

УДК 004.31:004.22:534:621.382

**А. Ю. Липинский, А. Н. Рудякова, В. В. Данилов**  
Донецкий национальный университет. Кафедра радиофизики  
ул. Университетская, 24, 83001 Донецк, Украина  
e-mail: krf@dongu.donetsk.ua

## **Моделирование процессов записи-чтения фоторефрактивных транспарантов методом распространяющегося пучка**

*Представлено моделирование эволюции светового пучка с учетом фоторефрактивного эффекта, вызывающего изменение коэффициента преломления кристалла ниобата лития; приведены результаты экспериментальных исследований, подтверждающие корректность выбранной модели. Показана возможность формирования фоторефрактивных фазовых транспарантов в кристаллах  $\text{LiNbO}_3$  и создания на их основе фоторефрактивных обратимых запоминающих сред с дискретным представлением информации.*

**Ключевые слова:** дискретная обработка информации, фоторефрактивный фазовый транспарант, метод распространяющегося пучка.

### **Введение**

Принципиальное сходство процесса обработки потока данных оптоэлектронными акустооптическими вычислительными средами (ОАВС) [1] и электронными программируемыми логическими интегральными схемами (FPGA — Field Programmable Gate Array) с точки зрения структурной организации вычислительного устройства [2–4] открывает перспективы построения ОАВС с динамически изменяемой архитектурой. Приведенная аналогия предполагает решение задачи создания устройств памяти — фоторефрактивных обратимых запоминающих сред (ФОЗС) в составе ОАВС, в основу работы которых может быть положен эффект локального изменения показателя преломления электрооптических кристаллов под воздействием светового потока.

Моделирование процесса выполнения математических операций оптоэлектронными акустооптическими вычислительными средами, содержащими ФОЗС, включает не только численное решение задачи о дифракции света в акустооптической ячейке конечных размеров [5], но также расчет режимов записи-чтения информации в фоторефрактивной среде. Хорошо себя зарекомендовавший метод конечных элементов обладает рядом преимуществ [6] и успешно используется в

© А. Ю. Липинский, А. Н. Рудякова, В. В. Данилов

электродинамике [5, 7], однако предполагает привлечение значительных вычислительных мощностей и объемов оперативной памяти. В связи с этим, размеры области анализа обычно не превышают нескольких десятков длин волн в среде [7]. Другим известным методом численного решения задач о распространении электромагнитных волн является метод распространяющегося пучка (Beam Propagation Method — BPM) [8, 9], требующий значительно меньших ресурсов, чем аналогичный конечно-элементный, и позволяющий решать задачи для областей большого размера при условии медленно меняющейся огибающей электрической и магнитной составляющих поля.

В статье приведена конечно-разностная формулировка метода распространяющегося пучка для малых углов падения светового луча, применимая для моделирования процессов записи-чтения фоторефрактивных транспарантов; проведено моделирование эволюции светового пучка с учетом изменения коэффициента преломления кристалла ниобата лития. Представлены результаты экспериментальных исследований, подтверждающие корректность выбранной модели.

### Конечно-разностная формулировка метода распространяющегося пучка для малых углов падения светового луча

В случае ТМ-поляризованной световой волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ , для структуры, однородной вдоль оси  $y$ , компоненты поля  $H_x$ ,  $H_z$  и  $E_y$  равны нулю, а уравнения поля можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0 H_y, \quad (1)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = -j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_x, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial x} = -j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_z. \quad (3)$$

Для получения волнового уравнения относительно компоненты  $E_x$  продифференцируем (1) по  $z$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} - j\omega\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial z}$$

и подставим в получившееся выражение (2), исключив  $H_y$ :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial z \partial x} = -j\omega\mu_0 (-j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r E_x). \quad (4)$$

В отсутствие сторонних зарядов

$$\nabla \cdot (\varepsilon_r \mathbf{E}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_r E_x) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_r E_z) = 0. \quad (5)$$

Предполагая, что изменение  $\varepsilon_r$  вдоль направления распространения достаточно мало

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial z} \approx 0,$$

второе слагаемое в левой части (5) можно представить в виде:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_r E_z) = \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial z} E_z + \varepsilon_r \frac{\partial E_z}{\partial z} \approx \varepsilon_r \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (6)$$

С учетом (6), уравнение (5) запишем как

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_r E_x). \quad (7)$$

Подставляя (7) в (4), получим волновое уравнение для компоненты  $E_x$  электрического поля

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_r E_x) \right) + k_0^2 \varepsilon_r E_x = 0, \quad (8)$$

где  $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ .

