

УДК 532.526

ДО ПОБУДОВИ СИСТЕМИ КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТ З ВИКОРИСТАННЯМ ЧИСЕЛЬНО-КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

ВАЛ. І. МАМЧУК

Київський міжнародний університет цивільної авіації

Одержано 13.04.2000

Розглянуто метод чисельно-конформного відображення двозв'язних областей довільної геометричної форми на канонічний прямокутник для автоматичної побудови загальної системи криволінійних координат, зв'язаної з тілом, при розв'язуванні задач математичної фізики. Вперше в якості функцій, що породжують відображення (при практичній реалізації методу), розглядаються розв'язки системи двох автономних рівнянь щодо невідомих функцій.

Рассмотрен метод численно-конформного отображения двухсвязных областей произвольной геометрической формы на канонический прямоугольник для автоматического построения общей системы криволинейных координат, связанной с телом, при решении задач математической физики. Впервые в качестве функций, которые рожают отображение (при практической реализации метода), рассматриваются решения системы двух автономных уравнений относительно неизвестных функций.

The method of numerically-conformal mapping of two-connected areas of any geometric form on a canonical rectangle for automatic construction of a general (common) system of curvilinear coordinates connected with a body for solving of mathematical physics problems is considered. For the first time as functions, which give rise to map (for a practical realization of a method), the solutions of a system of two-independent (two-autonomous) equations concerning unknown functions are considered.

ВСТУП

При чисельному розв'язуванні задач математичної фізики основну незручність становить геометрична форма області, в межах якої потрібно розв'язати поставлену задачу. Цю незручність усуває метод автоматичної чисельної побудови загальної системи криволінійних координат, зв'язаної з тілом, який ґрунтується на чисельній побудові відображень складної геометричної форми на відповідні канонічні області, що мають вигляд метричного прямокутника. Питання знаходження чисельних розв'язків поставленої задачі в канонічній області є достатньо вивченим. Мета даної роботи – висвітлення результатів з подальшого вивчення можливостей та модифікація методу з використанням конформних та квазіконформних відображень областей, що зустрічаються в гідроаеромеханіці, на канонічні області.

1. МЕТОД ТА ВИПАДОК КУСКОВО-ГЛАДКИХ ЗАМКНУТИХ КОНТУРІВ

Зміст методу згідно з [1] полягає у відображенні k -зв'язної ($k \geq 2$) області (рис. 1) на прямокутну область (рис. 2) з подальшим розв'язуванням в перетвореній площині поставленої задачі.

Для відображення k -зв'язної області G , обмеженої замкнутим контуром Γ і системою $k-1$ кусково-гладких замкнутих контурів Γ_p

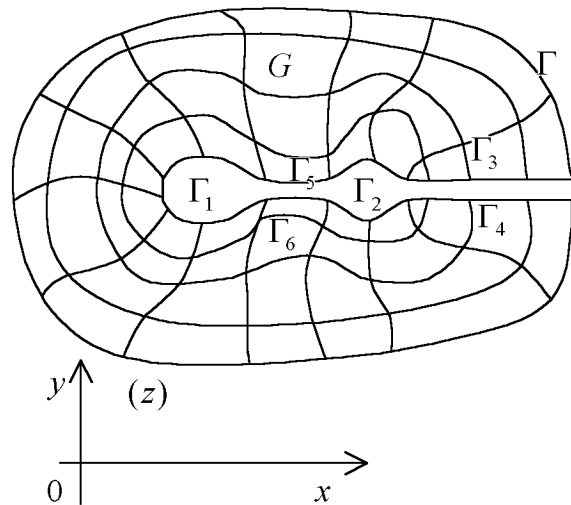


Рис. 1. Фізична площина

($p = \overline{1, k-1}$), внутрішніх по відношенню до Γ і області G , на прямокутну область G' потрібно побудувати перетворюючі функції:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

які визначають лінії рівня відображення на прямокутник $0 < \xi < a$, $0 < \eta < b$ перетвореної площини

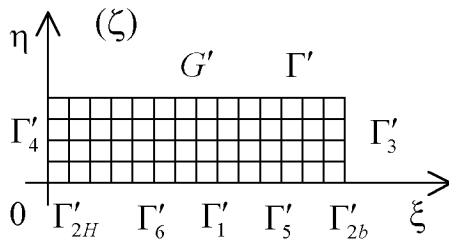


Рис. 2. Перетворена площина

$\xi O \eta$. Відображення (1) слід вибирати за умови, що воно задовольняє одну із систем рівнянь еліптичного типу.

