin \Theta \right) - \nu D^* q = 0, \\ \frac{\partial\psi_m}{\partial t} - \frac{1}{R^2 \sin \Theta} \frac{\partial(\psi, \psi_m)}{\partial(R, \Theta)} - \nu_m D^* \psi_m &= 0, \\ \frac{\partial q_m}{\partial t} + \sin \Theta \left[ \frac{\partial(\psi_m, R^{-2} \sin^{-2} \Theta q)}{\partial(R, \Theta)} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial(\psi, R^{-2} \sin^{-2} \Theta q_m)}{\partial(R, \Theta)} \right] - \nu_m D^* q_m = 0. \end{aligned}$$

Для декартовых и цилиндрических координат при наличии сдвиговой симметрии

$$x_3 = z, \quad h_3 = 1.$$

Положим в этом случае

$$\vec{e}_* \cdot \vec{e}_z = 0.$$

В результате имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} D_* &= \Delta = \frac{1}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \\ v_1 &= \frac{\partial\psi}{h_2 \partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial\psi}{h_1 \partial x_1}, \quad v_z = q, \\ v_{m1} &= \frac{\partial\psi_m}{h_2 \partial x_2}, \quad v_{m2} = -\frac{\partial\psi_m}{h_1 \partial x_1}, \quad v_{mz} = q_m, \\ \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(\psi, \Delta \psi)}{\partial(x_1, x_2)} - \nu \Delta \Delta \psi + \\ & + 2\omega_* (\vec{e}_* \cdot \nabla) q + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(\psi_m, \Delta \psi_m)}{\partial(x_1, x_2)} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(\psi, q)}{\partial(x_1, x_2)} - \nu \Delta q - \\ & - 2\omega_* (\vec{e}_* \cdot \nabla) \psi + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(\psi_m, q_m)}{\partial(x_1, x_2)} = 0, \\ \frac{\partial\psi_m}{\partial t} - \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial(\psi, \psi_m)}{\partial(x_1, x_2)} - \nu_m \Delta \psi_m &= 0, \\ \frac{\partial q_m}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial(\psi_m, q)}{\partial(x_1, x_2)} - \frac{\partial(\psi, q_m)}{\partial(x_1, x_2)} \right] - \\ & - \nu_m \Delta q_m = 0, \end{aligned}$$

При  $\omega_* = 0$  из полученной системы четырех уравнений выделяется подсистема двух уравнений для определения величин  $\psi$  и  $\psi_m$ . При этом допустим случай чисто плоских течений ( $q = 0, q_m = 0$ ).

Отметим, что для случая  $\omega_* = 0$  при наличии зависимости физических величин от двух ортогональных координат и времени система четырех скалярных уравнений, служащая для определения функций тока и третьих компонент скорости и напряженности магнитного поля, получена в статье [61]. Указанная статья содержит также библиографию работ по методологии в теории нелинейных нестационарных двухпараметрических задач магнитной гидродинамики.

### 3. СЕЙШЕВЫ КОЛЕБАНИЯ

1. Система уравнений динамики вращающейся однородной жидкости в приближении мелкой воды имеет следующий вид [27, 30]:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + 2\omega_* \vec{e}_z \times \vec{v} = -g \nabla \zeta, \quad (93)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \text{div}(H \vec{v}) = 0, \quad \vec{v} \equiv (v_1, v_2). \quad (94)$$

Здесь  $\zeta(x_1, x_2, t)$  – возвышение свободной поверхности,  $\vec{v}(x_1, x_2, t)$  – скорость жидкости,  $H(x_1, x_2)$  – глубина бассейна,  $2\omega_*$  – параметр Кориолиса,  $g$  – ускорение силы тяжести. Рассмотрение проводится в ортогональной системе координат  $(x_1, x_2, z)$ .

2. Представим скорость  $\vec{v}$  в виде

$$\vec{v} = \nabla \Phi + \text{rot}(\chi_2 \vec{e}_z), \quad (95)$$

где  $\Phi$  и  $\chi$  – обобщенные потенциалы. Подставим (95) в уравнение (93). Приравнявая в получившемся соотношении суммы слагаемых по знаками градиента и ротора, соответственно получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + 2\omega_* \chi_2 + g \zeta = 0, \quad (96)$$

$$\frac{\partial \chi_2}{\partial t} - 2\omega_* \Phi = 0. \quad (97)$$

Выражая с помощью (96) и (97) величины  $\Phi$  и  $\zeta$  через потенциал  $\chi$ , находим

$$\Phi = \frac{1}{2\omega_*} \frac{\partial \chi_2}{\partial t}, \quad (98)$$

$$\zeta = -\frac{2\omega_*}{g} \left( 1 + \frac{\partial^2}{4\omega_*^2 \partial t^2} \right) \chi_2. \quad (99)$$

Исключив из выражения (95) потенциал  $\Phi$  с помощью выражения (98), запишем

$$\vec{v} = \frac{1}{2\omega_*} \nabla \frac{\partial \chi_2}{\partial t} + \text{rot}(\chi_2 \vec{e}_z). \quad (100)$$

Исключая далее с помощью выражений (99) и (100) величины  $\zeta$  и  $\vec{v}$  из уравнения неразрывности (94), приходим к следующему соотношению:

$$L_H \chi_2 = 0,$$

$$L_H \equiv \left[ g(H \Delta + \nabla H \cdot \nabla) - 4\omega_*^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{\partial}{\partial t} + 2\omega_* g \frac{\partial(H, \quad)}{h_1 h_2 \partial(x_1, x_2)},$$

$$\Delta \equiv \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right],$$

$$\nabla \equiv \vec{e}_1 \frac{\partial}{h_1 \partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{h_2 \partial x_2}. \quad (101)$$

Здесь  $h_1$  и  $h_2$  – коэффициенты Ламе ортогональной системы координат на плоскости  $z = \text{const}$ ;  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  – единичные векторы, касательные координатным линиям  $x_1$  и  $x_2$  соответственно.