Представим  $E_x(x, y, z)$  в виде медленно меняющейся огибающей  $\varphi(x, y, z)$  с быстро осциллирующей фазовой составляющей  $\exp(-j\beta z)$ :

$$E_x(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \exp(-j\beta z). \quad (9)$$

После подстановки (9) в (8) и сокращения экспоненциального множителя  $\exp(-j\beta z)$  получим следующее уравнение:

$$2j\beta \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_r \varphi) \right) + k_0^2 (\varepsilon_r - n_{eff}^2) \varphi, \quad (10)$$

где  $n_{eff}$  — эффективный показатель преломления среды,  $\beta = n_{eff} k_0$ .

Для малых углов падения световой волны

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

из (10) получим волновое уравнение Френеля (так называемая параксиальная аппроксимация [8]):

$$2j\beta \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_r \varphi) \right) + k_0^2 (\varepsilon_r - n_{\text{eff}}^2) \varphi. \quad (11)$$

Для дискретизации уравнения (11), запишем координаты  $x$ ,  $z$ , функцию  $\varphi(x, z)$  и относительную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_r(x, z)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= p\Delta x, \\ z &= l\Delta z, \\ \varphi(x, z) &= \varphi_p^l, \\ \varepsilon_r(x, z) &= \varepsilon_r^l(p), \end{aligned}$$

где  $\Delta x$  и  $\Delta z$  — шаги дискретизации вдоль осей  $x$  и  $z$  соответственно;  $p$  и  $l$  — номера узловых точек прямоугольной сетки.

При дискретизации в направлении  $x$ , первый член правой части (11) можно записать как [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_r \varphi) \right) &= \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{1}{\varepsilon_r(p+1/2)} \frac{\varepsilon_r(p+1)\varphi_{p+1} - \varepsilon_r(p)\varphi_p}{\Delta x} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\varepsilon_r(p-1/2)} \frac{\varepsilon_r(p)\varphi_p - \varepsilon_r(p-1)\varphi_{p-1}}{\Delta x} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(p+1/2) &\approx \frac{\varepsilon_r(p+1) + \varepsilon_r(p)}{2}, \\ \varepsilon_r(p-1/2) &\approx \frac{\varepsilon_r(p) + \varepsilon_r(p-1)}{2}. \end{aligned}$$

Преобразуем выражение (12) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_r \varphi) \right) &= \frac{2}{\Delta x^2} \left( \frac{\varepsilon_r(p+1)\varphi_{p+1} - \varepsilon_r(p)\varphi_p}{\varepsilon_r(p+1) + \varepsilon_r(p)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varepsilon_r(p)\varphi_p - \varepsilon_r(p-1)\varphi_{p-1}}{\varepsilon_r(p) + \varepsilon_r(p-1)} \right) = \alpha_w \varphi_{p-1} + \alpha_x \varphi_p + \alpha_e \varphi_{p+1}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\alpha_w = \frac{2\varepsilon_r(p-1)}{\Delta x^2 (\varepsilon_r(p) + \varepsilon_r(p-1))}, \quad (14)$$

$$\alpha_e = \frac{2\varepsilon_r(p+1)}{\Delta x^2 (\varepsilon_r(p+1) + \varepsilon_r(p))}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \alpha_x &= -\frac{2\varepsilon_r(p)}{\Delta x^2} \left( \frac{1}{\varepsilon_r(p+1) + \varepsilon_r(p)} + \frac{1}{\varepsilon_r(p) + \varepsilon_r(p-1)} \right) = \\ &= -\varepsilon_r(p) \left( \frac{\alpha_e}{\varepsilon_r(p+1)} + \frac{\alpha_w}{\varepsilon_r(p-1)} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Второе слагаемое (11) при дискретизации по  $x$  примет вид:

$$k_0^2 (\varepsilon_r - n_{eff}^2) \varphi = k_0^2 (\varepsilon_r(p) - n_{eff}^2) \varphi_p. \quad (17)$$

