

А. И. Закидальский, Е. А. Цыбульская

Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н.Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Преобразование конусного пучка в квазипараллельные слои веерного типа для повышения производительности реконструкции томографических изображений

Рассмотрен метод интерполяции, основанный на приближенном интегрировании вдоль прямой заданного направления. Показано, что преобразование конусного пучка в квазипараллельные слои веерного типа с помощью этого метода позволяет повысить эффективность объемной реконструкции больших объектов за счет уменьшения вычислений при свертке и упрощения обратного проецирования.

Ключевые слова: компьютерная томография, объемная реконструкция, конусный пучок, квазипараллельные слои веерного типа, свертка, обратное проецирование.

Суть метода преобразования конусного пучка в квазипараллельные слои веерного типа заключается в следующем.

Пусть имеется расходящийся пучок прямых на плоскости (рис. 1,а). Вдоль каждой прямой внутри ограниченного пространства (прямая АВ) определено значение интеграла. Это дает возможность приближенно определить среднее значение функции внутри данного ограниченного пространства. Применяя соответствующий численный метод интегрирования, можно определить искомое значение интеграла вдоль заданного направления (прямая АВ, рис. 1,б).

Практическая реализация метода интегрирования по заданному направлению заключается в определении весовых коэффициентов для интегралов вдоль прямых внутри ограниченного пространства (АВ). Для преобразования проекционных данных конусного пучка (АВ рис. 1,а) в данные квазипараллельных слоев веерного типа (АВ рис. 1,б) достаточно получить значения весовых коэффициентов преобразования веерного пучка в параллельные лучи.

Рассмотрим следующие условия:

- расстояние источник-центр вращения объекта равно R ;
- сканирование производится при охвате детекторной системой 50 % углового размера объекта;
- цилиндрический детектор обеспечивает сбор проекционных данных в угловом секторе $2\gamma_{max}$.