Згідно [1] за функції $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, що в (1), вибирають гармонічні функції, які задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

із умовами Діріхле: $\eta = \eta_0 = \text{const}$ на Γ , $\eta = \eta_1 = \text{const}$ на Γ_p ; $\xi(x, y)$, значення якої задаються вздовж координати ξ прямокутника на Γ , Γ_p . Відображення, що отримуємо з використанням гармонічних $\xi(x, y)$ та $\eta(x, y)$ функцій, “породжує” рівномірну сітку криволінійних координат в області G і має вигляд

$$\zeta(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y). \quad (3)$$

При практичній реалізації відображення вихідними змінними вважаються змінні ξ , η . Через це потрібно знайти обернене відображення щодо (1). Для регулярного відображення (1) з якобіаном $J > 0$ існує обернене відображення

$$z(\zeta) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta), \quad (4)$$

де $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, в залежності від умов зв'язку між собою, задовольняють відповідні системи рівнянь. У зв'язку з цим, перейдемо до координат ξ , η , в яких будемо проводити чисельні розрахунки.

Система виду

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} = 0, \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

де $\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2$, $\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$, є оберненою у відношенні до системи (2) з перетвореними граничними умовами: $x = f_0(\xi, \eta_0)$ на Γ' ; $x = f_p(\xi, \eta_1)$, $y = \phi_p(\xi, \eta_1)$ на Γ'_p . Розв'язки системи (5) утворюють відображення (4). При цьому крива Γ

фізичної площини переходить на верхню границю Γ' в перетвореній площині. Аналогічно всі Γ_p , як і розрізи між ними, переходять в Γ'_p , що лежать на нижній границі перетвореної площини. Ліва і права границі прямокутної області перетвореної площини в фізичній площині співпадають. Крива, що переходить в ці границі, визначає розріз багатозначної функції $\xi = \xi(x, y)$. Ця крива з'єднує зовнішній контур Γ з внутрішнім Γ_{k-1} контуром. Результати, які отримані з використанням системи рівнянь (5) для побудови системи криволінійних координат в областях різної геометричної конфігурації, наведено в [2].

Якщо гармонічні функції $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ задовольняють умови Коші – Рімана (Ейлера – Д'Аламбера), то їх називають спряженими. В цьому випадку їх знаходять як розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} \xi_x = \eta_y, \\ \xi_y = -\eta_x, \end{cases} \quad (6)$$

що визначає конформне відображення типу (3) з першою парою характеристик $P_1 = 1$, $\theta = \pi/2$, та з граничними умовами, що в (2).

Для знаходження функцій $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, як складових відображення типу (4) потрібно отримати систему рівнянь, обернену щодо системи (6). Оскільки $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, то

$$\begin{cases} dx = x_\xi d\xi + x_\eta d\eta, \\ dy = y_\xi d\xi + y_\eta d\eta, \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy, \\ d\eta = \eta_x dx + \eta_y dy. \end{cases} \quad (8)$$

Помножуючи обидві частини першої рівності, що в системі (8), спочатку на η_x , а другої – на $-\xi_x$, потім відповідно на η_y і $-\xi_y$ та в обох випадках отримані рівності почленно додаючи, будемо мати

$$\begin{cases} \eta_x d\xi - \xi_x d\eta = (\xi_y \eta_x - \eta_y \xi_x) dy, \\ \eta_y d\xi - \xi_y d\eta = (\xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y) dx. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} dx = \frac{\eta_y}{\xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y} d\xi - \frac{\xi_y}{\xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y} d\eta, \\ dy = \frac{\eta_x}{\xi_y \eta_x - \eta_x \xi_y} d\xi - \frac{\xi_x}{\xi_y \eta_x - \eta_x \xi_y} d\eta. \end{cases}$$

