

УДК 532.595

## КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОДВИЖНОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ КОНТЕЙНЕРЕ С УПРУГИМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ

Д. А. ГАЛИЦЫН  
В. А. ТРОЦЕНКО

*Институт математики НАН Украины, Киев*

*Получено 06.06.2000*

В линейной постановке задачи построена математическая модель плоскопараллельного движения твердого тела с полостью в форме прямоугольного параллелепипеда, которая содержит идеальную жидкость и упругие перегородки. Сформулированы основные краевые задачи гидроупругости, решения которых определяют параметры такой модели. Предложена методика построения приближенных решений полученных краевых задач, которая учитывает дифференциальные свойства искомых функций на кромках перегородок. Приведен анализ динамического взаимодействия упругих перегородок с жидкостью при свободных и вынужденных колебаниях рассматриваемой системы.

В лінійній постановці задачі побудовано математичну модель плоскопараллельного руху твердого тіла із порожниною у формі прямокутного параллелепіпеду, яка містить ідеальну рідину та пружні перегородки. Сформульовано основні граничні задачі гідропружності, розв'язки яких визначають параметри такої моделі. Запропоновано методику для побудови наближених розв'язків одержаних задач, яка враховує диференціальні властивості шуканих функцій на кромках перегородок. Наведено аналіз гідродинамічної взаємодії пружних перегородок із рідиною при вільних та вимушених коливаннях системи, що розглядається.

In linear definition of the problem mathematical model of plane-parallel motion of a solid body with cavity in the shape of a rectangular parallelepiped which contains ideal liquid and elastic partitions is carried out. The main hydroelasticity boundary problems with solutions that determine the parameters of such model are formulated. The technique of approximate solutions of the obtained boundary problems construction is suggested. This technique takes into account differential properties of the sought-for functions on the edges of the partitions. The analysis of dynamic interaction of elastic partitions with liquid by free and forced vibrations of the system under consideration is given.

### ВВЕДЕНИЕ

Для уменьшения влияния колебательных явлений свободной поверхности жидкости на устойчивость движения системы "тело-жидкость" на практике применяются различного рода конструктивные устройства. Широкое распространение получили устройства в виде жестких или упругих ребер-перегородок. Наличие перегородок в емкости оказывает существенное влияние на динамические характеристики жидкости [1]. Экспериментальному изучению колебаний жидкости в полостях с упругими перегородками посвящены работы [2-4]. При этом было установлено, что за счет выбора параметров упругих перегородок можно получить значительное увеличение демпфирования колебаний жидкости по сравнению с жесткими перегородками. Теоретико-экспериментальному изучению этого явления посвящена работа [5], в которой рассмотрена методическая задача о вынужденных колебаниях жидкости в прямоугольном параллелепипеде при наличии в нем подвешенной на пружинах прямоугольной перегородки малой ширины. В результате было показано, что увеличение демпфирования колебаний жидкости обусловлено тем, что при опреде-

ленных режимах гидродинамического взаимодействия упругих элементов с жидкостью наблюдается возрастание скорости потока относительно перегородок, что приводит к более интенсивному рассеянию энергии колебаний жидкости.

Построению математической модели гидродинамического взаимодействия упругой кольцевой перегородки и идеальной жидкости, находящихся в подвижном осесимметричном сосуде, и разработке методов определения параметров этой модели посвящена работа [6].

В настоящей статье излагаются результаты теоретических исследований по постановке и решению задачи, связанной с изучением поведения жидкости в подвижной полости в форме прямоугольного параллелепипеда с конструктивными устройствами в виде продольных упругих пластин. При исследовании свободных колебаний жидкости в рассматриваемой полости установлены параметры системы, при которых следует ожидать увеличение рассеяния энергии колеблющейся жидкости по сравнению с рассеянием энергии в полости с жесткими перегородками. Изучены вынужденные колебания рассматриваемой механической системы в предположении, что полость совершает поступательные гармонические колебания в

горизонтальной плоскости. При этом установлено, что упругие перегородки могут сыграть роль динамического гасителя волновых движений жидкости.

### 1. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ И УПРУГИХ ПЕРЕГОРОДОК

Пусть в поле массовых сил находится неподвижный бак, частично заполненный идеальной и несжимаемой жидкостью плотности  $\rho$ . Пусть бак имеет форму прямоугольного параллелепипеда длины  $l$  и ширины  $2b$ , на продольных стенках которого жестко закреплены перегородки в форме прямоугольных пластин одинаковой ширины в плоскости, параллельной невозмущенной свободной поверхности жидкости. Обозначим через  $h_1$  и  $h_2$  расстояния перегородок до свободной поверхности жидкости и до дна сосуда соответственно, а через  $2a$  – расстояние между кромками перегородок. В дальнейшем предполагается, что поле массовых сил имеет потенциальную функцию, градиент которой обозначим через  $\vec{g}$ . Выберем ось  $Oz$  так, чтобы она была коллинеарна вектору  $\vec{g}$  и направлена в сторону, противоположную  $\vec{g}$ . Связанную с телом систему координат  $Oxyz$  выберем так, чтобы ее координатные плоскости  $Oxz$  и  $Oyz$  совпадали с плоскостями геометрической симметрии полости. Причем ось  $Oz$  совместим с линией пересечения этих плоскостей, а ось  $Oy$  направим вдоль полости. Начало системы координат  $Oxyz$  поместим в плоскости расположения перегородок.

Будем считать в дальнейшем, что стенки бака абсолютно жесткие, а перегородки упругие. Примем также, что прогибы перегородок удовлетворяют всем требованиям теории линейного изгиба твердых пластин, а смещения, скорости и ускорения частиц жидкости настолько малы, что их произведениями и квадратами можно пренебречь по сравнению с самими величинами.

Обозначим область, занятую жидкостью, через  $Q$ ; смоченную поверхность емкости – через  $S$ ; свободную поверхность жидкости в невозмущенном положении – через  $\Sigma$ .

В случае малых колебаний жидкости вместо потенциала скоростей удобно использовать потенциал смещений  $\chi$  [7]. Потенциал смещений удовлетворяет уравнению Лапласа в области  $Q$  и определяет векторное поле малых смещений частиц жидкости. При известном потенциале смещений из интеграла Лагранжа – Коши может быть определено поле давлений в жидкости:

$$p = -\rho \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + gz \right). \quad (1)$$

Динамическое граничное условие, выражающее собой условие постоянства давления на свободной поверхности жидкости, имеет вид

$$\left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_{\Sigma} = 0. \quad (2)$$

Ограничимся рассмотрением антисимметричных колебаний жидкости в плоскости  $Oxz$ , для которых главный вектор гидродинамических сил, действующих на стенки сосуда, отличен от нуля. В этом случае прогиб каждого ребра можно отождествить с прогибом элементарной полоски, вырезанной из пластинки двумя перпендикулярными к оси  $Oy$  плоскостями. В результате исходная пространственная задача гидроупругости сводится к плоской задаче в области  $G$ , которая является симметричной половиной области поперечного сечения сосуда. Граничная задача имеет следующий вид:

$$\Delta \chi = 0, \quad (x, z) \in G;$$

$$\left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \chi}{\partial z} \right) \Big|_{L_0} = 0; \quad (\chi)_{x=0} = 0;$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial n} \Big|_L = 0; \quad \frac{\partial \chi}{\partial z} \Big|_{\gamma} = -w(x, t); \quad (3)$$

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 \delta_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\rho \left( \frac{\partial^2 \chi^+}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi^-}{\partial t^2} \right);$$

$$w(b) = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=b} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=a} = \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)_{x=a} = 0,$$

где  $w(x, t)$  – прогиб перегородки;  $D, \rho_0, \delta_0$  – соответственно цилиндрическая жесткость, плотность и толщина пластинок;  $L_0 : \{0 \leq x \leq b; z = h_1\}$ ;  $\gamma : \{a \leq x \leq b; z = 0\}$ ;  $L : \{(x = b; -h_2 \leq z \leq h_1) \cup (0 \leq x \leq b; z = -h_2)\}$ .

