

УДК 519.81

Е. К. Косарев¹, В. Г. Тоценко²

¹Национальный технический университет Украины «КПИ»
пр. Победы, 37, 03056 Киев, Украина

²Институт проблем регистрации информации НАН Украины
ул. Н. Шпака, 2, 03113 Киев, Украина

Метод повышения внутренней согласованности результатов парных сравнений без обратной связи с экспертом

Предложен метод повышения уровня внутренней согласованности результатов парных сравнений без обратной связи с экспертом. Метод основан на использовании последовательного расчета компонент весов объектов, формировании спектров компонент весов, вычислении количественных оценок согласованности спектров, определении достаточности уровня согласованности спектров и их коррекции без вмешательства эксперта.

Ключевые слова: экспертные оценки, парные сравнения, согласованность оценок, поддержка принятия решений.

Введение

Метод парных сравнений широко применяется для определения показателей значимости объектов относительно выбранного качественного критерия при их незначительных отличиях. Этот метод используются для решения задач ранжирования объектов в соответствии с критерием, отражающим некоторое общее для этих объектов свойство [1–4]. Однако в последнее десятилетие, особенно в связи с развитием методов многокритериальной оптимизации [5], аналитических иерархических процессов (АИП) [6], аналитических сетевых процессов (АСП) [7] и методов поддержки принятия решений, которые основаны на использовании иерархии целей [8, 9], парные сравнения стали применяться для определения относительных приоритетов w_i , $i = (1, m)$, объектов (критериев, целей, объектов). При решении задач целевого программирования [10] веса (приоритеты, коэффициенты значимости) критериев и объектов также являются оценками такого типа. Эти величины представляют собой относительные количественные показатели степени выраженности некоторого свойства у каждого объекта из заданного множества.

© Е. К. Косарев, В. Г. Тоценко

Метод парных сравнений является методом относительных измерений, сущность которого состоит в том, что путем сравнений в общем случае каждого объекта со всеми другими из данного множества определяются элементы матрицы $V_{m \times m}$, где элемент v_{ij} есть соответствующее действительное число, которое определяет результат сравнения объекта i с объектом j относительно некоторого их общего свойства (критерия). Относительные приоритеты w_i вычисляются как результаты обработки матрицы сравнений.

Результаты сравнений объектов по качественным критериям обычно выражают в так называемой фундаментальной шкале [6, 7]. Эта шкала имеет такие значения степеней превосходства одного объекта над другим: «эквивалентность (1)», «слабое преимущество (2)», «умеренное преимущество (3)», «умеренное плюс преимущество (4)», «сильное преимущество (5)», «сильное плюс преимущество (6)», «очень сильное или очевидное преимущество (7)», «очень, очень сильное преимущество (8)», «чрезвычайное преимущество (9)». В скобках записаны числовые эквиваленты степеней преимущества. Таким образом, результаты сравнений объектов как по количественным, так и по качественным критериям могут быть выражены в виде матрицы $m \times m$ соответствующих действительных чисел. Отметим, что эти числа не имеют размерности, т.е. не зависят от единицы измерения степени выраженности свойства.

При выполнении парных сравнений, как правило, возникают внутренние противоречия суждений эксперта, высказанных им при сравнении различных пар объектов. Вследствие этого результаты вычислений величин приоритетов объектов не могут быть использованы, если величина показателя согласованности меньше некоторого предельного значения. При этом достоверность результатов существенно зависит от степени согласованности оценок эксперта относительно степеней преимуществ объектов, т.е. от внутренней согласованности множества оценок эксперта.

Природа внутренней несогласованности отличается от природы внешней несогласованности, которая имеет место при привлечении к экспертизе нескольких экспертов и состоит в том, что благодаря различию суждений экспертов каждый объект получает не одну, а несколько различных оценок показателя значимости, вычисленных по результатам парных сравнений, выполненных соответствующим экспертом. При этом каждое множество результатов парных сравнений может быть внутренне согласованным.