© А. И. Закидальский, Е. А. Цыбульская

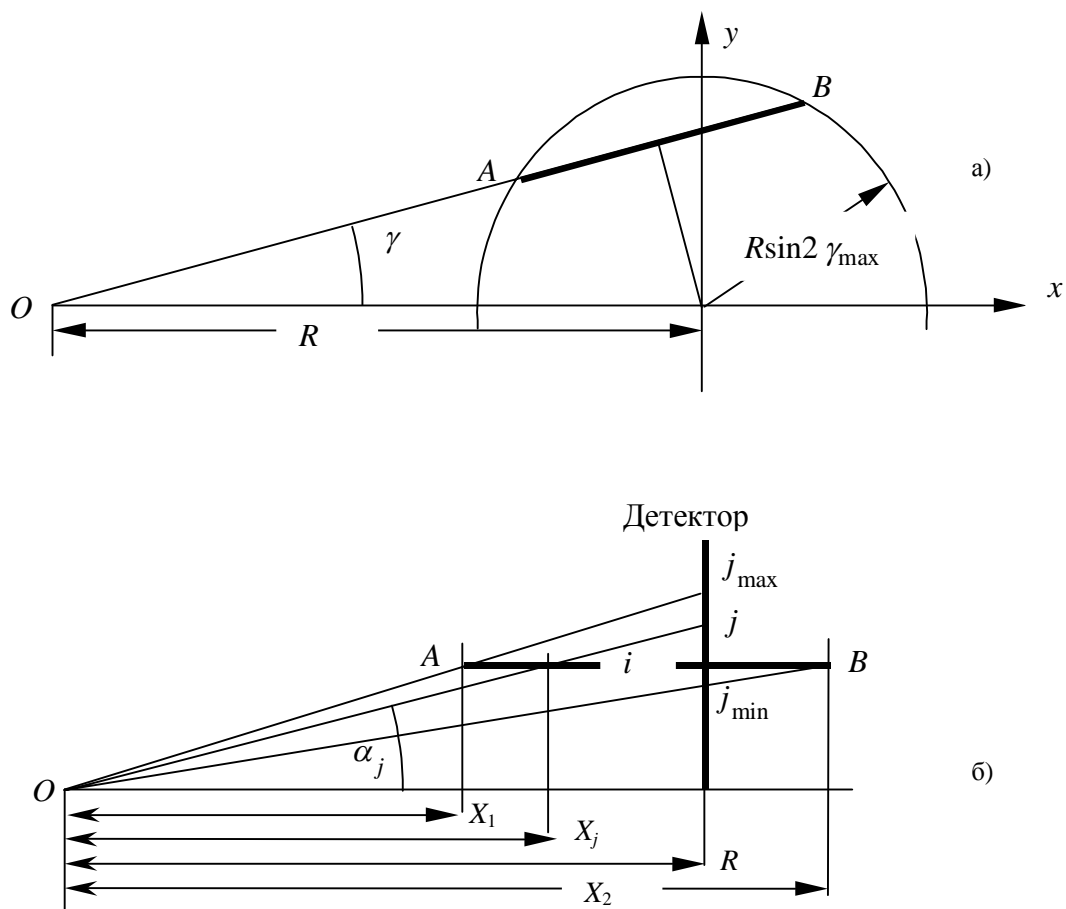


Рис. 1.

Так как для проекции $p(\beta, \gamma, j)$ значения β и γ фиксированные, обозначим $p(\beta, \gamma, j)$ как $p(j)$. По определению, среднее значение плотности проекции $p(j)$ внутри цилиндрической зоны реконструкции (рис. 1) равно величине $\frac{p(j)}{x_2 - x_1} \cos \alpha_j$.

Тогда интеграл линейного ослабления в i -м слое вдоль прямой АВ будет равен

$$p(i) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{p(j)}{x_2 - x_1} \cos(\alpha_j) dx. \quad (1)$$

Сделав замену переменной, представим интеграл линейного ослабления вдоль заданного направления для i -го слоя в виде:

$$p(i) = \frac{j_{\min} j_{\max}}{j_{\min} - j_{\max}} \int_{j_{\min}}^{j_{\max}} \frac{p(j)}{j^2 \sqrt{1 + (k \cdot j)^2}} dj, \quad (2)$$

где i — номер параллельного слоя; $i = -i_{\max} \dots i_{\max}$;
 j — номер детектора по координате z ;
 j_{\min}, j_{\max} — диапазон номеров детекторов, формирующих $p(i)$;
 k — угловой шаг по детекторам $k = 2\gamma_{\max} / (Nd_g - 1)$;
 Значения номеров детекторов по координате z является линейной функцией номера слоя i , положения γ и параметра детекторной системы γ_{\max} .
 Их величина определяется выражениями:

$$\begin{cases} j_{\min} = \frac{i}{\cos(\gamma) + \sqrt{\cos(\gamma)^2 - \cos(2 \cdot \gamma_{\max})^2}}; \\ j_{\max} = \frac{i}{\cos(\gamma) - \sqrt{\cos(\gamma)^2 - \cos(2 \cdot \gamma_{\max})^2}}. \end{cases} \quad (3)$$

Численные значения весовых коэффициентов зависят от выбора представления функции $p(j)$ суммой определенного вида интерполирующих множителей. В качестве последних при учете ограниченности частотного спектра целесообразно использовать представление функции $p(j)$ взвешенной суммы интерполирующих множителей вида $\text{sinc}(\pi x)$ ($\text{sinc}(\pi x) = \sin(\pi x) / (\pi x)$). Однако учет ограниченности частотного спектра приводит к появлению большого количества весовых коэффициентов. На рис. 2 приведен график зависимости весовых коэффициентов от номера детектора по оси z при sinc-интерполяции. Как видно из графика, формирование отсчетов для параллельного слоя требует Ndz весовых коэффициентов, подавляющее большинство из которых пренебрежимо мало. Здесь Ndz — общее количество детекторов по оси z .