Соотношение (101) представляет собой линейное дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка, служащее для определения обобщенного потенциала  $\chi$ . Если его решение найдено, то выражения (99) и (100) определяют возвышение свободной поверхности  $\zeta$  и скорость жидкости  $\vec{v}$ .

3. В случае постоянной глубины жидкости ( $H = \text{const}$ ) уравнение (101) упрощается и принимает вид

$$\left( gH \Delta - 4\omega_*^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \chi_2}{\partial t} = 0 \quad (102)$$

В силу коммутативности входящих в уравнение (102) операторов  $(\partial/\partial t)$  и  $[gH \Delta - 4\omega_*^2 - (\partial^2/\partial t^2)]$  его общее решение имеет вид:

$$\chi_2 = \chi(x_1, x_2, t) + \chi_1(x_1, x_2), \quad (103)$$

где  $\chi_1(x_1, x_2)$  – произвольная функция пространственных координат, а  $\chi(x_1, x_2, t)$  – общий интеграл уравнения Клейна - Гордона [5, 34]:

$$\left( gH \Delta - 4\omega_*^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi = 0. \quad (104)$$

4. Пусть течения стационарные:

$$\chi = 0, \quad \chi_2 = \chi_1(x_1, x_2). \quad (105)$$

Учитывая соотношение (105) в выражениях (99) и (100), соответственно получаем

$$\zeta = -\frac{2\omega_*}{g} \chi_1, \quad \vec{v} = \nabla \chi_1 \times \vec{e}_z. \quad (106)$$

Согласно уравнения движения (93), в этом случае сила Кориолиса и гравитационная сила уравновешивают друг друга.

5. Применим к левой и правой частям уравнения (101) оператор  $L_\zeta$ :

$$L_\zeta \equiv -\frac{1}{2\omega_* g} \left( 1 + \frac{\partial^2}{4\omega_*^2 \partial t^2} \right). \quad (107)$$

Учитывая затем то обстоятельство, что операторы  $L_H$  и  $L_\zeta$  коммутируют друг с другом, а также связь (99), получаем

$$L_H \zeta = 0. \quad (108)$$

Уравнение (108) приведено, например, в монографии [30]. В отличие от потенциала  $\chi_2$ , скорость  $\vec{v}$  не выражается в конечном виде через возвышение поверхности жидкости.

6. Покажем, что система трех скалярных уравнений (93) и (94) допускает существование двух в некотором смысле особых скалярных потенциалов, удовлетворяющих системе двух уравнений в частных производных, через некоторые величины  $v_1$  и  $v_2$  и  $\zeta$  выражаются в конечном виде.

Комбинируя первую и вторую компоненты уравнения движения (93), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ e^{2i\omega_* t} (v_1 + iv_2) \right] = \\ = -ge^{2i\omega_* t} \left( \frac{\partial \zeta}{h_1 \partial x_1} + i \frac{\partial \zeta}{h_2 \partial x_2} \right). \end{aligned} \quad (109)$$

Здесь  $i$  – мнимая единица. Введем комплексную функцию  $Z$  следующим образом:

$$\zeta = e^{-2i\omega_* t} \frac{\partial Z}{\partial t}, \quad Z = Z_r + iZ_i, \quad (110)$$

$$\sin 2\omega_* t \frac{\partial Z_r}{\partial t} - \cos 2\omega_* t \frac{\partial Z_i}{\partial t} = 0. \quad (111)$$

Здесь  $Z_r$  и  $Z_i$  – действительные функции аргументов  $x_1$ ,  $x_2$  и  $t$ . Уравнение (111) есть следствие требования действительности величины  $\zeta$ . Подставляя выражение (110) в правую часть уравнения (109) и проводя интегрирование по времени, будем иметь

$$v_1 + iv_2 = -ge^{-2i\omega_* t} \left( \frac{\partial}{h_1 \partial x_1} + i \frac{\partial}{h_2 \partial x_2} \right) Z. \quad (112)$$

С учетом уравнения (111) из выражения (110) следует

$$\zeta = \cos 2\omega_* t \frac{\partial Z_r}{\partial t} + \sin 2\omega_* t \frac{\partial Z_i}{\partial t}. \quad (113)$$

Из выражения (112) получаем

$$\begin{aligned} v_1 = -g \left[ \cos 2\omega_* t \left( \frac{\partial Z_r}{h_1 \partial x_1} - \frac{\partial Z_i}{h_2 \partial x_2} \right) + \right. \\ \left. + \sin 2\omega_* t \left( \frac{\partial Z_r}{h_2 \partial x_2} + \frac{\partial Z_i}{h_1 \partial x_1} \right) \right], \\ v_2 = -g \left[ \cos 2\omega_* t \left( \frac{\partial Z_r}{h_2 \partial x_2} + \frac{\partial Z_i}{h_1 \partial x_1} \right) + \right. \\ \left. + \sin 2\omega_* t \left( \frac{\partial Z_i}{h_2 \partial x_2} - \frac{\partial Z_r}{h_1 \partial x_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (114)$$

Подставив выражения (113) и (114) в уравнение (94), запишем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \cos 2\omega_* t \frac{\partial Z_r}{\partial t} + \sin 2\omega_* t \frac{\partial Z_i}{\partial t} \right) -$$

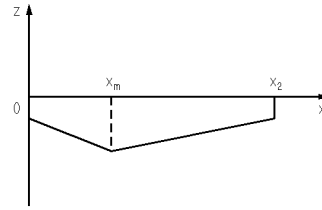


Рис. 1. Схема бассейна

$$\begin{aligned} -\frac{g}{h_1 h_2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ h_2 H \left[ \cos 2\omega_* t \left( \frac{\partial Z_r}{h_1 \partial x_1} - \frac{\partial Z_i}{h_2 \partial x_2} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \sin 2\omega_* t \left( \frac{\partial Z_r}{h_2 \partial x_2} + \frac{\partial Z_i}{h_1 \partial x_1} \right) \right] \right\} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ h_1 H \left[ \cos 2\omega_* t \left( \frac{\partial Z_r}{h_2 \partial x_2} + \frac{\partial Z_i}{h_1 \partial x_1} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \sin 2\omega_* t \left( \frac{\partial Z_i}{h_2 \partial x_2} - \frac{\partial Z_r}{h_1 \partial x_1} \right) \right] \right\} \right\rangle = 0. \end{aligned} \quad (115)$$

Таким образом, задача сведена к системе двух уравнений в частных производных (111) и (115) для двух потенциалов  $Z_r$  и  $Z_i$ . Причем уравнение (115) имеет второй порядок как по времени, так и по координатам. Уравнение (111) имеет первый порядок, и в него входят только первые производные по времени. Как представляется, эта система уравнений в силу определенной симметрии входящих в нее величин  $Z_r$  и  $Z_i$  может представить интерес при численных расчетах.