Подставляя (13)–(17) в (11), получим:

$$2j\beta \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \alpha_w \varphi_{p-1} + (\alpha_x + k_0^2 (\varepsilon_r(p) - n_{eff}^2)) \varphi_p + \alpha_e \varphi_{p+1}. \quad (18)$$

Дискретизация (18) по  $z$  приводит к

$$\begin{aligned} 2j\beta \frac{\varphi_p^{l+1} - \varphi_p^l}{\Delta z} &= \frac{1}{2} \left[ \alpha_w^l \varphi_{p-1}^l + (\alpha_x^l + k_0^2 (\varepsilon_r^l(p) - n_{eff}^2)) \varphi_p^l + \alpha_e^l \varphi_{p+1}^l \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \alpha_w^{l+1} \varphi_{p-1}^{l+1} + (\alpha_x^{l+1} + k_0^2 (\varepsilon_r^{l+1}(p) - n_{eff}^2)) \varphi_p^{l+1} + \alpha_e^{l+1} \varphi_{p+1}^{l+1} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Доумножая обе части (19) на 2 и перегруппировывая слагаемые таким образом, чтобы слева находились неизвестные значения искомой функции на следующем слое, а справа — известные значения на предыдущем слое, получим:

$$\begin{aligned} -\alpha_w^{l+1} \varphi_{p-1}^{l+1} + \left( -\alpha_x^{l+1} + \frac{4j\beta}{\Delta z} - k_0^2 (\varepsilon_r^{l+1}(p) - n_{eff}^2) \right) \varphi_p^{l+1} - \alpha_e^{l+1} \varphi_{p+1}^{l+1} = \\ = \alpha_w^l \varphi_{p-1}^l + \left( \alpha_x^l + \frac{4j\beta}{\Delta z} + k_0^2 (\varepsilon_r^l(p) - n_{eff}^2) \right) \varphi_p^l + \alpha_e^l \varphi_{p+1}^l. \end{aligned} \quad (20)$$

Представим выражение (20) в виде

$$A(p) \varphi_{p-1}^{l+1} + B(p) \varphi_p^{l+1} + C(p) \varphi_{p+1}^{l+1} = D(p), \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned}
 A(p) &= -\alpha_w^{l+1}, \\
 B(p) &= -\alpha_x^{l+1} + \frac{4j\beta}{\Delta z} - k_0^2 (\varepsilon_r^{l+1}(p) - n_{eff}^2), \\
 C(p) &= -\alpha_e^{l+1}, \\
 D(p) &= \alpha_w^l \varphi_{p-1}^l + \left( \alpha_x^l + \frac{4j\beta}{\Delta z} + k_0^2 (\varepsilon_r^l(p) - n_{eff}^2) \right) \varphi_p^l + \alpha_e^l \varphi_{p+1}^l.
 \end{aligned}$$

При моделировании распространения световых волн в областях, не содержащих отражательные элементы на границах, необходимо учесть возможность паразитного отражения, искажающего результаты расчета. Одним из подходов к уменьшению влияния паразитного отражения является увеличение поперечных размеров области анализа, что приводит к ужесточению требований по объему оперативной памяти и производительности персонального компьютера, используемого для моделирования. Другой подход состоит в применении либо прозрачных граничных условий [10], либо различных вариантов поглощающих и идеально согласованных слоев.

В случае прозрачных граничных условий выражения для элементов матриц  $B(p)$  и  $D(p)$  при  $p = 1$  и  $p = N$  (где  $N$  — количество узлов разбиения вдоль оси  $x$ ) изменятся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B(1) &= -\alpha_w^{l+1} \gamma_L - \alpha_x^{l+1} + \frac{4j\beta}{\Delta z} - k_0^2 (\varepsilon_r^{l+1}(1) - n_{eff}^2), \\
 D(1) &= \alpha_w^l \gamma_L \varphi_1^l + \left( \alpha_x^l + \frac{4j\beta}{\Delta z} + k_0^2 (\varepsilon_r^l(1) - n_{eff}^2) \right) \varphi_1^l + \alpha_e^l \varphi_2^l, \\
 B(N) &= -\alpha_e^{l+1} \gamma_R - \alpha_x^{l+1} + \frac{4j\beta}{\Delta z} - k_0^2 (\varepsilon_r^{l+1}(N) - n_{eff}^2), \\
 D(N) &= \alpha_w^l \varphi_{N-1}^l + \left( \alpha_e^l \gamma_R + \alpha_x^l + \frac{4j\beta}{\Delta z} + k_0^2 (\varepsilon_r^l(N) - n_{eff}^2) \right) \varphi_N^l,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \gamma_L &= \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \\
 \gamma_R &= \frac{\varphi_N}{\varphi_{N-1}}.
 \end{aligned}$$