Порівняємо останні рівності із записами для dx ,

dy , що в системі (7). Зазначимо, що

$$x_\xi = \frac{\eta_y}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}, \quad x_\eta = -\frac{\xi_y}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x},$$

$$y_\xi = -\frac{\eta_x}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}, \quad y_\eta = \frac{\xi_x}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}.$$

Вираз $J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$ – якобіан перетворення. Через те, що

$$\frac{J(x, y)}{(\xi, \eta)} = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = 1 / \left(\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right) = 1 / \left(\frac{J(\xi, \eta)}{(x, y)} \right),$$

то $x_\xi = \eta_y / (x_\xi \eta_y - x_\eta y_\xi)$ і $\eta_y = x_\xi / (x_\xi \eta_y - x_\eta y_\xi)$. За аналогією, $\eta_x = -y_\xi / (x_\xi \eta_y - x_\eta y_\xi)$, $\xi_x = y_\eta / (x_\xi \eta_y - x_\eta y_\xi)$, $\xi_y = -x_\eta / (x_\xi \eta_y - x_\eta y_\xi)$, $J_1 = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$. Підставляючи в систему (6) замість частинних похідних функцій $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ по x, y їх вирази через частинні похідні функцій $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ по ξ, η , отримуємо:

$$y_\eta / J_1 = x_\xi / J_1, \quad -x_\eta / J_1 = y_\xi / J_1.$$

Тобто

$$x_\xi = y_\eta, \quad x_\eta = -y_\xi. \quad (9)$$

Система рівнянь (9) обернена по відношенню до системи (6). Зводячи систему (9) до системи рівнянь автономних відносно x і y , та продеферінціюючи перше рівняння по ξ , а друге по η , отримуємо

$$x_{\xi\xi} = y_{\xi\eta}, \quad x_{\eta\eta} = -y_{\xi\eta}.$$

Додаючи почленно рівняння останньої системи, матимемо $x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} = 0$. Аналогічно $y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta} = 0$.

Система (9) зветься до системи рівнянь

$$\begin{cases} x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} = 0, \\ y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

з граничними умовами, що в (5).

Як бачимо, система (10) впливає із системи рівнянь (5) при $\alpha=1, \beta=0, \gamma=1$. З іншого боку, оскільки $\alpha = P_1 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta / P_1$, $\beta = (P_1 - 1 / P_1) \sin \theta \cos \theta$, $\gamma = P_1 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta / P_1$, то при $P_1 = 1, \theta = \pi/2$ дійсно $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1$.

2. ВИПАДОК ТОЧКОВОГО ЗАДАННЯ КОНТУРІВ

Розглянемо випадок точкового задання меж двозв'язної області G з “вільним” розрізом та фіксованими кінцями. Для чисельної реалізації конформного відображення координатну сітку в площині $\xi O \eta$ виберемо рівномірною з кроком h по обох координатах (рис. 3, 4).