Построение точного решения задачи (3) не представляется возможным. Поэтому ниже сведем эту задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, независимой переменной в которых является время. Приведение уравнений в частных производных (3) с учетом соответствующих физических условий к системе обыкновенных дифференциальных уравнений можно осуществить с помощью метода Бубнова – Галеркина, для реализации которого необходимо располагать некоторыми системами координатных функций. В качестве таких систем функций в рассматриваемом случае наиболее естественно выбрать собственные функции следующих задач:

$$\Delta \varphi_n = 0, \quad (x, z) \in G; \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right|_{L \cup \gamma} = 0; \left( \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} - \frac{\sigma_n^2}{g} \varphi_n \right)_{L_0} = 0; (\varphi_n)_{x=0} = 0;$$

$$\Delta \psi_i = 0, \quad (x, z) \in G; \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_i}{\partial \nu} \right|_{L \cup L_0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right|_{\gamma} = -w_i; \quad (\psi_i)_{x=0} = 0;$$

$$\frac{d^4 w_i}{dx^4} - \frac{\Omega_i^2}{D} [\rho_0 \delta_0 w_i + \rho (\psi_i^+ - \psi_i^-)] = 0,$$

где  $\psi_i^+$  и  $\psi_i^-$  – значения функций  $\psi_i$  на верхней и нижней сторонах отрезка  $\gamma$  соответственно.

Кроме этого, на функции  $w_i$  накладываются ограничения в виде граничных условий на  $w$  из (3).

Однородные задачи (4)–(5) описывают несимметричные свободные колебания в плоскости  $Oxz$  жидкости в неподвижной полости с жесткими перегородками и, соответственно, упругих перегородок в полости с жидкостью при закрытой ее свободной поверхности.

Краевая задача (4) имеет, как известно [8], счетное множество собственных значений и собственных функций, обладающих свойством полноты и ортогональности на линии  $L_0$ :

$$\int_{L_0} \varphi_n \varphi_m dS = 0; \int_{L_0} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} dS = 0, \quad \forall m \neq n. \quad (6)$$

Аналогичные качества присущи и системе собственных функций краевой задачи (5) на отрезке  $\gamma$ . Условия ортогональности для них имеют вид

$$\int_a^b [\rho_0 \delta_0 w_i w_j + \rho (\psi_i^+ - \psi_i^-) w_j] dx = 0, \quad \forall i \neq j. \quad (7)$$

Представим потенциал смещений жидкости в следующем виде:

$$\chi(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \varphi_n(x, z) + \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t) \psi_m(x, z). \quad (8)$$

В этом выражении первая сумма описывает движение жидкости в сосуде с жесткими перегородками, в то время как вторая сумма соответствует смещениям жидкости за счет упругих деформаций перегородок.

В свою очередь, перемещения упругих пластинок в направлении нормали к их срединным поверхностям представим в виде разложения по собственным функциям задачи (5):

$$w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t) w_m(x, z). \quad (9)$$

В дальнейшем функции  $\varphi_n(x, z)$  и  $w_m(x, z)$  будем нормировать таким образом, чтобы

$$\left. \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right|_{\substack{x=b \\ z=h_1}} = 1; \quad w_m(a) = 1. \quad (10)$$

Принятая нормировка позволяет рассматривать обобщенные координаты  $p_n(t)$  как смещения точки свободной поверхности с координатами  $(b, h_1)$  в направлении оси  $Oz$  при  $n$ -ой форме собственных колебаний жидкости, а  $q_m(t)$  – как смещения свободного торца упругой пластинки при  $m$ -ой форме ее собственных колебаний в жидкости.

Первое уравнение относительно введенных обобщенных координат можно получить, если воспользоваться динамическим граничным условием для потенциала смещений жидкости на линии  $L_0$ . После подстановки в него выражения (8), умножения на  $2l\rho (\partial \varphi_n / \partial z)$  и интегрирования по  $x$  от 0 до  $b$ , с учетом условий ортогональности (6) получаем:

$$\mu_n (\ddot{p}_n + \sigma_n^2 p_n) + \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{q}_m \beta_{nm} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (11)$$

где

$$\mu_n = \rho \int_{\Sigma} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} dS; \quad \beta_{nm} = \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \psi_m dS.$$

Второе уравнение относительно обобщенных координат  $p_n(t)$  и  $q_m(t)$  получим, подставив разложения (8) и (9) в уравнение движения пластинки. После умножения полученного выражения на  $2lw_m(x)$  и интегрирования его по  $x$  в пределах от  $a$  до  $b$  будем иметь:

$$\zeta_m (\ddot{q}_m + \Omega_m^2 q_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \beta_{nm} = 0, \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

где

$$\zeta_m = 2l \int_a^b [\rho_0 \delta_0 w_m + \rho (\psi_m^+ - \psi_m^-)] w_m dx.$$

При выводе уравнений (12) были использованы условия ортогональности (7) и формула Грина для гармонических функций в области  $G$ .

Таким образом, исследование свободных колебаний жидкости и упругих перегородок в рассматриваемой полости свелось к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), (12)

при соответствующих начальных условиях на свободную поверхность жидкости и прогибы перегородок. При этом коэффициенты этих уравнений выражаются через интегральные характеристики от решений однородных граничных задач (4) и (5). Построение решений задачи (4), описывающей свободные колебания жидкости в рассматриваемом сосуде с абсолютно жесткими перегородками, было осуществлено в работе [9].

Для решения гидроупругой задачи (5), соответствующей парциальной системе "упругая пластинка-жидкость", представим собственные функции  $w_m(x)$  и  $\psi_m(x, z)$  в виде разложений

$$w_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(m)} u_k(x); \quad \psi_m(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(m)} V_k(x, z), \quad (13)$$

где функции  $V_k(x, z)$  являются решениями следующих задач:

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= 0, \quad (x, z) \in G; \\ (V_k)_{x=0} &= 0; \quad \left( \frac{\partial V_k}{\partial \nu} \right)_{L_0 \cup L} = 0; \\ \left( \frac{\partial V_k}{\partial z} \right)_{\gamma} &= -u_k(x), \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (14)$$

а функции  $u_k(x)$  – собственные функции задачи о свободных колебаниях балки с защемленным концом при  $x = b$  и свободным при  $x = a$ . Для этих функций может быть получено точное решение в виде [10]

$$u_k(x) = \operatorname{ch} p_k(b-x) - \cos p_k(b-x) - Q_k [\operatorname{sh} p_k(b-x) - \sin p_k(b-x)],$$

где собственные числа  $\beta_k = p_k d$  (причем  $d = b - a$  – ширина перегородки) и коэффициенты  $Q_k$  приведены в книге [10].

Постоянные  $y_k^{(m)}$  определим из уравнения для прогиба пластинки в (5). Для этого подставим в него выражения (13), почленно умножим на  $u_l(x)$  и проинтегрируем полученное соотношение по  $x$  от  $a$  до  $b$ . При этом получим следующую однородную алгебраическую систему относительно параметров  $\Omega_m^2$  и постоянных  $y_l^{(m)}$ :

$$p_l^4 N_l^2 y_l^{(m)} - \frac{\Omega_m^2}{D} \left[ \rho_0 \delta_0 N_l^2 y_l^{(m)} + \rho \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(m)} b_{kl} \right] = 0, \quad (15)$$

где

$$b_{kl} = \int_a^b (V_k^+ - V_k^-) u_l(x) dx; \quad N_l^2 = \frac{d}{4} u_k^2(a).$$

Заметим, что индекс  $m$  указывает на номер частотного параметра  $\Omega_m^2$  и соответствующее ему решение  $y_k^{(m)}$ .