Для повышения уровня внутренней согласованности результатов парных сравнений в [11–13] было предложено использование обратной связи с экспертом. Как показывают экспериментальные исследования [14, 15], введение обратной связи с экспертом приводит к повышению точности результирующих экспертных оценок, однако при этом увеличивается продолжительность процесса оценивания. Поэтому возникает необходимость разработки метода повышения уровня внутренней согласованности результатов парных сравнений без привлечения для этого эксперта. Такой метод и предлагается в настоящей статье. Вначале он излагается применительно к методу парных сравнений «квадрат», затем описываются особенности его реализации применительно к методу «треугольник» [12, 13].

Повышение внутренней согласованности результатов парных сравнений методом «квадрат»

Решаемая задача формулируется следующим образом.

Дано: матрица парных сравнений D размерности $m \times m$, где d_{ij} есть результат сравнения объекта A_i с объектом A_j , выраженный в соответствующей шкале.

Требуется, не обращаясь к эксперту, вычислить обобщенные достаточно внутренне согласованные значения относительных весов объектов $A_i \in A$, $i = (1, m)$ (условия достаточности внутренней согласованности излагаются ниже).

Сформулированная задача решается в несколько этапов:

- 1) последовательная обработка фрагментов матрицы сравнений;
- 2) формирование интегрированных спектров значений весов объектов;
- 3) количественная оценка степени согласованности интегрированных спектров значений весов объектов;
- 4) определение достаточности степени согласованности интегрированных спектров значений весов объектов;
- 5) преобразование интегрированных спектров значений весов объектов с целью достижения достаточной степени согласованности;
- б) определение значений относительных весов объектов по достаточно согласованным спектрам значений их весов.

Рассмотрим более подробно сущность каждого из этих этапов.

1. Последовательная обработка фрагментов матриц сравнений

Не теряя общности, выберем в качестве фрагмента матрицы строку, обозначенную объектом A_i , элементы d_{ij} ($j = (1, m)$) которой представляют результаты сравнения объекта A_i со всеми остальными. Введем понятия абсолютного веса v_i объекта A_i , под которым будем понимать количественную меру степени выраженности у объекта A_i свойства, описываемого критерием C . Зададим функцию

$$v_j = f(v_i, d_{ij}). \quad (1)$$

Очевидным требованием к функции (1) есть монотонность. Вид этой функции зависит от типа вопросов, которые ставятся перед экспертом в ходе парных сравнений. Если эксперту задают вопрос: «Во сколько раз объект A_i превосходит объект A_j относительно критерия C ?» (мультипликативные сравнения), то

$$v_j = v_i \varphi(d_{ij}), \quad (2)$$

где $\varphi(d_{ij})$ — произвольная монотонная функция, которая удовлетворяет условию

$$\varphi(1) = 1.$$

При использовании аддитивных парных сравнений эксперту предлагают определить: «На сколько объект A_i превосходит объект A_j относительно критерия C ?». При этом

$$v_j = v_i + \lambda(d_{ij}),$$

где $\lambda(d_{ij})$ — произвольная монотонная функция, которая удовлетворяет условию

$$\lambda(0) = 0.$$

Если без потери общности предположить, что $df(v_i; d_{ij})/d(d_{ij}) < 0$, то объект A_j , которому соответствует j -й столбец матрицы парных сравнений (МПС), имеет наибольший вес. Назовем этот объект *доминирующим* по i -й строке МПС и обозначим его через $A_j = A_{di}$, а его вес — через $v_j^i = v_d^i$. Используя выражение

$$v_i^i = f(v_i^i, d_{ij}^i), \quad (3)$$

определим ненормализованное значение веса i -го объекта. Будем называть v_i^i *собственным* весом объекта A_i .

Из выражения

$$v_h^i = f(v_i^i, d_{ih}^i) \quad (4)$$

определим веса v_h^i ($h \neq i, h \neq j$) всех остальных объектов. Эти значения в дальнейшем будем называть *транзитивными*.

Повторяя этот процесс для каждой строки МПС, для каждого h -го объекта, сформируем множество $V_h = \{v_h^i\}$, $i = (1, m)$ ненормированных значений компонент веса объекта, выраженных через вес доминирующего объекта v_d^i . При этом полагают, что v_d^i не зависит от i , т.е. веса доминирующих объектов по всем строкам одинаковы. Верхний индекс i означает, что эта компонента получена по i -й строке.