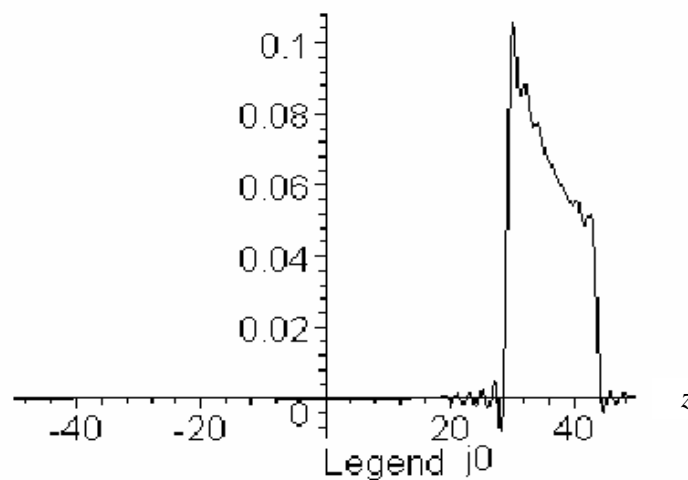


Рис. 2.

Далее для слоя i при заданных γ_{\max} и γ в соответствии с выражением (3) определяются значения j_{\min} и j_{\max} . В результате весовые коэффициенты при sinc-интерполяции можно вычислить по формуле:

$$w(i, j_0) = \frac{j_{\min} \cdot j_{\max}}{j_{\max} - j_{\min}} \int_{j_{\min}}^{j_{\max}} \frac{\sin(\pi(j - j_0))}{\pi(j - j_0)} \cdot \frac{dj}{j^2 \cdot \sqrt{1 + k^2 \cdot j^2}} \quad (4)$$

После рассмотрения sinc-интерполяции остановимся на линейной интерполяции, более эффективной в вычислительном плане. Так, ограничение длины интерполирующих множителей только соседними отсчетами позволяет в несколько раз уменьшить количество весовых коэффициентов и, соответственно, во столько же раз уменьшить объем вычислений при расчете проекций параллельных слоев.

Весовой коэффициент $w(i, j_0)$ можно представить в виде суммы двух составляющих: левой (w_{-j_0l}) и правой (w_{-j_0r}):

$$w(i, j_0) = w_{-j_0l} + w_{-j_0r},$$

где

$$w_{-j_0l} = m \left(\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \frac{(j_0 - 1)(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} - \frac{k^2 (x_2 - x_1)(x_1 - 2j_0 + 2 + x_2)}{4} \right); \quad (5)$$

$$w_{-j_0r} = m \left(\frac{(j_0 + 1)(x_2 - x_1)}{x_1 x_2} - \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \frac{k^2 (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2j_0 - 2)}{4} \right). \quad (6)$$

Масштабный коэффициент m вычисляется по формуле:

$$m = \frac{j_{\min} \cdot j_{\max}}{j_{\max} - j_{\min}}. \quad (7)$$

Значения j_{\min} и j_{\max} определены в (3).

В этом случае число отличных от нуля весовых коэффициентов сокращается примерно в 4–6 раз.

Как видно из (3), в формировании параллельной проекции i -го слоя для заданного γ примут проекции с номерами от j_{\min} до j_{\max} . Для оценки числа проекций Δj примем

$$\Delta j \cong j_{\max} - j_{\min}.$$

Используя (3), получим приближенную оценку $\Delta j(i, \gamma, \gamma_{\max})$ для i -го слоя

$$\Delta j(i, \gamma, \gamma_{\max}) = i \cdot 2 \frac{\sqrt{\cos(\gamma)^2 - \cos(2\gamma_{\max})^2}}{\cos(2\gamma_{\max})^2}. \quad (8)$$

Всего участвующих в формировании параллельных проекций для слоев $i = 1 \dots i_{\max}$

$$\sum_{i=1}^{i_{\max}} \Delta j(i, \gamma, \gamma_{\max}) = i_{\max} (1 + i_{\max}) \frac{\sqrt{\cos(\gamma)^2 - \cos(2\gamma_{\max})^2}}{\cos(2\gamma_{\max})^2}. \quad (9)$$

Определим i_{\max} как максимальное расстояние параллельного слоя от плоскости сканирования. Пусть при данном числе детекторов по координате z (Ndz) любой пересекающий i_{\max} -слой луч регистрируется детекторной системой. Тогда

$$i_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (Ndz - 1)(1 - \sin(2\gamma_{\max})). \quad (10)$$

Рассмотрим реконструкцию всех слоев $-i_{\max} \leq i \leq i_{\max}$ при использовании как алгоритма Фельдкамп, так и в случае алгоритма с преобразованием в параллельные слои. Случай реконструкции для параллельных слоев $i = 1 \dots i_{\max}$ соответствует при использовании алгоритма Фельдкамп свертке $(Ndz - 1)/2$ слоев.