Остановимся теперь на построении приближенного решения неоднородных граничных задач (14), воспользовавшись при этом подходом, предложенным для решения аналогичных задач в работе [6].

Разобьем область  $G$  отрезком  $\gamma_0 : \{0 \leq x \leq a; z = 0\}$  на две подобласти  $G_1$  и  $G_2$ . Положим далее, что решения граничных задач (14) принимают значения

$$V_k(x, z) = \begin{cases} V_k^{(1)} = V_{k1}^{(1)} + V_{k2}^{(1)}, & (x, z) \in G_1 \\ V_k^{(2)} = V_{k1}^{(2)} + V_{k2}^{(2)}, & (x, z) \in G_2. \end{cases} \quad (16)$$

Для гармонических функций  $V_{k1}^{(j)}(x, z)$  и  $V_{k2}^{(j)}(x, z)$  ( $j = 1, 2$ ) на границах подобластей  $G_1$  и  $G_2$  сформулируем следующие условия Неймана:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial V_{k1}^{(1)}}{\partial n} \right)_{L_1 \cup L_0} &= 0; \quad \left( \frac{\partial V_{k1}^{(1)}}{\partial z} \right)_{\gamma_0} = -v_k(x); \\ \left( \frac{\partial V_{k1}^{(1)}}{\partial z} \right)_{\gamma} &= -u_k(x); \quad \left( \frac{\partial V_{k2}^{(1)}}{\partial n} \right)_{L_1 \cup L_0 \cup \gamma} = 0; \\ \left( \frac{\partial V_{k2}^{(1)}}{\partial z} \right)_{\gamma_0} &= \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(k)} f_p(x) = N_k(x); \\ \left( \frac{\partial V_{k1}^{(2)}}{\partial n} \right)_{L_2} &= 0; \quad \left( \frac{\partial V_{k1}^{(2)}}{\partial z} \right)_{\gamma_0} = -v_k(x); \\ \left( \frac{\partial V_{k1}^{(2)}}{\partial z} \right)_{\gamma} &= -u_k(x); \quad \left( \frac{\partial V_{k2}^{(2)}}{\partial n} \right)_{L_2 \cup \gamma} = 0; \\ \left( \frac{\partial V_{k2}^{(2)}}{\partial z} \right)_{\gamma_0} &= \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(k)} f_p(x) = N_k(x); \end{aligned} \quad (17)$$

$$v_k(x) = S_k^{(1)} x + S_k^{(2)} x^3; \quad (V_k^{(1)})_{x=0} = (V_k^{(2)})_{x=0} = 0;$$

$$S_k^{(1)} = \frac{1}{2a} [3u_k(a) - a u_k'(a)];$$

$$S_k^{(2)} = \frac{1}{2a^3} [a u_k'(a) - u_k(a)],$$

где  $L_1 : \{(x = b; 0 \leq z \leq h_1) \cup (a \leq x \leq b; z = 0)\}$ ;  $L_2 : \{(x = b; -h_2 \leq z \leq 0) \cup (a \leq x \leq b; z = 0) \cup (0 \leq x \leq b; z = -h_2)\}$ ;  $\{f_p(x)\}$  – некоторая система базисных функций на  $\gamma_0$ ;  $Z_p^{(k)}$  – постоянные, подлежащие определению в дальнейшем.

Специально введенные в рассмотрение функции  $v_k(x)$  обеспечивают гладкое продолжение условия

Неймана на линии  $\gamma$  на всю границу  $z = 0$  под-областей  $G_1$  и  $G_2$ . При этом в точке  $x = a$  выполняются следующие условия сопряжения:

$$v_k(a) = u_k(a); \quad v'_k(a) = u'_k(a),$$

что позволит получить на основе метода Фурье решения граничных задач для функций  $V_{k1}^{(j)}(x, z)$ , ( $j = 1, 2$ ) в виде быстроходящихся рядов.

Для построения фактических решений сформулированных выше вспомогательных краевых задач воспользуемся функциями Грина  $K_j(p, p_0)$  для подобластей  $G_j$ :

$$K_1(p, p_0) = 2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g_{2s+1}(x)g_{2s+1}(x_0)}{b\alpha_{2s+1}\text{sh}(\alpha_{2s+1}h_1)} \times \\ \times \text{ch}[\alpha_{2s+1}(z - h_1)] \text{ch}(\alpha_{2s+1}z_0), \quad \forall z \geq z_0, \quad (18)$$

$$K_2(p, p_0) = 2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{g_{2s+1}(x)g_{2s+1}(x_0)}{b\alpha_{2s+1}\text{sh}(\alpha_{2s+1}h_2)} \times \\ \times \text{ch}[\alpha_{2s+1}(z + h_2)] \text{ch}(\alpha_{2s+1}z_0), \quad \forall z \leq z_0,$$

где

$$\alpha_{2s+1} = \frac{\pi(2s+1)}{2b}; \quad g_{2s+1}(x) = \cos[\alpha_{2s+1}(x+b)].$$

Разложения для функций  $N_k(x)$  на отрезке  $[0, a]$  выберем такими, чтобы они учитывали характер особенностей искомых решений в первых производных на кромках перегородок, а именно [9]:

$$N_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \left\{ Z_1^{(k)} + Z_2^{(k)} \left[ 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right] + \right. \\ \left. + Z_3^{(k)} \left[ 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right]^2 + \dots \right\},$$

и, таким образом, координатные функции  $f_p(x)$  в рассматриваемом случае будут иметь вид

$$f_p(x) = x \left[ 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \right]^{p-3/2}, \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (19)$$

Используя интегральное представление решений краевых задач с помощью функций Грина, гармонические функции  $V_k^{(j)}(x, z)$  с учетом граничных условий (17) можно представить следующим образом:

$$V_{k1}^{(j)} = (-1)^{j+1} \sum_{s=0}^{\infty} f_s^{(j)}(x, z) I_s^{(k)}; \quad (20)$$

$$V_{k2}^{(j)} = (-1)^j \sum_{s=0}^{\infty} f_s^{(j)}(x, z) C_s^{(k)}, \quad (j = 1, 2),$$

где

$$f_s^{(j)}(x, z) = \frac{g_{2s+1}(x) \text{ch}[\alpha_{2s+1}(z + (-1)^j h_j)]}{b\alpha_{2s+1} \text{sh}(\alpha_{2s+1} h_j)};$$

$$I_s^{(k)} = 2 \left\{ \int_0^a v_k(x) g_{2s+1}(x) dx + \int_a^b u_k(x) g_{2s+1}(x) dx \right\};$$

$$C_s^{(k)} = \sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(k)} a_{p, 2s+1};$$

$$a_{p, 2s+1} = (-1)^{s+1} \frac{2a^2 \sqrt{\pi} \Gamma(p + 1/2)}{(2p - 1) \left(\frac{z_{2s+1}}{2}\right)^{p-1}} J_p(z_{2s+1});$$

$$z_{2s+1} = \frac{\pi a(2s+1)}{2b}.$$

Здесь  $\Gamma(x)$  – гамма-функция,  $J_p(x)$  – функция Бесселя первого рода и  $p$ -ого порядка.

При выводе выражений, стоящих в (20), был использован определенный интеграл Пуассона [11]. Для интегралов  $I_s^{(k)}$  можно получить явные выражения, которые здесь не приводятся в силу их громоздкости.