7. Рассмотрим задачу о сейшевых колебаниях в бассейне переменной глубины, сечение которого изображено на рис. 1.

Стенки бассейна имеют бесконечную длину вдоль оси  $y$ . Обе вертикальные стенки бассейна достигают глубины  $H_0$ . Профиль дна бассейна кусочно-линеен. Величина  $H_m$  – максимальная глубина бассейна, которая достигается при  $x = x_m$ . Ограничимся рассмотрением колебаний, в которых физические величины не зависят от  $y$ . В результате для функции  $\chi_2$  получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} \left[ g \left( H \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{dH}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \right) - 4\omega_*^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{\partial \chi_2}{\partial t} = 0, \\ 0 \leq x \leq x_m, \quad H = H_0 + \alpha_1 x, \quad \alpha_1 = \frac{H_m - H_0}{x_m}, \\ x_m \leq x \leq x_2, \quad H = H_m - \alpha_2 (x - x_m), \\ \alpha_2 = \frac{H_m - H_0}{x_2 - x_m} \end{aligned} \quad (116)$$

При этом для возвышения  $\zeta$  справедливо выражение (99). Для компонент скорости  $v_x$  и  $v_y$  имеют место следующие выражения:

$$v_x = \frac{1}{2\omega_*} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x \partial t}, \quad v_y = -\frac{\partial \chi_2}{\partial x}. \quad (117)$$

Приняв в качестве независимой переменной глубину бассейна  $H$ , уравнение (116) запишем в виде

$$\left[ g\alpha_1^2 \left( H \frac{\partial^2}{\partial H^2} + \frac{\partial}{\partial H} \right) - 4\omega_*^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{\partial \chi_2}{\partial t} = 0, \quad (118)$$

$$0 \leq x \leq x_m;$$

$$\left[ g\alpha_2^2 \left( H \frac{\partial^2}{\partial H^2} + \frac{\partial}{\partial H} \right) - 4\omega_*^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \frac{\partial \chi_2}{\partial t} = 0, \quad (119)$$

$$x_m \leq x \leq x_2.$$

Разыскиваем решения уравнений (118) и (119) в виде стоячих волн,  $\chi_2 = \chi_2(H) \sin \omega t$ . В результате, отвлекаясь от рассмотрения стационарных решений уравнений (118) и (119), с учетом (99) и (117) будем иметь

$$\chi_2 = [A_1 J_0(2\sqrt{h}) + B_1 N_0(2\sqrt{h})] \sin \omega t,$$

$$\zeta = \frac{\omega^2 - 4\omega_*^2}{2\omega_* g} [A_1 J_0(2\sqrt{h}) + B_1 N_0(2\sqrt{h})] \sin \omega t,$$

$$v_x = -\frac{\omega(\omega^2 - 4\omega_*^2)}{2\omega_* g \alpha_1} \frac{1}{\sqrt{h}} [A_1 J_1(2\sqrt{h}) + B_1 N_1(2\sqrt{h})] \cos \omega t,$$

$$v_y = \frac{\omega^2 - 4\omega_*^2}{g \alpha_1} \frac{1}{\sqrt{h}} [A_1 J_1(2\sqrt{h}) + B_1 N_1(2\sqrt{h})] \sin \omega t,$$

$$h = \frac{(H_0 + \alpha_1 x)(\omega^2 - 4\omega_*^2)}{g \alpha_1^2}, \quad 0 \leq x \leq x_m; \quad (120)$$

$$\chi_2 = [A_2 J_0(2\sqrt{h}) + B_2 N_0(2\sqrt{h})] \sin \omega t,$$

$$\zeta = \frac{\omega^2 - 4\omega_*^2}{2\omega_* g} [A_2 J_0(2\sqrt{h}) + B_2 N_0(2\sqrt{h})] \sin \omega t,$$

$$v_x = \frac{\omega(\omega^2 - 4\omega_*^2)}{2\omega_* g \alpha_2} \frac{1}{\sqrt{h}} [A_2 J_1(2\sqrt{h}) + B_2 N_1(2\sqrt{h})] \cos \omega t,$$

$$v_y = -\frac{\omega^2 - 4\omega_*^2}{g \alpha_2} \frac{1}{\sqrt{h}} [A_2 J_1(2\sqrt{h}) + B_2 N_1(2\sqrt{h})] \sin \omega t,$$

$$h = \frac{[H_m - \alpha_2(x - x_m)](\omega^2 - 4\omega_*^2)}{g \alpha_2^2}, \quad x_m \leq x \leq x_2 \quad (121)$$

Здесь  $J_0, N_0, J_1$  и  $N_1$  – функции Бесселя и Неймана нулевого и первого порядка;  $A_1, B_1, A_2$  и  $B_2$  – произвольные постоянные.