Система линейных алгебраических уравнений (21), описываемая трехдиагональной матрицей, может быть эффективно решена методом прогонки (алгоритм Томаса) [11]. При численном решении, для снижения ошибок округления, необходимо выполнить масштабирование: пространственные координаты домножить на  $k_0$ , постоянную распространения  $\beta$  разделить на  $k_0$ .

## Моделирование режима записи-чтения фоторефрактивного транспаранта в кристалле $\text{LiNbO}_3$

При моделировании эволюции светового пучка большой интенсивности (режим записи), проходящего через кристалл ниобата лития, необходимо учитывать фоторефрактивный эффект [12]. Показатель преломления среды в этом случае зависит от электрической компоненты  $E_x$  необыкновенно поляризованной световой волны (направление оси  $x$  совпадает с направлением главной оптической оси кристалла) [13]:

$$n = n_e + n_2 \cdot |E_x|^2, \quad (22)$$

где  $n_e$  — линейный показатель преломления необыкновенной волны;  $n_2$  — эффективный нелинейный показатель преломления. Как показано в [14],  $n_2$  можно записать как

$$n_2 \cong -\frac{1}{2} n_e^3 r_{33} \frac{k \alpha \gamma_R N_A}{\mu e \beta N_D},$$

где  $\gamma_R$  — скорость рекомбинации носителей;  $r_{33}$  — соответствующий электрооптический коэффициент;  $\mu$  — подвижность носителей;  $\alpha$  — коэффициент поглощения;  $k$  — фотовольтаическая постоянная;  $\beta$  — скорость тепловой генерации;  $N_A$  — концентрация акцепторов;  $N_D$  — концентрация доноров;  $e$  — заряд электрона.

Расчет значений огибающей  $\varphi(x, z)$  компоненты  $E_x$  электрического поля (9) в узловых точках прямоугольной сетки  $(p, l)$  производится последовательно для каждого из слоев в направлении оси  $z$  на основе численного решения системы уравнений (21). На каждом шаге расчета значения показателя преломления текущего слоя обновляются в соответствии с выражением (22).

Режиму чтения записанной информации соответствует малая интенсивность падающего светового пучка, не приводящая к существенному изменению показателя преломления кристалла [14]. Численное моделирование изменения компоненты  $H_y$  магнитного поля выполнено с учетом значений показателя преломления, полученных в процессе записи фазового транспаранта.

## Результаты моделирования

Моделирование и экспериментальные исследования процессов записи-чтения проведены для кристалла  $\text{LiNbO}_3$ : размер  $45 \times 10 \times 9$  мм;  $n_e = 2,2$ ;  $n_2 = -1,4 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{В}^2$  [13–15].

Начальные условия учитывают гауссов характер распространения оптического пучка, а также наличие амплитудного транспаранта, состоящего из чередующихся темных и прозрачных полос шириной 0,25 мм.

На рис. 1 приведено распределение компоненты  $E_x$  электрического поля, соответствующее выбранному режиму записи: длина волны 532 нм и интенсивность падающего светового потока 3 Вт/см<sup>2</sup>.