Из условия непрерывности функций  $V_k^{(1)}(x, z)$  и  $V_k^{(2)}(x, z)$  на смежной линии  $\gamma_0$  подобластей  $G_1$  и  $G_2$  получаем следующую неоднородную алгебраическую систему относительно постоянных  $Z_p^{(k)}$ :

$$\sum_{p=1}^{\infty} Z_p^{(k)} \alpha_{pq} = \gamma_q^{(k)}, \quad (q = 1, 2, \dots), \quad (21)$$

где

$$\alpha_{pq} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a_{p, 2s+1} a_{q, 2s+1}}{b\alpha_{2s+1}} \times \\ \times [\text{cth}(\alpha_{2s+1} h_1) + \text{cth}(\alpha_{2s+1} h_2)];$$

$$\gamma_q^{(k)} = \sum_{s=0}^{\infty} I_s^{(k)} \frac{a_{q, 2s+1}}{b\alpha_{2s+1}} [\text{cth}(\alpha_{2s+1} h_1) + \text{cth}(\alpha_{2s+1} h_2)].$$

Таким образом, решение краевых задач (14) для функций  $V_k(x, z)$  свелось, в основном, к решению  $k$  неоднородных алгебраических систем с одинаковой матрицей при неизвестных и с  $k$  правыми частями.

Собирая полученные результаты, а также учитывая решение для волновых функций  $\varphi_n(x, z)$ , полученное в работе [9], найдем следующие выражения для коэффициентов уравнений (11) и (12):

$$\zeta_m = 2l \left[ \rho_0 \delta_0 \sum_{i=1}^{\infty} \left(y_i^{(m)}\right)^2 N_i^2 + \rho \sum_{i,j=1}^{\infty} y_i^{(m)} y_j^{(m)} b_{ij} \right];$$

$$\beta_{nm} = \rho \alpha_n l \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(n)} \left[ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(C_s^{(k)} - I_s^{(k)}) a_{2s+1}^{(n)}}{b \alpha_{2s+1} \operatorname{sh}(\alpha_{2s+1} h_1) d_{2s+1}^{(n)}} \right];$$

$$\mu_n = \frac{l \alpha_n}{2b} \sum_{s=0}^{\infty} \left[ \frac{a_{2s+1}^{(n)}}{d_{2s+1}^{(n)}} \right]^2; a_{2s+1}^{(n)} = \sum_{p=0}^{\infty} X_p^{(n)} a_{p,2s+1};$$

$$d_{2s+1}^{(n)} = \alpha_{2s+1} \operatorname{sh}(\alpha_{2s+1} h_1) - \alpha_n \operatorname{ch}(\alpha_{2s+1} h_1);$$

$$b_{kl} = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{I_s^{(k)}}{b \alpha_{2s+1}} [\operatorname{cth}(\alpha_{2s+1} h_1) + \operatorname{cth}(\alpha_{2s+1} h_2)] (I_s^{(l)} - C_s^{(l)}).$$

Коэффициенты  $b_{kl}$  были приведены к виду, позволяющему проводить более эффективное их вычисление.

## 2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ГИДРОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ЕМКОСТИ

Пусть рассматриваемый сосуд, частично заполненный идеальной и несжимаемой жидкостью, совершает заданное движение в постоянном поле массовых сил. По своему содержанию рассматриваемая задача относится к первой задаче динамики механической системы "тело-жидкость" и состоит в определении связанных движений жидкости и упругих перегородок, вызываемых движением сосуда, а также гидродинамических сил и моментов, действующих при этом на сосуд. Центральным вопросом здесь является вопрос об отыскании потенциала смещений жидкости и упругих перемещений перегородок в рассматриваемом сосуде.

При описании движения рассматриваемой механической системы, как и ранее, будем пользоваться гипотезами малости параметров движения. Наряду с системой координат  $Oxyz$ , неизменно связанной с сосудом, введем в рассмотрение абсолютную систему координат  $O^*x^*y^*z^*$ . В начальный момент времени обе системы координат совпадают. Движение емкости будем характеризовать вектором малого перемещения  $\vec{u}(t)$  точки  $O$  относительно  $O^*$  и вектором малого поворота  $\vec{\Theta}$  подвижной системы координат относительно неподвижной.

При малых движениях частиц жидкости и стенок полости граничные условия для потенциала смещений жидкости в задаче о вынужденных колебаниях механической системы можно сформули-

ровать в следующем виде:

$$\left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_{\Sigma} = 0; \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_S = \vec{u} \cdot \vec{\nu} + (\vec{\Theta} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nu}; \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_{S_0^{(j)}} = \vec{u} \cdot \vec{\nu} + (\vec{\Theta} \times \vec{r}) \cdot \vec{\nu} \mp w^{(j)}; \quad (j = 1, 2),$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор произвольной точки в подвижной системе координат;  $S_0^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ) – поверхности упругих перегородок. Знаки при прогибах перегородок  $w^{(j)}$  выбираются в зависимости от того, совпадает или нет направление орта  $\vec{\nu}$  с положительным направлением оси  $Oz$ . В первом случае берется верхний знак, во втором – нижний (за положительный прогиб пластинки принят ее прогиб в отрицательную сторону оси  $Oz$ ).

Рассмотрим далее задачу о вынужденных колебаниях жидкости и перегородок при движении емкости в плоскости  $O^*x^*z^*$ . Поступательные и вращательные движения емкости будем характеризовать заданными векторами  $\vec{u} \{u(t), 0, 0\}$  и  $\vec{\Theta} \{0, \Theta, 0\}$  соответственно. Тогда кинематические граничные условия для потенциала смещений жидкости  $\chi$  примут вид:

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial \nu} \right|_S = u(t) \cos(\nu, x) + \Theta(t) (z \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, z)); \quad (25)$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial z} \right|_{S_0^{(j)}} = u(t) \cos(\nu, x) + \Theta(t) (z \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, z)) - w^{(j)} \quad (j = 1, 2).$$

Представим искомый потенциал смещений жидкости  $\chi$  в виде

$$\chi = u(t)x + \Theta(t)\Omega + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)\varphi_n + \psi, \quad (26)$$

где  $\varphi_n$  – собственные функции однородной граничной задачи (4). В этом выражении три первых слагаемых предназначены для описания движения жидкости в подвижном сосуде с жесткими перегородками, в то время как последнее слагаемое связано со смещениями жидкости за счет упругих деформаций перегородок.

После подстановки уравнения (26) в (25) для функций  $\Omega$  и  $\psi$  можно сформулировать следующие краевые задачи:

$$\Delta \Omega(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in Q; \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \Big|_{S \cup \Sigma \cup S_0^{(j)}} &= z \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, z); \\ \Delta \psi(x, y, z) &= 0, \quad (x, y, z) \in Q; \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \Big|_{S \cup \Sigma} &= 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{S_0^{(j)}} = -w^{(j)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Так как граничные условия для функции  $\Omega$  не зависят от координаты  $y$ , то  $\Omega$  можно рассматривать как двумерную гармоническую функцию, определенную в области поперечного сечения полости. В свою очередь при рассматриваемых движениях сосуда гидродинамическое давление на перегородки будет нечетной функцией по координате  $x$  и не будет зависеть от координаты  $y$ . В связи с этим перегородки будут деформироваться друг к другу антисимметричным образом и прогиб одной пластинки будет определяться из уравнения

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho_0 \delta_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\rho \left( \frac{\partial^2 \chi^+}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \chi^-}{\partial t^2} \right), \quad (29)$$

где  $\chi^+$  и  $\chi^-$  – значения потенциала смещений жидкости на верхней и нижней сторонах перегородки.

К уравнениям (29) необходимо еще добавить граничные условия жесткого защемления края пластины при  $x = b$  и свободного края при  $x = a$ .