2. Формирование интегрированных спектров значений весов объектов

Так как каждый элемент множества $V_h = \{v_h^i\}$, $i = (1, m)$ можно представить в виде

$$v_h^i = \alpha_h^i v_d^i, \forall h[\alpha_h^i \leq 1],$$

то множество V_h можно заменить множеством $B = \{\alpha_h^i\}$ компонент. Выбрав допустимую погрешность ε представления элементов этого множества ценами деления шкалы с $n = 1 + 1/2\varepsilon$ делениями и округлив элементы множества A до ближайших делений, получим представление множества V_h множеством S_h номеров делений шкалы. Теперь есть возможность сформировать *спектр* R_h значений веса h -го объекта.

Спектр R_h есть n -разрядный вектор, g -я компонента которого равна количеству значений α_h^i , округленных до g -го деления шкалы. Пусть для примера: количество объектов $m = 7$; количество делений шкалы $n = 11$; $A = \{0,2; 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,7; 0,7\}$. Тогда $S = \{0; 2; 1; 2; 0; 0; 2; 0; 0; 0; 0\}$.

3. Количественная оценка степени согласованности интегрированных спектров значений весов объектов

В качестве количественной меры внутренней согласованности спектра значений веса объекта A_h используется коэффициент согласованности, вычисляемый из выражения [16]:

$$k_c(R_h) = \left(1 - \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^n r_i |i-a| - \sum_{i=1}^n r_i / m \ln r_i / m}{G \sum_{i=1}^n |i-(n+1)/2| + \ln n} \right) z, \quad (5)$$

где $G = \frac{m}{\ln(m)n \ln(n)}$ — масштабный коэффициент; a — средняя оценка множества

ва A . Для шкал интервалов, отношений, разностей или абсолютной в качестве средней оценки используется среднее арифметическое

$$z = \begin{cases} 1, & \text{если } z^* = TRUE; \\ 0, & \text{если } z^* = FALSE; \end{cases}$$

$$z^* = \overline{[i(1) = 1]} \bigvee_{d=1}^{q-1} \overline{[i(q) = n]} \bigvee_{d=1}^{q-1} \overline{[r_{i(d)} = r_{i(d+1)}]} \bigvee_{d=1}^{q-1} \overline{[i(d) - i(d+1)]} = \text{const}, \quad (6)$$

где q — количество групп одинаковых оценок; $i(d)$ — номер деления шкалы, до которого округлены оценки d -й группы; $d = (1, q)$; $r_{i(d)}$ — количество оценок, округленных до деления с номером $i(d)$; z^* — булева функция, задающая необходимые и достаточные условия равенства нулю коэффициента согласованности $k_c(R_h)$.

Как следует из (5), (6), $k_c(R_h) = 0$, если выполняются каждое из следующих условий: а) деления шкалы с минимальным и максимальным номером выбраны в качестве оценок (первые два дизъюнктивных члена выражения (6)); б) количества одинаковых оценок в каждой группе равны (третий дизъюнктивный член); в) разность между любыми двумя оценками постоянна (четвертый дизъюнктивный член).

4. Определение достаточности степени согласованности интегрированных спектров значений весов объекта

Для определения достаточности степени согласованности спектров значений весов объектов используют пороговые значения коэффициента согласованности: порог обнаружения и порог применения.

Порог обнаружения T_o используется для того, чтобы определить, несет ли спектр R_h хотя бы минимальное количество информации, или представляет собой «информационный шум»?