С помощью решений (120) и (121) удовлетворим следующим условиям:

$$x = 0, x_2, \quad v_x = 0,$$

$$x = x_m, \quad [v_x], \quad [\zeta] = 0. \quad (122)$$

Здесь квадратные скобки означают скачок заключенных в них величин. В результате приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned} & [J_0(2\sqrt{h_{m1}}) - \beta_1 N_0(2\sqrt{h_{m1}})] \times \\ & \times [J_1(2\sqrt{h_{m2}}) - \beta_2 N_1(2\sqrt{h_{m2}})] + \\ & + [J_1(2\sqrt{h_{m1}}) - \beta_1 N_1(2\sqrt{h_{m1}})] \times \\ & \times [J_0(2\sqrt{h_{m2}}) - \beta_2 N_0(2\sqrt{h_{m2}})] = 0; \end{aligned}$$

$$h_{m2} = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} h_{m1}; \quad \beta_1 = \frac{J_1(2\sqrt{h_{01}})}{N_1(2\sqrt{h_{01}})}; \quad \beta_2 = \frac{J_1(2\sqrt{h_{02}})}{N_1(2\sqrt{h_{02}})};$$

$$h_{01} = \varepsilon_0 h_{m1}; \quad h_{02} = \varepsilon_0 \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} h_{m1}; \quad \varepsilon_0 = \frac{H_0}{H_m} \quad (123)$$

Уравнение (123) определяет счетное множество корней  $h_{m1}^k, k = 1, 2, \dots$ . Соответствующие этим корням собственные частоты  $\omega_k$  и периоды  $T_k$  сейшевых колебаний таковы:

$$\omega_k = \sqrt{4\omega_*^2 + \frac{g\alpha_1^2 h_{m1}^k}{H_m}}, \quad T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}. \quad (124)$$

Для амплитуд смещений поверхности жидкости справедливы выражения

$$\xi_a = \frac{\omega^2 - 4\omega_*^2}{2\omega_* g} A_1 [J_0(2\sqrt{h}) - \beta_1 N_0(2\sqrt{h})],$$

$$h = \frac{(H_0 + \alpha_1 x)(\omega^2 - 4\omega_*^2)}{g \alpha_1^2}, \quad 0 \leq x \leq x_m; \quad (125)$$

$$\xi_a = \frac{\omega^2 - 4\omega_*^2}{2\omega_* g} \beta_3 A_1 [J_0(2\sqrt{h}) - \beta_2 N_0(2\sqrt{h})],$$

$$\beta_3 = \frac{J_0(2\sqrt{h_{m1}}) - \beta_1 N_0(2\sqrt{h_{m1}})}{J_0(2\sqrt{h_{m2}}) - \beta_2 N_0(2\sqrt{h_{m2}})},$$

$$h = \frac{[H_m - \alpha_2(x - x_m)](\omega^2 - 4\omega_*^2)}{g \alpha_2^2}, \quad x_m \leq x \leq x_2. \quad (126)$$

Здесь  $A_1$  – произвольная постоянная.

В случае симметричного ( $x_m = (x_2/2)$ ) бассейна дисперсионное уравнение (123) разделяется на две ветви:

$$1) \quad J_1(2\sqrt{h_m}) - \beta N_1(2\sqrt{h_m}) = 0,$$

$$2) \quad J_0(2\sqrt{h_m}) - \beta N_0(2\sqrt{h_m}) = 0,$$

$$\beta = \frac{J_1(2\sqrt{h_0})}{N_1(2\sqrt{h_0})}, \quad h_0 = \varepsilon_0 h_m. \quad (127)$$

Уравнения (127) определяют счетное множество корней  $h_m^k, k = 1, 2, \dots$ . Соответствующие этим корням собственные частоты  $\omega_k$  и периоды  $T_k$  сейшевых колебаний таковы:

$$\omega_k = \sqrt{4\omega_*^2 + \frac{g\alpha^2 h_m^k}{H_m}}, \quad T_k = \frac{2\pi}{\omega_k},$$

$$\alpha = \frac{2(H_m - H_0)}{x_2}. \quad (128)$$

Для амплитуд смещений поверхности жидкости в случае собственных частот, определяемых первым и вторым уравнениями (127), имеют место, соответственно, выражения

$$\xi_a = \frac{\omega^2 - 4\omega_*^2}{2\omega_* g} A [J_0(2\sqrt{h}) - \beta N_0(2\sqrt{h})],$$

$$h = \frac{(H_0 + \alpha x)(\omega^2 - 4\omega_*^2)}{g\alpha^2}, \quad 0 \leq x \leq x_2/2,$$

$$h = \frac{(H_m - \alpha(x - \frac{x_2}{2}))(\omega^2 - 4\omega_*^2)}{g\alpha^2}, \quad \frac{x_2}{2} \leq x \leq x_2, \quad (129)$$

$$\xi_a = \frac{\omega^2 - 4\omega_*^2}{2\omega_* g} A [J_0(2\sqrt{h}) - \beta N_0(2\sqrt{h})],$$

$$h = \frac{(H_0 + \alpha x)(\omega^2 - 4\omega_*^2)}{g\alpha}, \quad 0 \leq x \leq x_2/2,$$

$$\xi_a = -\frac{\omega^2 - 4\omega_*^2}{2\omega_* g} A [J_0(2\sqrt{h}) - \beta N_0(2\sqrt{h})],$$

$$h = \frac{(H_m - \alpha(x - \frac{x_2}{2}))(\omega^2 - 4\omega_*^2)}{g\alpha^2}, \quad \frac{x_2}{2} \leq x \leq x_2. \quad (130)$$

Здесь  $A$  - произвольная постоянная.