Как и ранее, представим составляющую потенциала смещений жидкости, обусловленную упругими деформациями перегородок, и перемещения пластинки в виде разложения по собственным функциям задачи (5):

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t) \psi_m(x, z); \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t) w_m(x). \quad (30)$$

Полученное выражение для потенциала смещений жидкости должно удовлетворять динамическому граничному условию на свободной поверхности жидкости (23), в то время как прогибы пластинок – уравнению (29). После подстановки выражений (26) и (30) в указанные уравнения и выполнения аналогичных операций, что и при получении уравнений (11) и (12), получим следующую неоднородную систему уравнений относительно параметров  $p_n(t)$  и  $q_m(t)$ :

$$\mu_n (\ddot{p}_n + \sigma_n^2 p_n) + \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{q}_m \beta_{nm} = -\lambda_n \ddot{u} - \lambda_{0n} \ddot{\Theta} + g \Theta \lambda_n; \quad (31)$$

$$\zeta_m (\ddot{q}_m + \Omega_m^2 q_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \beta_{nm} = -\zeta_{0m} \ddot{\Theta},$$

где

$$\lambda_n = \rho \int_{\Sigma} x \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} dS; \quad \lambda_{0n} = \rho \int_{\Sigma} \Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} dS;$$

$$\zeta_{0m} = 2l\rho \int_a^b (\Omega^+ - \Omega^-) w_m dx = 2l\rho \int_{\gamma^+ \cup \gamma^-} \Omega \frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} dS.$$

Здесь  $\gamma^+$ ,  $\gamma^-$  – условно введенные верхняя и нижняя стороны отрезка  $\gamma$ .

Коэффициенты уравнений  $\mu_n$ ,  $\zeta_m$  и  $\beta_{nm}$  ранее определялись формулами из (11) и (12).

Таким образом, в случае заданного движения емкости движение жидкости и упругих перегородок в ней в линейном приближении можно рассчитать, интегрируя систему дифференциальных уравнений (31) при соответствующих начальных условиях или условиях периодичности. Коэффициенты этих уравнений определяются исходя из решений линейной краевой задачи о собственных колебаниях жидкости в сосуде с жесткими перегородками, краевой задачи по определению потенциала Стокса–Жуковского (27) и задачи о собственных колебаниях перегородок в емкости при защемленной свободной поверхности жидкости (5).

Коэффициенты  $\lambda_n$  и  $\lambda_{0n}$  были найдены ранее в работе [9]. Поэтому определению подлежит только коэффициент  $\zeta_{0m}$ . С учетом формул (13) и представления для потенциала Стокса–Жуковского из [9] получаем:

$$\begin{aligned} \zeta_{0m} &= -\frac{4l\rho}{b} \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(m)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(I_s^{(k)} - C_s^{(k)})}{\alpha_{2s+1}^3} \times \\ &\times \left[ \frac{\text{ch}(\alpha_{2s+1} h_1) - 1}{\text{sh}(\alpha_{2s+1} h_1)} + \frac{\text{ch}(\alpha_{2s+1} h_2) - 1}{\text{sh}(\alpha_{2s+1} h_2)} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

После интегрирования системы дифференциальных уравнений (31) можно перейти к определению сил взаимодействия между сосудом и частично заполняющей его жидкостью.

В общем случае силовые взаимодействия жидкости и емкости сводятся к суммарной гидродинамической силе  $\vec{P}$  и гидродинамическому моменту  $\vec{M}$  относительно начала координат [12]:

$$\vec{P} = \int_S p \vec{\nu} dS; \quad \vec{M} = \int_S (\vec{r} \times p \vec{\nu}) dS, \quad (33)$$

где  $\vec{\nu}$  – орт внешней нормали к смоченной поверхности  $S$ .

При малых движениях сосуда в плоскости  $O^* x^* z^*$  величины поперечной гидродинамической

силы  $P_{x^*}$  и гидродинамического момента  $M_y$  относительно оси  $Oy$ , выраженные в подвижной системе координат, с точностью до малых величин первого порядка будут иметь вид

$$P_{x^*} = \int_S p \cos(\nu, x) dS; \quad (34)$$

$$M_y = \int_S p [z \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, z)] dS.$$

Динамическое давление  $p$ , входящее в выражения (34), можно непосредственно найти из интеграла Лагранжа-Коши (1):

$$p = -\rho \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\rho \left( \ddot{u}x + \ddot{\Theta}\Omega + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \varphi_n + \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{q}_m \psi_m \right). \quad (35)$$

Подставляя динамическое давление (35) в выражение (34) для  $P_{x^*}$ , получаем:

$$P_{x^*} = -\ddot{u}\rho \int_S x \cos(\nu, x) dS - \ddot{\Theta}\rho \int_S \Omega \cos(\nu, x) dS - \rho \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \int_S \varphi_n \cos(\nu, x) dS - \rho \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{q}_m \int_S \psi_m \cos(\nu, x) dS. \quad (36)$$

Интегралы, входящие в (36), с помощью формулы Гаусса-Остроградского можно преобразовать к следующему виду:

$$\rho \int_S x \cos(\nu, x) dS = \rho \int_{S \cup \Sigma} x \frac{\partial x}{\partial \nu} dS = \rho \int_Q dQ = m;$$

$$\rho \int_S \Omega \cos(\nu, x) dS = \rho \int_Q z dQ = m z_G;$$

$$\rho \int_S \varphi_n \cos(\nu, x) dS = \rho \int_{S \cup \Sigma} x \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS = \lambda_n;$$

$$\rho \int_S \psi_m \cos(\nu, x) dS = \rho \int_{S \cup \Sigma} x \frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} dS = 0,$$

где

$$z_G = \frac{\int_Q z dQ}{Q}$$

– координата центра масс затвердевшей жидкости;  $m$  – масса жидкости.

Таким образом, поперечная гидродинамическая сила  $P_{x^*}$ , действующая на емкость, примет вид

$$P_{x^*} = -\ddot{u}m - \ddot{\Theta}m z_G - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \ddot{p}_n. \quad (37)$$

С учетом динамического давления (35) для  $M_y$  получим

$$M_y = -\ddot{u}\rho \int_{S \cup \Sigma} x [\vec{r} \times \vec{v}]_y dS - \ddot{\Theta}\rho \int_{S \cup \Sigma} \Omega [\vec{r} \times \vec{v}]_y dS - \rho \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \int_{S \cup \Sigma} \varphi_n [\vec{r} \times \vec{v}]_y dS - \rho \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{q}_m \int_{S \cup \Sigma} \psi_m [\vec{r} \times \vec{v}]_y dS, \quad (38)$$

где  $[\vec{r} \times \vec{v}]_y$  – проекция векторного произведения на ось  $Oy$ .

Интегралы, входящие в уравнение (38), преобразуются к следующему виду:

$$\rho \int_{S \cup \Sigma} x [z \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, z)] dS = m z_G;$$

$$\rho \int_{S \cup \Sigma} \Omega [\vec{r} \times \vec{v}]_y dS = \rho \int_{S \cup \Sigma} \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} dS = I;$$

$$\rho \int_{S \cup \Sigma} \varphi_n [\vec{r} \times \vec{v}]_y dS = \rho \int_{\Sigma} \Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS = \lambda_{0n};$$

$$\rho \int_{S \cup \Sigma} \psi_m [\vec{r} \times \vec{v}]_y dS = \rho \int_{S \cup \Sigma} \psi_m \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} dS = \zeta_{0m}.$$

С учетом этих выражений гидродинамический момент относительно оси  $Oy$  будет иметь вид

$$M_y = -\ddot{u}m z_G - \ddot{\Theta}I - \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \lambda_{0n} - \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{q}_m \zeta_{0m}. \quad (39)$$

Множитель при  $\ddot{\Theta}$  представляет собой присоединенный момент инерции жидкости, введенный Н. Е. Жуковским [13].

Таким образом, после определения гидродинамических коэффициентов  $\lambda_n, \lambda_{0n}, \mu_n, I, \zeta_m, \zeta_{0m}, \beta_{nm}$  и интегрирования системы дифференциальных уравнений (31) при соответствующих начальных условиях открывается возможность определения силового и моментного воздействия жидкости на емкость при заданном движении последней.