Сущность способа определения T_o заключается в том, что конструируется спектр S_τ экспертных оценок, несущий минимально допустимое количество информации, а затем для него в соответствии с (5), (6) вычисляется коэффициент согласованности, который и принимается в качестве порога обнаружения. Спектр R_τ естественно конструировать на основе наименее согласованного, а потому и не несущего информацию, спектра R_o , в котором на каждом делении шкалы находится по одной оценке веса. Так как внешний наблюдатель воспринимает множество экспертных оценок (ЭО) по его агрегированной оценке, которой является среднее значение (способ вычисления определяется типом шкалы), то в качестве R_τ следует принять спектр ЭО, полученный по такому же, что и для R_o , количеству фрагментов МПС, которому соответствует средняя величина a_τ , отличающаяся от средней величины a_o , вычисленной для спектра R_o , на минимальную регистрируемую величину δ . Так как агрегированная экспертная оценка представляется некоторым делением шкалы, то a_τ должна отличаться от a_o на одно деление шкалы. Учитывая, что a_τ округляется до ближайшего целого, следует положить $\delta = 0,5$. Из такого спектра будем конструировать спектр R_τ следующим образом: исключим одну оценку, находящуюся в спектре R_o на делении x и поместим ее дополнительно на деление y так, чтобы вследствие этого среднее значение спектра стало равным $a_o + \delta$. Для обеспечения возможности построения R_τ при любом количестве делений шкалы величину x следует выбирать минимально допустимой, т.е. $x = 1$. Так как спектры R_τ и R_o отличаются только количествами экспертов, давших в качестве оценки первое и y -е деления, то при условии, что обобщенная оценка есть среднее арифметическое, имеем

$$y/n - 1/n = \delta.$$

Отсюда при $\delta = 0,5$ получаем

$$y = [0,5n + 1].$$

Порог обнаружения равен спектральному коэффициенту согласованности спектра R_τ , построенного таким образом.

Порог применения T_u используется для определения достаточности степени согласованности множества экспертных оценок, т.е. степени согласованности, обеспечивающей достаточную точность определения агрегированной оценки.

Следует отметить, что применительно к экспертным оценкам в общем случае такие общепринятые в теории измерений понятия, как абсолютная и относительная погрешности, не применимы в силу принципиальной невозможности иметь точное значение экспертной оценки, которая всегда индивидуальна. Поэтому относительно ЭО для характеристики их точности удобнее пользоваться понятием «допустимое различие оценок». Это понятие проще всего сформулировать относительно всего двух оценок. В связи с этим допустимым будем считать различие двух оценок не более чем на b делений шкалы. Выбор величины b (обычно 1, 2) определяется требованиями к качеству экспертной информации.

В качестве порога применения берется коэффициент согласованности спектра, содержащего две оценки, отстоящие на b делений шкалы (как правило, принимают $b = 1$). При этом важно лишь взаимное расположение компонентов. Эта пара может быть размещена в любом месте шкалы, так как величина коэффициента согласованности не изменяется при одновременном сдвиге всех компонент на одну и ту же величину.

После определения пороговых значений коэффициента согласованности и вычисления для каждого из m спектров весов объектов определяется достаточность степени согласованности множества экспертных оценок веса каждого из объектов. Возможны три варианта результатов проверки достаточности степени согласованности каждого из спектров.

Если

$$k_c(S_h) < T_o, \quad (7)$$

то множество V_h экспертных оценок, представленное спектром S_h значений веса объекта A_h , не несет информации и представляет собой «информационный шум». В этом случае способ коррекции множества V_h определяется процедурой № 1.

При

$$T_o \leq k_c(S) < T_u, \quad (8)$$

процедура № 2 определяет способ коррекции множества V_h .

Наконец, выполнение условия

$$k_c(S) \geq T_u \quad (9)$$

свидетельствует о достаточности степени согласованности множества экспертных оценок веса объекта A_h . При этом определяют согласованную экспертную оценку веса объекта A_h как среднее арифметическое элементов множества A_h , для которого выполнилось условие (9).

5. Преобразование интегрированных спектров значений весов объектов с целью достижения достаточной степени согласованности

Процедура №1

Выполнение условия (7) свидетельствует о том, что множество значений компонентов веса объекта A_h не несет информации. В этом случае столбец МПС, обозначенный объектом A_h , исключается из МПС и эксперту предлагается сформировать новый столбец путем сравнения каждого из объектов (кроме A_h) с объектом A_h , после чего перейти к выполнению первого этапа для обновленной МПС.