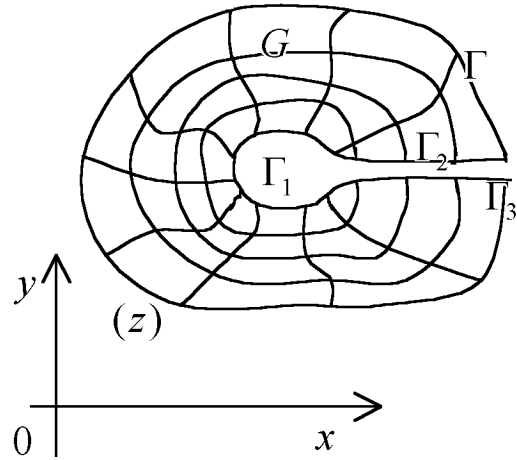


Рис. 3. Фізична площина

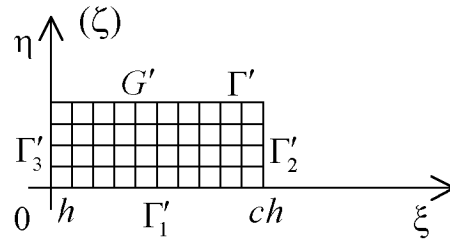


Рис. 4. Перетворена площина

Задамо відповідність відображення параметричного прямокутника G' ($0 \leq \xi \leq ch, 0 \leq \eta \leq dh$) на область кільця G за допомогою задання точок на контурах Γ_1, Γ відповідно

$$x(nh, 0) = x_{n0}, \quad y(nh, 0) = y_{n0},$$

$$x(nh, dh) = x_{nd}, \quad y(nh, dh) = y_{nd}, \quad (11)$$

$$n = \overline{0, c}.$$

На “вільному” розрізі записуємо умови періодичності:

$$x(0, mh) = x(ch, mh),$$

$$y(0, mh) = y(ch, mh),$$

$$x(h, mh) = y((c+1)h, mh), \quad (12)$$

$$y(h, mh) = y((c+1)h, mh),$$

$$m = \overline{0, d}.$$

Залежності (12) означають рівність функцій та їх похідних відповідного порядку на кінцях розрізу.

Положення вузлів (ξ_n, η_m) визначимо як $\xi_n = nh$, $n = \overline{0, c}$; $\eta_m = mh$, $m = \overline{0, d}$ де c, d (як і в (6) та (7)) – кількість поділок сторін прямокутника (відповідно по ξ та η), що визначають його модуль $M_{\text{пр}} = c/d = a/b$. При цьому кількість вузлів прямокутника визначається як $(c+1)(d+1)$ (на тілі розміщено c точок).

Враховуючи своєрідність областей відображення та з метою раціонального складання програми для чисельної реалізації відображення, апроксимацію необхідних похідних, що входять в (10) та в формулу ітераційного процесу (14), здійснюємо по блоках різницевиими співвідношеннями:

$$\text{а) } \begin{cases} x_{\xi\xi} \approx [\hat{x}_{\xi\xi}]_{0,m} = \frac{x_{1,m} - 2x_{0,m} + x_{c-1,m}}{h^2}, \\ x_{\eta\eta} \approx [\hat{x}_{\eta\eta}]_{0,m} = \frac{x_{0,m+1} - 2x_{0,m} + x_{0,m-1}}{h^2}, \\ \text{якщо } m = \overline{1, d-1}, \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_{\xi\xi} \approx [\hat{x}_{\xi\xi}]_{n,m} = \frac{x_{n+1,m} - 2x_{n,m} + x_{n-1,m}}{h^2}, \\ x_{\eta\eta} \approx [\hat{x}_{\eta\eta}]_{n,m} = \frac{x_{n,m+1} - 2x_{n,m} + x_{n,m-1}}{h^2}, \\ \text{якщо } n = \overline{1, c-1}, \quad m = \overline{1, d-1}. \end{cases} \quad (13)$$

Для функції $y(\xi, \eta)$ співвідношення аналогічні.

Через те, кількість вузлів в прямокутній області є $(c+1)(d+1)$, то формальна кількість невідомих відносно функцій $x(\xi, \eta)$ є такою ж. В силу точкового задання границь області G , в $2(c+1)$ вузлах ліній Γ'_1 та Γ' значення $x(\xi, \eta)$ відомі. Оскільки

$$x(\xi, \eta)|_{\Gamma_2} = x(\xi, \eta)|_{\Gamma_3}$$

(з умови періодичності відображення), то кількість невідомих зменшиться ще на $d-1$. Отже, фактична кількість невідомих є $c(d-1)$. Для їх знаходження потрібна така ж кількість рівнянь. Проводячи апроксимацію першого рівняння системи (10) різницевиими співвідношеннями типу (13, б), отримаємо $(c-1)(d-1)$ рівнянь для знаходження невідомої у внутрішніх вузлах прямокутника. Апроксимуючи це ж рівняння різницевиими співвідношеннями типу (13, а), матимемо $d-1$ рівнянь для знаходження значень невідомої x у внутрішніх вузлах лінії Γ'_3 . Тоді кількість рівнянь буде

$$(c-1)(d-1) + (d-1) = (d-1)(c-1+1) = c(d-1).$$

Такі міркування можна провести й щодо невідомої y .