В случае  $x_m = 0$  по всей ширине бассейна справедливо решение (121). Удовлетворяя с помощью этого решения условиям  $v_x = 0$  при  $x = 0$  и  $x_2$ , приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$J_1(2\sqrt{h_m})N_1(2\sqrt{\varepsilon_0 h_m}) - N_1(2\sqrt{h_m})J_1(2\sqrt{\varepsilon_0 h_m}) = 0. \quad (131)$$

Здесь величина  $\varepsilon_0$  определяется согласно последнего соотношения (123). Уравнение (131) определяет счетное множество корней  $h_m^k, k = 1, 2, \dots$ . Соответствующие этим корням собственные частоты  $\omega_k$  и периоды  $T_k$  сейшевых колебаний таковы:

$$\omega_k = \sqrt{4\omega_*^2 + \frac{g\alpha^2 h_m^k}{H_m}},$$

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k}, \quad \alpha_2 = \frac{H_m - H_0}{x_2}. \quad (132)$$

Для амплитуд смещений поверхности жидкости в рассматриваемом случае справедливо выражение

$$\xi_a = \frac{\omega^2 - 4\omega_*^2}{2\omega_* g} A_2 [J_0(2\sqrt{h}) - \frac{J_1(2\sqrt{h_m})}{N_1(2\sqrt{h_m})} N_0(2\sqrt{h})],$$

$$h = \frac{(H_m - \alpha_2 x)(\omega^2 - 4\omega_*^2)}{g\alpha_2^2}. \quad (133)$$

Здесь  $A_2$  - произвольная постоянная.

На основе соотношений (123), (127) и (131) были рассчитаны собственные частоты сейшевых колебаний в бассейнах рассматриваемого типа для следующих значений параметров:

$$H_0 = 1(\text{м}); \quad H_m = 1000, 4000(\text{м}); \quad x_2 = 1000(\text{км});$$

$$x_m = 100 \cdot n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 10; \quad \omega_* = 6, 3 \cdot 10^{-5}(\text{с}^{-1}). \quad (134)$$

Анализ результатов расчетов показал, что как при  $H_m = 1000\text{м}$ , так и при  $H_m = 4000\text{м}$  частоты слабо зависят от величины  $x_m$ . А именно, для данного номера гармоники расхождение составляет не более 20 %.

Большим глубинам соответствуют большие частоты. Последнее обстоятельство соответствует, в частности, результатам работ [13, 35], где численно исследованы сейшевые колебания жидкости в кольцевом бассейне переменной глубины при максимальных глубинах  $h_m = 1000$  и  $4000$  м, ширине  $950$  км и параметре Кориолиса  $2\omega_* = 12, 6 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ . Величины частот сейшевых колебаний, полученные в данной работе и работах [13, 35], сравнимы. Разница в значениях частот может быть не только эффектом геометрии, но и большей эффективной глубиной кольцевого бассейна за счет большей наполненности параболического профиля дна по сравнению с кусочно-линейным.

На основе соотношений (125), (126), (129), (130) и (133) были построены зависимости амплитуд сейшевых колебаний от координаты  $x$ . Типичные кривые представлены на рис. 2–4.

При их построении аналогично работам [13, 35] амплитуды нормированы на одинаковые максимальные значения, равные  $20$  см. В представленных на рисунках случаях амплитуды своих наибольших значений (по модулю) достигают у правой границы бассейна. При этом для  $x_m = (x_2/2)$  амплитуды своих наибольших (по модулю) значений достигают и у левой границы бассейна. Следует также отметить, что гармоникам 1 и 2 рис.

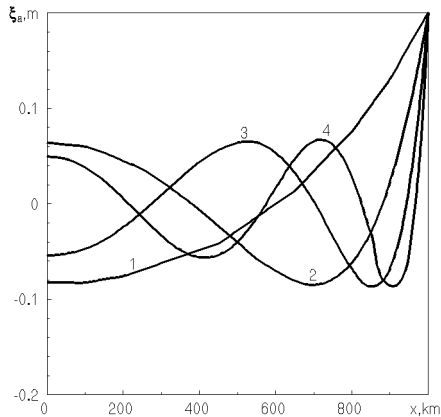


Рис. 2. Распределение амплитуд колебаний свободной поверхности при  $H_m = 1 \cdot 10^4$  м,  $x_m = 0$ :  
 1 –  $\omega_1 = 2,28 \cdot 10^{-4} c^{-1}$ ; 2 –  $\omega_2 = 3,71 \cdot 10^{-4} c^{-1}$ ;  
 3 –  $\omega_3 = 5,23 \cdot 10^{-4} c^{-1}$ ; 4 –  $\omega_4 = 6,77 \cdot 10^{-4} c^{-1}$

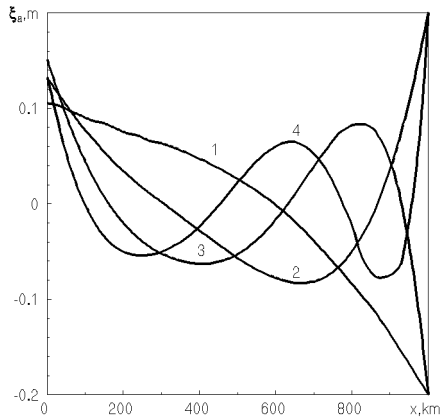


Рис. 3. Распределение амплитуд колебаний свободной поверхности при  $H_m = 1 \cdot 10^4$  м,  $x_m = 300$  км:  
 1 –  $\omega_1 = 2,57 \cdot 10^{-4} c^{-1}$ ; 2 –  $\omega_2 = 4,13 \cdot 10^{-4} c^{-1}$ ;  
 3 –  $\omega_3 = 5,57 \cdot 10^{-4} c^{-1}$ ; 4 –  $\omega_4 = 7,10 \cdot 10^{-4} c^{-1}$

2 соответствуют гармоники 2 и 4 рис. 3 и 4. Гармоникам же 3 и 4 рис. 2 соответствуют не изображенные на рис. 3 и 4 гармоники 6 и 8 (в порядке величины соответствующих частот).