Процедура № 2

Выполнение условия (8) свидетельствует о том, что множество V_h содержит информацию. Поэтому определяют среднюю оценку этого множества. Определяют минимальную и максимальную компоненты спектра S_h и удаляют ту из них, которая по модулю наиболее отличается от средней оценки множества V_h . После этого определяют коэффициент согласованности полученного множества ЭО и, если выполняется условие (8), повторяют описанную процедуру. Если на некотором шаге оказалось, что условие (8) по-прежнему выполняется, а количество компонент спектра равно 3, процесс прекращается, делается вывод о невозможности получения достоверной информации по исходной МПС и эксперту предлагается повторить процесс попарного сравнения всех объектов с объектом A_h . Если повторное оценивание объектов невозможно, то вычисляется средняя оценка и пользователю сообщаются значения коэффициента согласованности и порога применения.

6. Определение значений относительных весов объектов по достаточно согласованным спектрам значений их весов

Завершение процедуры № 2 означает достижение для спектров весов каждого из объектов приемлемого для пользователя уровня внутренней согласованности. В связи с этим определяют средние значения откорректированных множеств оценок каждого из весов, которые принимаются в качестве абсолютных значений весов v_i , $i = (1, m)$. Относительные значения весов w_i определяются путем нормирования

$$w_i = v_i / \sum_{h=1}^m v_h . \quad (10)$$

Особенности повышения внутренней согласованности результатов парных сравнений, полученных методом «треугольник»

Кратко метод «треугольник» заключается в следующем. Выберем некоторый объект A_e и выполним парные сравнения его со всеми другими. Можно надеяться,

что привлечение дополнительной информации повысит достоверность определения относительных весов объектов. Однако при использовании объекта A_e получить дополнительную информацию уже невозможно, поэтому исключим его из множества A и для подмножества $(m - 1)$ объектов, которые остались, выполним ту же процедуру, т.е. выберем некоторый объект $A_h = A_{e(m-1)}$ и сравним его попарно с другими $(m - 2)$ объектами, вследствие чего получим множество $D_h = \{d_{hi}\}$ степеней преимуществ объекта $A_{e(m-1)}$ над другими. После этого исключим объект $A_{e(m-1)}$ из множества объектов и повторим описанные процедуры. Этот процесс следует продолжать до тех пор, пока в сокращенном таким образом множестве не останется единственный объект.

Применим описанный в п. 1 последовательный метод вычисления абсолютных весов объектов для каждого из полученных подмножеств объектов. Особенность применения этого метода в данном случае заключается в том, что абсолютный вес $v_{e(m-1)}$ объекта $A_{e(m-1)}$ выбирается равным

$$v_{e(m-1)} = f(v_{e(m)}, d_{e(m), e(m-1)}) = v_{e(m-1)}^{e(m)}. \quad (11)$$

Через $v_i^{e(t)}$ будем в дальнейшем обозначать абсолютный вес объекта A_i , вычисленный в соответствии с (1) или (2) при условии, что для подмножества, содержащего t объектов, в качестве «эталона» выбран объект $A_{e(t)}$. Из этих выражений следует, что абсолютный вес $v_{e(t)}$ объекта A_3 , выбранного в качестве эталонного для подмножества $A(m) = A$, определяется однозначно. То же можно сказать и об абсолютном весе $v_{e(m-1)}$ объекта $A_1 = A_{e(m-1)}$, выбранного в качестве эталона на втором шаге, т.е. для подмножества $A(m - 1)$. Однако вес объекта A_2 , являющегося эталонным на третьем шаге, принимает два значения: $v_2^{e(4)} = v_2^3$ и $v_2^{e(3)} = v_2^1$. В общем случае они не совпадают, что свидетельствует о наличии внутренних противоречий оценок степеней предпочтения объектов, данных экспертом.

Таким образом, процесс повышения внутренней согласованности спектров весов объектов, описанный в предыдущих разделах, при использовании метода «треугольник» следует применять, начиная с четвертого шага выполнения алгоритма, когда в спектре веса будут три компонента.

Заключение

Описанный метод повышения внутренней согласованности требует значительно меньшего времени реализации, чем методы парных сравнений с обратной связью с экспертом. В то же время экспериментальные исследования показывают, что он обеспечивает меньшую точность результатов. Поэтому его следует применять, когда время является наиболее значимым ресурсом.