### 3. УРАВНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТЕЛА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Пусть имеется твердое тело с двумя плоскостями геометрической и массовой симметрии  $Oxz$  и  $Oyz$ , которые в начальный момент совпадают с плоскостями  $O^*x^*z^*$  и  $O^*y^*z^*$  неподвижной системы координат  $O^*x^*y^*z^*$ . Пусть твердое тело имеет полость в форме прямоугольного параллелепипеда с упругими перегородками, которая частично заполнена идеальной и несжимаемой жидкостью. Предположим, что на твердое тело действует в направлении оси  $O^*x^*$  суммарная внешняя сила  $P_{x^*}^{(0)}$  и суммарный поперечный момент  $M_{Oy}^{(0)}$  внешних сил относительно оси  $Oy$ . Требуется определить движение рассматриваемой механической системы в предположении, что выполняются все введенные выше допущения относительно свойств жидкости и характера движения полости, перегородок и жидкости. Рассматриваемая задача относится ко второй задаче динамики тел с жидкостью.

Как и ранее, движение тела будем характеризовать малыми перемещениями точки  $O$  относительно точки  $O^*$  в направлении оси  $O^*x^*$  и малым углом поворота  $\Theta$  тела относительно оси  $Oy$ , которые подлежат определению в дальнейшем. Потенциал смещений жидкости  $\chi$  должен удовлетворять тем же уравнениям и граничным условиям, что и в случае вынужденных движений полости. Поэтому представим его в следующей форме:

$$\chi = u(t)x + \Theta(t)\Omega + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)\varphi_n + \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t)\psi_m. \quad (40)$$

Два соотношения относительно искомых обобщенных координат можно получить, используя динамическое условие для потенциала смещений жидкости на ее свободной поверхности и уравнение для перемещений перегородок. Они полностью совпадают с ранее полученными соотношениями (31).

Последние два уравнения можно получить различными способами на основании общих теорем аналитической механики. Однако в данном случае, когда имеются выражения для гидродинамической силы  $P_{x^*}^{(0)}$  (37) и гидродинамического момента  $M_y$  (39), наиболее удобно будет получить уравнения при использовании теоремы об изменении количества движения и кинетического момента. В линейной постановке задачи эти уравнения имеют вид

$$\frac{dK_0}{dt} = P_{x^*} + P_{x^*}^{(B)}; \quad \frac{dN_0}{dt} = M_0 + M_y + M_y^{(B)} + M_y^{(C)}, \quad (41)$$

где  $P_{x^*}$  и  $P_{x^*}^{(B)}$  – суммарная поперечная гидродинамическая сила, действующая на стенки полости, и суммарная поперечная внешняя сила, приложенная к телу;  $M_0, M_y, M_y^{(B)}, M_y^{(C)}$  – статический момент твердого тела, поперечный гидродинамический момент, поперечный момент внешних сил, гидростатический момент относительно оси  $Oy$ . Первое уравнение (41) представляет собой уравнение сил в проекции на ось  $Ox^*$ , второе – уравнение моментов относительно продольной оси  $Oy$ . В первой формуле (41) было учтено, что приращение вектора гидростатических сил за счет изменения координаты  $z^*$  точек стенок полости при ее повороте и деформации свободной поверхности жидкости равно нулю.

Количество движения  $K_0$  и кинетический момент  $N_0$  твердого тела относительно оси  $Oy$  будут

$$K_0 = m_0\dot{u} + m_0z_C\dot{\Theta}; \quad N_0 = I_0\dot{\Theta} + m_0z_C\dot{u}, \quad (42)$$

где  $m_0, I_0, z_C$  – масса, момент инерции и координата центра тяжести твердого тела соответственно. В свою очередь,

$$M_y^{(C)} = M_{y1}^{(C)} + M_{y2}^{(C)}, \quad (43)$$

где  $M_{y1}^{(C)}$  и  $M_{y2}^{(C)}$  – дополнительные моменты относительно оси  $Oy$  гидростатических сил, действующих на тело соответственно за счет деформации свободной поверхности жидкости и при его малом повороте на угол  $\Theta$ .

Для того, чтобы определить момент  $M_{y1}^{(C)}$ , достаточно записать элементарный момент от веса цилиндра с площадью основания  $dS$  и высотой

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x}$$

относительно оси  $Oy$  и проинтегрировать по невозмущенной поверхности жидкости. При этом получим

$$M_{y1}^{(C)} = g \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) \lambda_n. \quad (44)$$

Дополнительный момент относительно оси  $Oy$  гидростатических сил при повороте тела вокруг оси  $Oy$  на малый угол  $\Theta$  определяется по формуле

$$M_{y2}^{(C)} = -gm_0z_C\Theta. \quad (45)$$

Подставляя в уравнения (41) выражения (42)–(45), (37) и (39), а также статический момент твердого тела относительно оси  $Oy$

$$M_0 = -gm_0z_C\Theta, \quad (46)$$

получим

$$\begin{aligned} (m_0 + m) \ddot{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \lambda_n + (m_0 + m) z_C^{(s)} \ddot{\Theta} &= P_{x^*}^{(B)}; \\ (I_0 + I) \ddot{\Theta} + (m_0 + m) z_C^{(s)} (\ddot{u} + g\Theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \lambda_{0n} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{q}_m \zeta_{0m} - g \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \lambda_n &= M_y^{(B)}, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$z_C^{(s)} = \frac{m_0 z_C + m z_G}{m_0 + m}$$

– координата центра масс системы ”тело-затвердевшая жидкость”.

Дальнейшее упрощение уравнений (47) можно провести за счет выбора начала системы координат. Совместив начало координат с центром масс всей системы и добавив к уравнениям (47) уравнения (31), система уравнений, описывающая поперечные движения в плоскости  $O^*x^*z^*$  механической системы ”тело-жидкость-упругие перегородки”, примет вид

$$\begin{aligned} (m_0 + m) \ddot{u} + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \lambda_n &= P_{x^*}^{(B)}; \\ (I_0 + I) \ddot{\Theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \lambda_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{q}_m \zeta_{0m} - g \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \lambda_n &= \\ = M_y^{(B)}; \end{aligned} \quad (48)$$

$$\mu_n (\ddot{p}_n + \sigma_n^2 p_n) + \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{q}_m \beta_{nm} + \lambda_n \ddot{u} + \lambda_{0n} \ddot{\Theta} - g \lambda_n \Theta = 0;$$

$$\zeta_m (\ddot{q}_m + \Omega_m^2 q_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \beta_{nm} + \zeta_{0m} \ddot{\Theta} = 0.$$

Отметим, что коэффициенты уравнений (48) определяются через интегральные характеристики краевых задач для потенциала Стокса–Жуковского, о собственных колебаниях жидкости в полости при абсолютно жестких перегородках и о собственных колебаниях упругих пластин в полости при заземленной свободной поверхности жидкости. При этом они имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \rho \int_{\Sigma} x \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS; \lambda_{0n} = \rho \int_{\Sigma} \Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS; \\ \mu_n &= \rho \int_{\Sigma} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} dS; I = \rho \int_{S \cup \Sigma} \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} dS; \end{aligned}$$

$$\zeta_{0m} = 2l \rho \int_{\gamma^+ \cup \gamma^-} \Omega \frac{\partial \psi_m}{\partial \nu} dS;$$

$$\beta_{nm} = \rho \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \psi_m dS;$$

$$\zeta_m = 2l \int_a^b [\rho_0 \delta_0 w_m + \rho (\psi_m^+ - \psi_m^-)] w_m dx.$$

Полученные уравнения являются определенным обобщением известных уравнений движения твердого тела с жидкостью [14] на случай полости в форме горизонтально расположенного цилиндра с упругими ребрами-перегородками при движении ее в поперечной плоскости  $O^*x^*z^*$ . Они позволяют при задании соответствующих начальных условий определять параметры движения тела, жидкости и упругих перегородок, когда система сил, действующих на тело в поперечной плоскости, предполагается заданной.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