Отримана система рівнянь (по два для кожного вузла) розв'язується прискореним ітераційним

методом послідовних зміщень, згідно якого

$$\begin{aligned} x_{n,m}^{(i+1)} &= x_{n,m}^{(i)} + \omega F_{n,m}^{(i)}/4, \\ y_{n,m}^{(i+1)} &= y_{n,m}^{(i)} + \omega Q_{n,m}^{(i)}/4, \\ F_{n,m}^{(i)} &= [\hat{x}_{\xi\xi} + \hat{x}_{\eta\eta}]_{n,m}^{(i)}, \\ Q_{n,m}^{(i)} &= [\hat{y}_{\xi\xi} + \hat{y}_{\eta\eta}]_{n,m}^{(i)}, \end{aligned} \quad (14)$$

де i – номер ітерації, ω – прискорюючий множник. Важливо оптимально задати початкові наближення функцій $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ у вузлах сітки. Для їх задання пропонуються формули

$$\begin{aligned} x_{n,m} &= x_{n,0} + \frac{(x_{n,d} - x_{n,0})m}{d}, \\ y_{n,m} &= y_{n,0} + \frac{(y_{n,d} - y_{n,0})m}{d}. \end{aligned} \quad (15)$$

Складено алгоритм – універсальна програма для автоматичної чисельної побудови загальної системи криволінійних координат, зв'язаної з тілом. Чисельні експерименти показали, що і у випадках дуже викривлених границь розрахункові точки лежать у внутрішній частині області, а комірки сітки не накладаються. При відображенні області кільця з розрізом на прямокутних конформних інваріантами відповідних областей є їх модулі. Для існування зазначеного відображення та його єдиності слід встановити зв'язок між модулями областей. Модуль прямокутника є $M_{\text{пр}} = c/d$, а модуль області кільця з радіусами кіл R та r ($R > r$) становить $M_k = \ln(R/r)$. За виконання рівності

$$\frac{2\pi}{\ln(R/r)} = \frac{c}{d} \quad (16)$$

конформне відображення існує. Оскільки при точковому заданні границь двозв'язної області з “вільним” розрізом та фіксованими кінцями значення c фіксоване, то модуль залежить від значення d . В разі більшого викривлення розрізу модуль чотирикутної області зменшується, тому, отримуючи наближене значення d , оцінюючи за рівнянням (16), слід взяти його як $d+1$, $d+2$ і т. д. Якщо розріз в області G наближається до ортогонального в перетині з границями Γ , Γ_1 , тобто розріз найбільш виправляється, то таке значення d вважається найоптимальнішим.

3. РЕЗУЛЬТАТИ ТЕСТУВАННЯ

Приклад 1. Проведено розрахунки з відображення кільця, обмеженого колами радіусів R та r

($R > r$) на параметричній прямокутній. Відомо, що функція $z = e^{\zeta}$ відображає прямокутник зі сторонами 2π по осі $O\xi$ і $\ln(R/r)$ по осі $O\eta$ на область кільця з розрізом по відрізку $[r, R]$. Приймалось, що $R = 10r$, координати віднесені до r . На внутрішньому колі розміщувалось 60 точок. За обчисленням, згідно (16), $d \approx 22$. Отже, розрахунки проводились на прямокутній сітці з 61×23 кількістю вузлів. Лінії $\eta = \text{const}$ області G' відображаються в концентричні кола з приростами радіусів відповідно: 0.1121; 0.1228; 0.1360; 0.1509; 0.1677; 0.1863; 0.2069; 0.2298; 0.2551; 0.2834; 0.3148; 0.3495; 0.3882; 0.4312; 0.4789; 0.5320; 0.5910; 0.6566; 0.7291; 0.8087; 0.8936; 0.9754 області G , лінії $\xi = \text{const}$ – у відрізки прямих, що лежать на радіусах. Знайдені ординати точок “вільного” розрізу дорівнюють нулю, тобто він співпадає з відрізком $[1, 10]$. В розрахунках приймалося $\varepsilon = 10^{-5}$ та $\omega = 1.87$.