На основании (9) с учетом (10) и при условии $Ndz \gg 1$ получим значение трудоемкости преобразования в параллельные слои по отношению к трудоемкости свертки

$$fprsw = \frac{(1 - \sin(2\gamma_{\max}))^2 \sqrt{\cos(\gamma)^2 - \cos(2\gamma_{\max})^2}}{2 \cos(2\gamma_{\max})^2}. \quad (11)$$

Как видно из (11), соотношение трудоемкости зависит от γ . Усреднив по γ , получим оценку среднего значения соотношения трудоемкости

$$fprsw_{-sr} = \frac{[\sin(2\gamma_{\max}) + 4\sqrt{\cos(\gamma_{\max})^2 - \cos(2\gamma_{\max})^2}] \cdot (1 - \sin(2\gamma_{\max}))^2}{12 \cos(2\gamma_{\max})^2}. \quad (12)$$

Оценим вычислительные затраты при получении свертки параллельных слоев. Для получения свернутых значений проекций параллельных слоев сначала необходимо дополнительно выполнить преобразование проекционных данных конусного пучка. Однако в данном случае сама свертка должна выполняться над последовательностями такой же длины, но для меньшего числа рядов. Объемная реконструкция по методу Фельдкамп предполагает свертку проекционных данных всех Ndz рядов матричного детектора. В случае свертки данных параллельных слоев их число несколько меньше и равно $2i_{\max} + 1$ рядам. Следовательно, объем вычислений при свертке для параллельных слоев составит часть $(2i_{\max} + 1) / Ndz$ объема вычислений при свертке по Фельдкамп. В результате, с учетом дополнительных преобразований для получения свернутых значений проекций параллельных слоев, всего необходимо выполнить некоторую часть χ операций свертки

по Фельдкампфу. На основании (10) и (12) при условии $Ndz \gg 1$ получим оценку относительных затрат χ в зависимости от значения γ_{\max} :

$$\chi = 1 - \sin(2\gamma_{\max}) + \frac{\sin(2\gamma_{\max})(1 - \sin(2\gamma_{\max}))^2}{2 \cos(2\gamma_{\max})^2}. \quad (13)$$

Таким образом, суммарные вычислительные затраты на преобразование конусного пучка в параллельные слои с последующей их сверткой меньше затрат на свертку в алгоритме Фельдкампфа. Изложенное выше позволило создать эффективные по быстродействию приближенные алгоритмы реконструкции при частичном охвате объекта системой «источник-детектор».

Выводы

Повышения эффективности объемной реконструкции можно достигнуть при помощи преобразования конусного пучка в квазипараллельные слои веерного типа. При этом уменьшение вычислений при свертке и особенно упрощение обратного проецирования существенно окупает вычислительные затраты на преобразование в квазипараллельные слои веерного типа.

1. Терновой К.С., Синьков М.В., Закидальский А.И., Яник А.Ф. и др. Введение в современную томографию.— К.: Наук. думка, 1983. — 345 с.
2. Henrik Turbell. Cone-Beam Reconstruction Using Filtered Backprojection. — Dissertation № 672, Linköping Studies in Science and Technology (Sweden). — 2001.
3. F. Noo, M. Defrise and R. Clackdoyle. Single-Slicerebinning Method for Helical Cone-Beam CT // Phys. Med. Biol. — 1999. — Vol. 44. — P. 561–570.
4. M. Grass, T. Köhler, and R. Proksa. 3D Cone-Beam CT Reconstruction for Circular Trajectories // Phys. Med. Biol. — 2000. — Vol. 45, N 2. — P. 329–347.
5. Eriksson J. Problems and Experiments in Cone-Beam Tomography // Tech. Rep. Lic. thesis 710, Linköping Univ (Sweden)/ — 1998.
6. Синьков М.В., Закидальский А.И. Объемная реконструкция «больших» объектов на томографах с ограниченной по размерам матрицей детекторов // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2003. — Т. 5, № 3. — С. 18–25.

Поступила в редакцию 15.06.2004