При проведении расчетов удобно пользоваться безразмерными величинами. Для этого, обозначив через  $R$  характерный линейный размер полости, введем следующие безразмерные величины, которые будем обозначать черточкой сверху:

$$(x, y, z) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})R; t = \bar{t} \sqrt{\frac{R}{g}};$$

$$(\sigma_n^2, \Omega_m^2) = (\bar{\sigma}_n^2, \bar{\Omega}_m^2) \frac{g}{R}; \chi = \bar{\chi} R^2; \varphi_n = \bar{\varphi}_n R;$$

$$w = \bar{w} R; \Omega = \bar{\Omega} R^2; \psi = \bar{\psi} R^2.$$

Тогда связь размерных коэффициентов уравнений (48) с безразмерными будет осуществляться по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \rho R^3 \bar{\lambda}_n; \mu_n = \rho R^3 \bar{\mu}_n; \lambda_{0n} = \rho R^4 \bar{\lambda}_{0n}; \\ I &= \rho R^5 \bar{I}; \zeta_{0m} = \rho R^5 \bar{\zeta}_{0m}; \beta_{nm} = \rho R^4 \bar{\beta}_{nm}; \\ \zeta_m &= \rho R^5 \bar{\zeta}_m. \end{aligned} \quad (49)$$

В свою очередь, алгебраическая система (15) для определения параметров  $\Omega_m^2$  и постоянных  $y_l^{(m)}$  в безразмерных величинах примет вид

$$\bar{D} \bar{p}_l^4 \bar{N}_l^2 y_l^{(m)} - \bar{\Omega}_m^2 \left[ \frac{\rho_0 \delta_0}{\rho R} \bar{N}_l^2 y_l^{(m)} + \rho \sum_{k=1}^{\infty} y_k^{(m)} \bar{b}_{kl} \right] = 0, \quad (50)$$

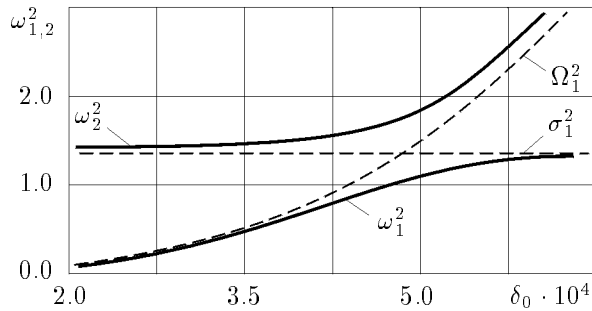


Рис. 1. Зависимость нормальных частот системы от относительной толщины перегородок

где

$$\bar{D} = \frac{E}{\rho g R} \left( \frac{\delta_0}{R} \right)^3 \frac{1}{12(1-\mu^2)}; \bar{p}_l = R p_l;$$

$$N_k^2 = R^3 \bar{N}_k^2; V_k = \bar{V}_k R^2; b_{kl} = R^4 \bar{b}_{kl}.$$

За характерный размер в дальнейшем будем принимать величину  $b$ .

Таблица 1

$k$	$\Omega_1^2$	$\Omega_2^2$
1	0.001547	—
2	0.001527	0.110352
3	0.001526	0.106458
4	0.001526	0.106397
5	0.001526	0.106313

Таблица 2

$m$	$\Omega_1^2$	$\Omega_2^2$
1	0.012357	—
2	0.012193	0.878794
3	0.012192	0.847997
4	0.012191	0.847515
5	0.012191	0.846850

Пусть система имеет следующие механические параметры:  $b = 1.0; d = 0.3; \nu = 0.34; \rho_0/\rho = 2.7$ . В табл. 1 приведены результаты расчетов первых двух частот  $\Omega_m^2$  в зависимости от количества членов  $k$  в разложениях (13) при  $h_1 = 0.5, \delta_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ . Данные табл. 2 показывают сходимость  $\Omega_m^2$  в зависимости от порядка  $m$  решаемой алгебраической системы (21) ( $h_1 = 0.5, \delta_0 = 10^{-5}$ ). Быстрая сходимость частот объясняется, в первую очередь, тем обстоятельством, что при построении решений краевых задач (14) учитывались их дифференциальные свойства вблизи особых точек границы области.

Рассмотрим сначала свободные поперечные колебания жидкости в рассматриваемом неподвижном сосуде с упругими перегородками. Связан-

ные движения жидкости и упругих диафрагм описываются системой дифференциальных уравнений (11)–(12). Далее будем учитывать лишь основной тон колебаний жидкости и перегородок. Тогда квадраты частот рассматриваемой механической системы будут определяться по формулам

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2(1-\tau^2)} \left[ (\sigma_1^2 + \Omega_1^2) \pm \sqrt{(\sigma_1^2 + \Omega_1^2)^2 - 4(1-\tau^2)\sigma_1^2\Omega_1^2} \right], \quad (51)$$

где  $\tau^2 = \beta_{11}^2/\zeta_1\mu_1$ .

На рис. 1 приведены результаты расчета квадратов нормальных частот  $\omega_{1,2}^2$  в зависимости от толщины перегородок  $\delta_0$ . Из рисунка видно, что парциальные частоты находятся между нормальными. При  $\delta_0 \rightarrow 0$  частота  $\omega_1$  стремится к первой частоте собственных колебаний пластинки в полости с жидкостью при заземленной ее свободной поверхности, а  $\omega_2$  – к первой частоте собственных колебаний жидкости в полости с абсолютно жесткими перегородками.

Общее решение системы уравнений (11)–(12) при  $n = 1, m = 1$  можно представить в виде

$$p_1(t) = P_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + P_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2), \quad (52)$$

$$q_1(t) = Q_1^{(1)} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + Q_1^{(2)} \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Подставив выражения (52) для обобщенных координат в систему (11)–(12), определим отношение амплитуд  $P_1^{(1)}/Q_1^{(1)}$  и  $P_1^{(2)}/Q_1^{(2)}$ , соответствующих значениям частот главных форм колебаний:

$$\frac{P_1^{(i)}}{Q_1^{(i)}} = \frac{(\Omega_1^2 - \omega_i^2)\zeta_1}{\omega_i^2\beta_{11}} = \frac{\omega_i^2\beta_{11}}{(\sigma_1^2 - \omega_i^2)\mu_1} = \frac{1}{k_i} \quad (i = 1, 2). \quad (53)$$

Учитывая, что парциальные частоты системы находятся между нормальными, из формул (53) заключаем, что  $k_1 > 0$ , а  $k_2 < 0$ . Следовательно, когда система совершает колебания с частотой  $\omega_1$  жидкость и упругие пластинки двигаются все время в одной фазе. Когда система совершает колебания с частотой  $\omega_2$ , жидкость и упругие ребра двигаются все время со сдвигом фазы на  $180^\circ$ . Чтобы вызвать какие-либо главные колебания системы, необходимо задать вначале отношение между амплитудами, соответствующее одному из выражений (53), и затем система должна быть предоставлена самой себе при нулевых начальных скоростях.

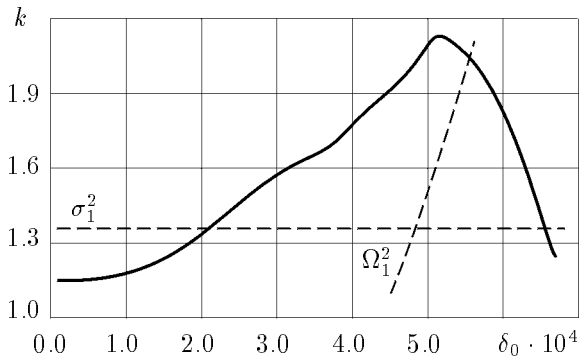


Рис. 2. Зависимость коэффициента  $k$  от относительной толщины перегородок

Рассмотрим далее некоторую задачу Коши и установим на примере этой задачи геометрические и физические параметры системы, при которых следует ожидать увеличение рассеяния энергии колеблющейся жидкости по сравнению с ее рассеянием в полости с жесткими ребрами-перегородками.