Приклад 2. При побудові розрахункових сіток для різних крилових профілів в ролі зовнішньої границі приймалось коло радіуса, довжина якого дорівнювала десяти хордам профіля, з центром на середині хорди. Координати відносились до довжини хорди профіля, передня крайка профіля є точка $(0, 0)$, задня – $(1, 0)$. Так, на профілі літака Як-40 з відносною товщиною профіля в головному перерізі $\bar{c} = 10\%$, розміщувалось 60 точок ($c = 60$). Обчислення, які проведено за описаною вище методикою, з урахуванням поправок на результати ітераційного процесу показали, що $d = 26$. Тобто на параметричному прямокутнику була розміщена 61×27 кількість вузлів. “Вільний” розріз з’єднує точки $(1, 0)$ та $(10.5, 0)$, а точка розрахункової сітки, що лежить на розрізі і найменш віддалена від задньої крайки, є $(1.0047, 0)$. Одна з ліній $\xi = \text{const}$ перетвореної площини відображається у відрізок $[-9.5, 0]$ фізичної площини. Точка, що лежить на ньому і найменш віддалена від передньої крайки, є $(-0.0136, 0)$. Приймалося $\varepsilon = 10^{-4}$, $\omega = 1.87$.

Проведені чисельні експерименти з відображення двозв’язних областей різних геометричних форм показали, що в порівнянні з відображеннями, побудованими з використанням системи (5) та відповідного ітераційного процесу (що в [2]), отримуємо до 20 % економії процесорного часу. Пов’язано це з відсутністю змішаної похідної в системі рівнянь (10) і відповідно в (14) та відсутністю перших частинних похідних в (14).

Як відзначалось вище, покладаючи в системі (5) та у відповідному ітераційному процесі $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, отримуємо (10) та (14), то для комп’ютерної реалізації відображення з використанням спряжених гармонічних функцій досить в програмі провести відповідні зміни. Чисельні експерименти, проведені в такий спосіб, показали ідентичність результатів, отриманих за автономною програмою. При використанні універсальної програми маємо незначне збільшення процесорного часу.

ВИСНОВКИ

1. Запропонований метод чисельно-конформного відображення двозв’язних областей довільної геометричної форми на канонічний прямокутник для автоматичної побудови загальної системи криволінійних координат зв’язаної з тілом, дозволяє ефективно розв’язувати задачі з обтікання тіл довільної конфігурації.
2. Складено алгоритм – універсальну автономну програму, що дозволяє отримувати складові відображення з використанням спряжених гармонічних функцій.
3. Проведеними чисельними експериментами з відображення областей довільної конфігурації за програмою (як частинний випадок), складеною з використанням гармонічних функцій, обґрунтовано переваги наведеного підходу.

1. *Thames F. C., Thompson J. F., Mastin C. W., Walker R. L.* Numerical solutions for viscous and potential flow about arbitrary two-dimensional bodies using body-fitted coordinate-systems // *J. Comput. Phys.* – 1977. – **24**. – Р. 245–273.
2. *Мамчук Вал. И.* Использование квазиконформных отображений для численного построения системы координат, связанной с телом // *Прикл. аэродинам.* – Киев: КИИГА. – 1980. – С. 25–28.
3. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.: ГИТГА, 1952. – 413 с.
4. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 476 с.
5. *Годунов С. К., Прокопов Г. П.* Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах // *Ж. вычисл. мат. и мат. физ.* – **12**, N 2. – 1972. – С. 429–440.