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. На основе обобщенных потенциалов типа [50] общее решение линеаризованной системы уравнений магнитной гидродинамики идеальной проводящей жидкости, находящейся в постоянном маг-

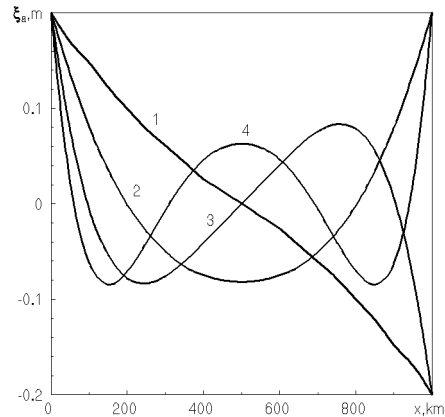


Рис. 4. Распределение амплитуд колебаний свободной поверхности при  $H_m = 1000$  м,  $x_m = 500$  км:  
 1 –  $\omega_1 = 2,70 \cdot 10^{-4} c^{-1}$ ; 2 –  $\omega_2 = 4,01 \cdot 10^{-4} c^{-1}$ ;  
 3 –  $\omega_3 = 5,63 \cdot 10^{-4} c^{-1}$ ; 4 –  $\omega_4 = 7,09 \cdot 10^{-4} c^{-1}$

нитном поле  $H_0 \vec{e}_z$ , в явном виде представлено через общие решения двух однородных волновых уравнений скоростями распространения сигналов  $v_a = \pm (H_0 / \sqrt{4\pi\rho_0})$  и общее решение уравнения Лапласа. Рассмотрен также несколько иной вариант ввода потенциалов. В этом случае общее решение исходной системы уравнений выражено через общие решения двух однородных волновых уравнений со скоростями распространения сигналов  $v_a$  и общее решение уравнения Пуассона. При этом правая часть уравнения Пуассона есть взятая со знаком минус производная по  $z$  от общего решения одного из указанных волновых уравнений. В случае, когда одна из координат циклическая ( $\partial/\partial y = 0$ ), на основе функции тока и ее магнитного аналога общее решение исходной системы уравнений также выражено через общие решения двух однородных волновых уравнений со скоростями распространения сигнала  $v_a$  и общее решение уравнения Лапласа.

2. На основе обобщенных потенциалов типа [50] проведено преобразование линеаризованной системы уравнений магнитной гидродинамики диссипативной проводящей жидкости, находящейся в постоянном магнитном поле  $H_0 \vec{e}_z$ . Задача сведена к отысканию решений трех независимых уравнений для трех обобщенных потенциалов. Уравнения для двух обобщенных потенциалов одинаковые и имеют четвертый порядок по производным. Уравнение для третьего обобщенного потенциала является уравнением Лапласа.

3. При наличии циклической координаты ( $\partial/\partial x_3 = 0$ ) на основе функции тока и ее магнитного аналога выполнено преобразование урав-

нений магнитной гидродинамики диссипативной вращающейся жидкости в нелинейном случае. Для определения функции тока  $\psi$ , ее магнитного аналога  $\psi_m$  и величин  $q \equiv h_3 v_3$  и  $q_m \equiv (h_3 H_3 / \sqrt{4\pi\rho_0})$ , где  $v_3$  и  $H_3$  – компоненты скорости и магнитного поля, касательные координатной линии  $x_3$ ,  $h_3$  – соответствующий коэффициент Ламе, получена система четырех нелинейных уравнений в частных производных. Показано, что при отсутствии вращения ( $\omega_* = 0$ ) и магнитного поля ( $\psi_m = 0, q_m = 0$ ) эта система переходит в систему уравнений работы [58], а при отсутствии только вращения – в систему уравнений работы [61].

4. Рассмотрена линейная система уравнений динамики вращающейся однородной жидкости в приближении мелкой воды, служащей для определения двух горизонтальных компонент скорости и возвышения свободной поверхности. Для обобщенного потенциала, через который в явном виде выражены вектор скорости и возвышение свободной поверхности, получено линейное дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка в общем случае с переменными коэффициентами. При постоянной глубине бассейна все коэффициенты в уравнении для обобщенного потенциала также постоянны. Решение уравнения для обобщенного потенциала в этом случае представляет сумму двух слагаемых, одно из которых удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона [5, 34]. Второе слагаемое является произвольной функцией координат. В течении, описываемом этим слагаемым, сила Кориолиса и сила, обусловленная гравитацией, уравновешивают друг друга. Показано, что исходная система трех скалярных уравнений допускает также существование двух в некотором смысле особых скалярных потенциалов, удовлетворяющих системе двух уравнений. Одно из этих уравнений имеет второй порядок как по времени, так и по координатам. В другое уравнение входят только первые производные по времени. Как представляется, в силу определенной симметрии вхождения в полученную систему обобщенных потенциалов она может оказаться полезной при численных расчетах.

5. На основе полученного уравнения для обобщенного потенциала изучена задача о сейшевых колебаниях в бассейне переменной глубины. Стенки и дно бассейна параллельны оси  $y$  и имеют вдоль нее бесконечную длину. Ширина бассейна  $x_2$  (ось  $x$  направлена поперек бассейна). Обе вертикальные стенки бассейна достигают глубины  $H_0$ . Профиль дна бассейна кусочно–линеен. Максимальная глубина бассейна  $H_m$  достигается при  $x = x_m$  ( $0 \leq x_m \leq x_2$ ). Рассмотрены колебания,

в которых физические величины не зависят от  $y$ . В этом случае компоненты скорости и возвышение поверхности жидкости в явном виде выражены через функции Бесселя нулевого и первого порядка. Получено дисперсионное уравнение. Расчеты значений собственных частот и амплитуд колебаний проводились для  $H_0 = 1$  (м),  $H_m = 1000, 4000$  (м),  $x_2 = 1000$  (км),  $x_m = n \cdot 100$  (км),  $n = 0, 1, 2, \dots, 10$  и параметра Кориолиса  $2\omega_* = 12,6 \cdot 10^{-5} c^{-1}$ . Анализ результатов расчетов показал, что как при  $H_m = 1000$  м, так и при  $H_m = 4000$  м частоты слабо зависят от величины  $x_m$ . А именно, для данного номера гармоники расхождение составляет не более 20 %. Большим глубинам соответствуют большие частоты. Последнее обстоятельство соответствует, в частности, результатам работ [13, 35], где численно исследованы сейшевые колебания жидкости в кольцевом бассейне переменной глубины при максимальных глубинах  $H_m = 1000$  и 4000 (м), ширине 950 км и параметре Кориолиса  $2\omega_* = 12,6 \cdot 10^{-5} c^{-1}$ . Величины частот сейшевых колебаний, полученные в данной работе и работах [13, 35], сравнимы. Разница в значениях частот может быть пояснена не только эффектом геометрии, но и большей эффективной глубиной кольцевого бассейна за счет большей наполненности параболического бассейна по сравнению с кусочно–линейным. При построении зависимостей амплитуд сейшевых колебаний от координаты  $x$  амплитуды нормировались на одинаковые максимальные значения. Рассмотрение этих зависимостей показало, что наибольших (по модулю) значений амплитуды достигают у одной из границ бассейна. В случае, когда максимальное значение глубины бассейна приходится на его середину,  $x_m = (x_2/2)$ , наибольших своих значений амплитуды достигают у обеих границ бассейна.