Пусть в начальный момент времени перегородки находились в положении равновесия, а свободная поверхность жидкости имела форму, соответствующую первой форме собственных колебаний жидкости при абсолютно жестких перегородках. Начальные условия для обобщенных координат  $p_1(t)$  и  $q_1(t)$ , следовательно, таковы:

$$p_1(0) = 0.1; \dot{p}_1(0) = 0; q_1(0) = 0; \dot{q}_1(0) = 0.$$

Тогда, подчиняя общее решение (52) этим начальным условиям и учитывая выражения (53), получаем следующие выражения для обобщенных координат:

$$p_1(t) = \frac{0.1}{k_1 - k_2} [k_1 \cos(\omega_2 t) - k_2 \cos(\omega_1 t)]; \quad (54)$$

$$q_1(t) = \frac{0.2k_1k_2}{k_1 - k_2} \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t.$$

Введем в рассмотрение некоторый коэффициент  $k$ :

$$k = \frac{\int_0^T |v_p(t) - v_q(t)| dt}{\int_0^T |v_g(t)| dt}, \quad (55)$$

где  $v_p(t)$  и  $v_g(t)$  – скорости жидкости у кромки перегородки в направлении оси  $Oz$  при упругой и абсолютно жесткой пластинах соответственно;  $v_q(t)$  – скорость движения кромки перегородки;  $T = 2\pi/\sigma_1$ .

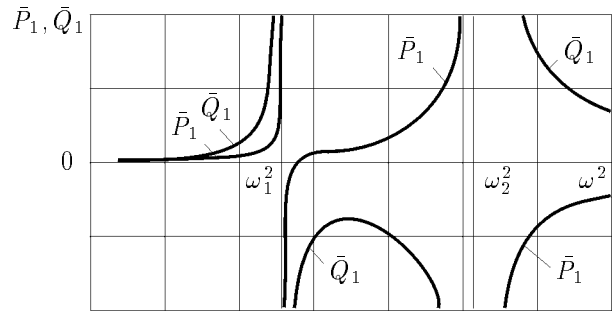


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний

Очевидно, что коэффициент  $k$  достигает своего максимального значения в том случае, когда пластинка и жидкость за период времени  $T$  преимущественно двигаются в противофазе друг к другу.

На рис. 2 показана зависимость коэффициента  $k$  от толщины перегородки  $\delta_0$ , из которой видно, что при значениях  $\Omega_1$ , близких к  $\sigma_1$ , относительная скорость частиц жидкости у кромки ребра в полости с упругой пластинкой увеличивается по сравнению со случаем жесткой пластинки. При этом естественно ожидать более интенсивное рассеивание энергии колеблющейся жидкости.

Предположим теперь, что рассматриваемая полость, частично заполненная жидкостью и имеющая упругие перегородки, совершает гармонические колебания в направлении оси  $Ox$  по закону

$$u(t) = F \sin \omega t.$$

Тогда определение обобщенных координат  $p_n(t)$  и  $q_m(t)$ , согласно (31), сводится к интегрированию следующей неоднородной системы дифференциальных уравнений:

$$\mu_n (\ddot{p}_n + \sigma_n^2 p_n) + \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{q}_m \beta_{nm} = \omega^2 F \lambda_n \sin \omega t; \quad (56)$$

$$\zeta_m (\ddot{q}_m + \Omega_m^2 q_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{p}_n \beta_{nm} = 0.$$

Для установившихся колебаний жидкости и перегородок ограничимся, как и выше, рассмотрением только первых форм колебаний жидкости и пластинок. Частное решение уравнений (56) будем искать в виде

$$p_1(t) = P_1 \sin \omega t, \quad q_1(t) = Q_1 \sin \omega t.$$

Тогда из системы (56) получим следующие значения для амплитуд  $P_1$  и  $Q_1$ :

$$\bar{P}_1 = \frac{P_1}{F} = \frac{\omega^2 \lambda_1 \zeta_1 (\Omega_1^2 - \omega^2)}{(\zeta_1 \mu_1 - \beta_{11}^2) (\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2)}; \quad (57)$$

$$\bar{Q}_1 = \frac{Q_1}{F} = \frac{\omega^4 \lambda_1 \beta_{11}}{(\zeta_1 \mu_1 - \beta_{11}^2)(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – резонансные частоты рассматриваемой механической системы.

На рис.3 представлены амплитудные кривые  $\bar{P}_1$  и  $\bar{Q}_1$  в зависимости от квадрата безразмерной частоты возбуждения  $\omega^2$ . Из рисунка видно, что если выбрать параметры рассматриваемой механической системы таким образом, чтобы первая частота свободных колебаний упругих перегородок в полости при заземленной свободной поверхности жидкости совпадала с частотой поступательного гармонического возбуждения полости в направлении оси  $Ox$ , то упругие ребра могут сыграть роль динамического гасителя первой формы волновых движений жидкости.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена математическая модель движения твердого тела с полостью в форме прямоугольного параллелепипеда, содержащей идеальную жидкость и упругие продольные перегородки, в поперечной плоскости ее симметрии и предложен приближенный метод определения гидроупругих параметров этой модели.

При исследовании свободных антисимметричных колебаний жидкости в данной полости показано, что максимальное возрастание скорости потока относительно перегородок имеет место тогда, когда первая частота свободных колебаний перегородок в полости при заземленной свободной поверхности жидкости близка к соответствующей частоте колебаний в полости с жесткими перегородками. При этих параметрах рассматриваемой механической системы следует ожидать увеличение демпфирования колебаний жидкости по сравнению с демпфированием в полости с жесткими перегородками. Этот вывод полностью согласуется с выводами работ [3] и [5], полученными на основании данных по визуализации потока вблизи жестких и упругих перегородок и по исследованию некоторой модельной задачи соответственно.

В случае вынужденных гармонических колебаний полости в поперечной плоскости ее симметрии показано, что упругие перегородки могут сыграть роль динамического гасителя антисимметричных волновых движений жидкости по ее основному тону.

Результаты работы могут быть использованы при проектировании новых транспортных средств, содержащих большие массы жидкости.

## Благодарности

Авторы признательны DFG за частичную финансовую поддержку.

1. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. – М: Машиностроение, 1971. – 563 с.
2. Garza L. R., Dodge F. T. A comparison of flexible and rigid battles for damping tank sloshing // J. Spacecraft and Rockets. – 1967. – 4, N 6. – P. 805–806.
3. Schwind R. G., Scotti R. S., Skogh J. Analysis of flexible battles for damping tank sloshing // J. Spacecraft and Rockets. – 1967. – 4, N 1. – P. 47–53.
4. Stephens D. G. Flexible battles for slosh damping // J. Spacecraft and Rockets. – 1966. – 3, N 5. – P. 765–766.
5. Мельникова И. М., Микишев Г. Н. О некоторых особенностях колебаний жидкости в полостях с упругими демпфирующими перегородками // Прикл. механика. – 1972. – 8, Вып. 3. – С. 106–112.
6. Троценко В. А. О возмущенном движении тела, содержащего полость с упругой кольцевой перегородкой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1975. – N 4. – С. 78–88.
7. Охотимский Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью // Прикл. математика и механика. – 1956. – 20, вып. 1. – С. 3–20.
8. Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В. Методы расчета присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. – Киев: Наукова думка, 1969. – 251 с.
9. Галицын Д. А., Троценко В. А. К расчету частот и присоединенных масс жидкости в прямоугольном контейнере с перегородками в поперечной плоскости его симметрии // Прикладна гідромеханіка. – 2000. – 2 (74), N 2. – С. 20–27.
10. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
11. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 798 с.
12. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – Т. 1. – 535 с.
13. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной каплевой жидкостью. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 762 с. (Собр. соч. в 7 т.; Т.2)
14. Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. – М.: Машиностроение, 1968. – 532 с.