1. Миркин Б.Г. Проблемы группового выбора: — М.: Наука, 1974. — 257 с.
2. Кендэл М. Ранговые корреляции. — М.: Статистика, 1975. — 214 с.
3. Дэвид Г. Метод парных сравнений: Пер. с англ. Н. Космарской и Д. Шмерлинга. — М.: Статистика, 1978. — 144 с.

4. Литвак В.Г. Экспертная информация. Методы получения и анализа. — М.: Радио и связь, 1982. — 183 с.
5. Шмоуер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1992. — 504 с.
6. Saaty T.L. Multicriteria Decision Making: The Analytical Hierarchy Process. — N.Y.: McGraw-Hill, 1990. — P. 50.
7. Saaty T.L. The Analytic Network Process. — Pittsburgh: RWS Publications, 1996. — P. 370.
8. Тоценко В.Г. Оценка сравнительной эффективности альтернатив комплексных целевых программ методом моделирования иерархий целей // Электрон. моделирование. — 1998. — **20**, № 3. — С. 76–90 (Totsenko V.G. Estimation of Comparative Efficiency of Projects of Complex Target-Oriented Programs Using the Simulation Method of Goal Hierarchy // Eng. Simulat. — 1999. — **16**. — P. 361–375).
9. Тоценко В.Г. Об одном подходе к поддержке принятия решений при планировании исследований и развития. Часть 2. Метод целевого динамического оценивания альтернатив // Пробл. упр. и информатики. — 2001 — № 2. — С. 127–139 (Totsenko V.G. One Approach to the Decision Making Support while Planning Research and Development. Part II. The Method of Goal Dynamic Evaluation of Alternatives // J. Automation and Information Sci. — 2001. — Vol. 33, N 3).
10. Charnes A., Cooper W.W. Goal Programming and Multiple Objective Optimization. Part 1 // Eur. J. Oper. Res. — Vol. 1, N 1. — P. 39–54.
11. Тоценко В.Г., Цыганок В.В. Метод парного сравнения с обратной связью с экспертом // Пробл. упр. и информатики. — 1999. — № 3. — С. 111–125 (Totsenko V.G., Tsyganok V.V. Method of Paired Comparisons Using Feedback with Expert // J. Automation and Information Sci. — 1999. — **31**, N 9. — P. 86–97).
12. Тоценко В.Г. Генерация алгоритмов парных сравнений для моделирования предпочтений эксперта при поддержке принятия решений. Часть 1 // Электрон. моделирование. — 2000. — № 3. — С. 11–24 (Totsenko V.G. Generation of Pair Comparisons Algorithms for Simulation of Expert Preferences during Decision Making Support. Part 1 // Eng. Simulat. — 2001. — Vol. 18. — P. 303–316).
13. Тоценко В.Г. Генерация алгоритмов парных сравнений для моделирования предпочтений эксперта при поддержке принятия решений. Часть 2 // Электрон. моделирование. — 2000. — № 4. — С. 16–24 (Totsenko V.G. Generation of Pair Comparisons Algorithms for Simulation of Expert Preferences during Decision Making Support. Part 2 // Eng. Simulat. — 2001. — Vol. 18. — P. 447–456).
14. Тоценко В.Г., Цыганок В.В., Деев В.А., Качанов П.Т., Качанова Е.В., Торба Л.Т. Экспериментальное исследование методов получения кардинальных экспертных оценок альтернатив. Часть I. Методы без обратной связи с экспертом // Пробл. упр. и информатики. — 2003. — № 1. — С. 34–49.
15. Тоценко В.Г., Цыганок В.В., Деев В.А., Качанов П.Т., Качанова Е.В., Торба Л.Т. Экспериментальное исследование методов получения кардинальных экспертных оценок альтернатив. Часть 2. Методы с обратной связью с экспертом // Пробл. упр. и информатики. — 2003. — № 2. — С. 112–126.
16. Тоценко В.Г. Спектральный метод определения согласованности множества экспертных оценок // Электрон. моделирование. — 1999. — **21**, № 5. — С. 582–593 (Totsenko V.G. Spectral Method for Determination of Consistency of Expert Estimate Sets // Eng. Simulat. — 2000, **17**. — P. 715–727).

Поступила в редакцию 17.03.2004