Предложенные новые представления общих решений линеаризованных уравнений магнитной гидродинамики недиссипативной и диссипативной жидкости и динамики вращающейся однородной жидкости в приближении мелкой воды расширяют возможности решения соответствующих прикладных задач. Существенное значение имеет редукция основных начально–краевых задач к скалярным задачам для одного или нескольких независимых уравнений, определяющих некоторые обобщенные потенциалы. Наиболее эффективно такой подход проявляется при использовании численных методов [10]. А именно, сокращение числа искоемых функций до одной скалярной или нескольких независимых скалярных приводит к значительной экономии машинного времени и ресурса используемых ЭВМ [10].

Выполненное преобразование нелинейных уравнений магнитной гидродинамики диссипативной вращающейся жидкости при наличии циклической координаты на основе функции тока и ее магнитного аналога имеет существенное значение как с точки зрения применения численных методов к решению прикладных задач, так и с точки зрения разработки и апробации различных приближенных (асимптотических) алгоритмов анализа особенностей полей физических величин.

1. Алешков Ю.З. Течение и волны в океане.– Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1996.– 226 с.
2. Альфвен Г., Фальтхаммар К. Г. Космическая электродинамика.– М.: Мир, 1967.– 260 с.
3. Аршимович Л.А., Сагдеев Р.Э. Физика плазмы для физиков.– М.: Атомиздат, 1979.– 472 с.
4. Бескин В.С. Осесимметричные стационарные течения в компактных астрофизических объектах // Успехи физ. наук.– 1997.– 167, N 7.– С. 689–720.
5. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантовых полей.– М.: Наука, 1976.– 416 с.
6. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред.– М.: Наука, 1982.– 336 с.
7. Валуманис Я., Шишко А., Шим Я.Я. Разработка теоретических основ расчета плоского индукционного МГД затвора // Магнитная гидродинамика.– 1997.– 33, N 1.– С. 81–94.
8. Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А. Магнитогазодинамические течения в каналах.– М.: Наука, 1970.– 672 с.
9. Велихов Е.П., Матвеев О.Г., Панченко В.П. и др. Импульсная МГД-установка "Сахалин" электрической мощностью 500 Мвт на твердом пороховом топливе // ДАН (Россия).– 2000.– 370, N 5.– С. 617–622.
10. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн.– М.: Наука, 1990.– 344 с.
11. Гринепен Х. Теория вращающихся жидкостей.– Л.: Гидрометеиздат, 1975.– 304 с.
12. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– Киев: Наук. думка, 1981.– 284 с.
13. Губанова О.В., Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В. Исследование влияния геометрии бассейна на структуру сейшевых колебаний // Мор. гидрофиз. журн.– 2000.– N 1.– С. 19–30.
14. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн.– Киев: Наук. думка, 1978.– 308 с.
15. Емец Ю.П. Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред.– Киев: Наук. думка, 1987.– 256 с.
16. Задорожный А.И., Грунтфест Р.А. Собственные колебания жидкости конечной электропроводности при наличии внешнего магнитного поля // ПМТФ.– 2000.– 41, N 2.– С. 3–10.
17. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме.– М.: Наука, 1988.– 304 с.
18. Кадомцев Б.Б. От МТР до ИТЭР // Успехи физ. наук.– 1996.– 166, N 5.– С. 449–458..
19. Калихман Л.Е. Элементы магнитной газодинамики.– М.: Атомиздат, 1964.– 424 с.
20. Капуста А.Б., Шамота В.П. Течія провідної рідини під дією обертового магнітного поля.– Макіївка: Дон ДАБА, 1999.– 162 с.
21. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.– М.: Наука, 1968.– 720 с.
22. Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Д. О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Журн. вычисл. математики и мат. физ.– 1999.– 39, N 6.– С. 1006 – 1022..
23. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления.– М.: Наука, 1965.– 428 с.
24. Курилко В.И., Ткач Ю.В. Физические механизмы формирования когерентного излучения в ультрафиолетовых ЛСЭ // Успехи физ. наук.– 1995.– 165, N 3.– С. 241–261.
25. Ладиков Ю.П. Стабилизация процессов в сплошных средах.– М.: Наука, 1978.– 432 с.
26. Ладиков Ю.П., Ткаченко В.Ф. Гидродинамические неустойчивости в металлургических процессах.– М.: Наука, 1983.– 248 с.
27. Ламб Г. Гидродинамика.– М.–Л.: Гостехтеориздат, 1947.– 928 с.
28. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред.– М.: Наука, 1982.– 532 с.
29. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика.– М.: Наука, 1986.– 736 с.
30. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 1.– М.: Мир, 1981.– 480 с.
31. Луковский И.А. Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость.– Киев: Наук. думка, 1990.– 296 с.
32. Мадерич В.С., Никишов В.И., Степенко А.Г. Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде.– Киев: Наук. думка, 1988.– 240 с.
33. Математика Большой энциклопедический словарь.– М.: Науч. изд-во "Большая Российская энциклопедия", 1998.– 848 с.
34. Математическая энциклопедия Т.2.– М.: Изд-во "Советская энциклопедия", 1979.– 552 с.
35. Миклашевская Н.А., Черкесов Л.В. Сейши в кольцевом бассейне переменной глубины // Мор. гидрофиз. журн.– 1999.– N 1.– С. 11–20.
36. Михайловский А.Б., Хаусланс Г.Т.А., Кернер В.О. Оптимизация численного анализа МГД-мод в токамаках // Физика плазмы.– 1997.– N 10.– С. 916–930.
37. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики: В 2-х т., Т.2.– М.: Изд-во иностр. лит., 1960.– 896 с.
38. Моффат Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде.– М.: Мир, 1980.– 344 с.
39. Панченко В.Т. Энтропия.– Нижний Новгород: Изд-во общества "Интелсервис", 1999.– 600 с.
40. Пинчак А., Жукоски Э. Прикладная магнитная гидродинамика.– М.: Мир, 1965.– 456 с.
41. Повх И.Л., Капуста А.Б., Чекин Б.В. Магнитная гидродинамика в металлургии.– М.: Металлургия, 1974.– 276 с.
42. Половин Р.В., Демущий В.П. Основы магнитной гидродинамики.– М.: Энергоатомиздат, 1987.– 208 с.
43. Прист Э.Р. Солнечная магнитогазодинамика.– М.: Мир, 1985.– 600 с.



44. Салтанов Н.В. Аналитическая гидромеханика.– Киев: Наук. думка, 1984.– 200 с.
45. Салтанов Н.В. Аналитическая и прикладная гидромеханика при наличии источников // Прикладная гидромеханика.– Киев: Наук. думка.– 1989.– С. 145–168.
46. Салтанов Н.В. Обобщенный потенциал в теории однородных винтовых потоков несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР.– 1989.– **305**, N **6**.– С. 1325–1327.
47. Салтанов Н.В. Новые представления общего решения системы уравнений Стокса // Докл. АН СССР.– 1990.– **312**, N **1**.– С. 76–79.
48. Салтанов Н.В. Обобщенный гидродинамический потенциал и его аналоги в теории упругости // Прикл. механика.– 1990.– **26**, N **4**.– С. 97–101.
49. Салтанов Н.В. Аналогии обобщенных гидродинамических потенциалов в теории уравнений Ламе и Максвелла // Укр. мат. журн.– 1990.– **42**, N **5**.– С. 649–654.
50. Салтанов Н.В. К представлениям общих решений уравнения Ламе и векторного волнового уравнения // Прикл. механика.– 1990.– **26**, N **7**.– С. 108–111.
51. Салтанов Н.В., Горбань В.А. Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения.– Киев: Наук. думка, 1993.– 244 с.
52. Салтанов Н.В., Салтанов В.Н. К магнитной гидродинамике вращающейся неоднородной жидкости в стационарном случае // Прикладная гидромеханика.– 1999.– **1(73)**, N **3**.– С. 32–47.
53. Седов Л.И., Цыпкин А.Г. Основы макроскопических теорий гравитации и электромагнетизма.– М.: Наука, 1989.– 272 с.
54. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов.– Киев: Наук. думка, 1989.– 204 с.
55. Селезов И.Т., Корсунский С.В. Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах.– Киев: Наук. думка, 1991.– 200 с.
56. Селезов И.Т., Селезова Л.В. Волны в магнитогидроупругих средах.– Киев: Наук. думка, 1975.– 164 с.
57. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. Математики.– 1954.– **18**, N **1**.– С. 3–50.
58. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости. / Под ред. С. Гольдштейна.– М.: ИЛ, 1948. – 380 с.
59. Тарапов И.Е. О некоторых основных задачах механики сплошной среды переменной массы // Прикладная гидромеханика.– 1999.– **1(73)**, N **4**.– С. 61–76.
60. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1977.– 736 с.
61. Ткалич В.С. О нестационарных движениях в неидеальной магнитной гидромеханике // Изв. АН СССР, ОТН, Машиностроение.– 1961.– N **5**.– С. 22–29.
62. Ткалич В.С. Нелинейные симметричные задачи магнитной гидродинамики.– Автореф. дисс. соиск. учен. степ. докт. физ.–мат. наук: Новосибирск: НГУ, 1967.– 60 с.
63. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости.– Киев: Наук. думка, 1979.– 264 с.
64. Шамота В.П. Вращение проводящей жидкости электромагнитным полем // Магнитная гидродинамика.– 1997.– **33**, N **1**.– С. 52–55.
65. Шамота В.П. Взаимодействие жидкого металла и вращающегося магнитного поля // Прикладная гидромеханика.– 1999.– **1(73)**, N **4**.– С. 77–82.
66. Шатров В., Мютчке Г., Гербет Г. Численное моделирование двухмерного МГД течения при обтекании круглого цилиндра // Магнитная гидродинамика.– 1997.– **33**, N **1**.– С. 5–15.
67. Яньков В.В. Аттракторы и инварианты в замороженности в турбулентной плазме // Успехи физ. наук.– 1997.– **167**, N **5**.– С. 499–516.
68. Ярмицкий А.Г. Обобщение классических задач гидромеханики вихревых течений.– Мариуполь: ПГТУ, 1997.– 140 с.
69. Berger N.W., Kim J, Lee C., Lim J. Turbulent boundary layer control utilizing the Lorentz force // Physics of fluids.– 2000.– **12**, N **3**.– P. 631–649.
70. Birgyzan G.S. Elements of Technical Theory of MHD flows of incompressible conducting fluid on channel with inclined bottom // Магнитная гидродинамика.– 1997.– **33**, N **1**.– С. 25–29.
71. Marty P., Witkowski L.M. Influence of a magnetic field on the stability of a liquid metal layer // Магнитная гидродинамика.– 1997.– **33**, N **1**.– С. 35–47.
72. Witkowski L.M., Walker J.S., and Marty P. Nonaxisymmetric flow in a finite-length cylinder with a rotating magnetic field. // Physics of Fluids.– 1999.– **11**, N **7**.– P. P.1821–1826.