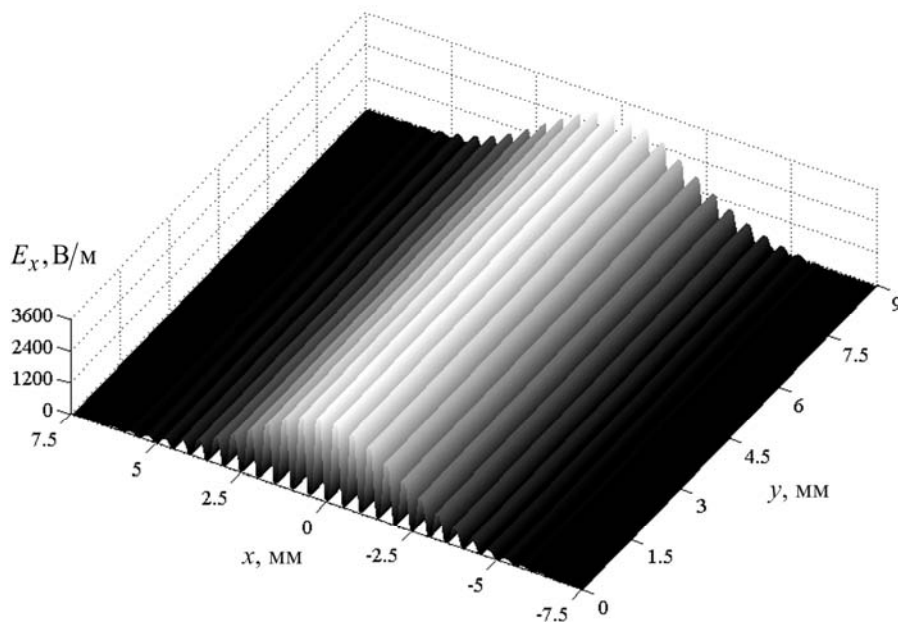


Рис. 1. Структура светового пучка в кристалле ниобата лития

В процессе записи формируется фазовый транспарант, распределение изменения показателя преломления  $\Delta n$  для которого приведено на рис. 2. Как видно, наибольшим по модулю значениям  $\Delta n$  на рис. 2 соответствуют максимальные значения компоненты  $E_x$  электрического поля.

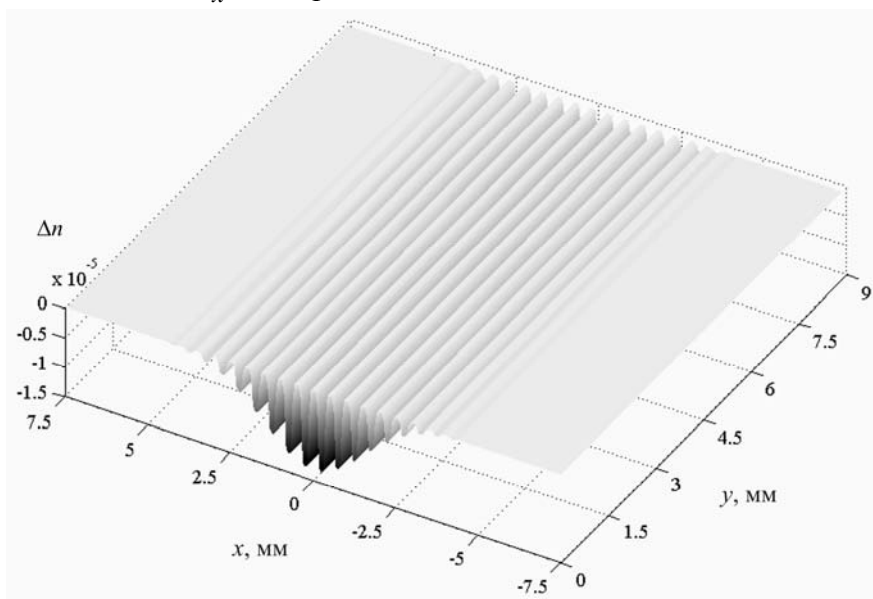


Рис. 2. Фоторефрактивное изменение показателя преломления



Режим чтения отличается от режима записи отсутствием амплитудного транспаранта на пути светового потока и малой интенсивностью ( $0,07 \text{ Вт/см}^2$ ) падающего пучка, позволяющей не учитывать дополнительное изменение показателя преломления, вносимое при считывании.

Моделирование процесса чтения фазового транспаранта выполнялось для компоненты  $H_y$  магнитного поля, содержащей информацию о фазовой модуляции зондирующего светового пучка. На рис. 3 изображены изменения фазы электромагнитной волны, возникающие по мере распространения светового пучка в кристалле ниобата лития.

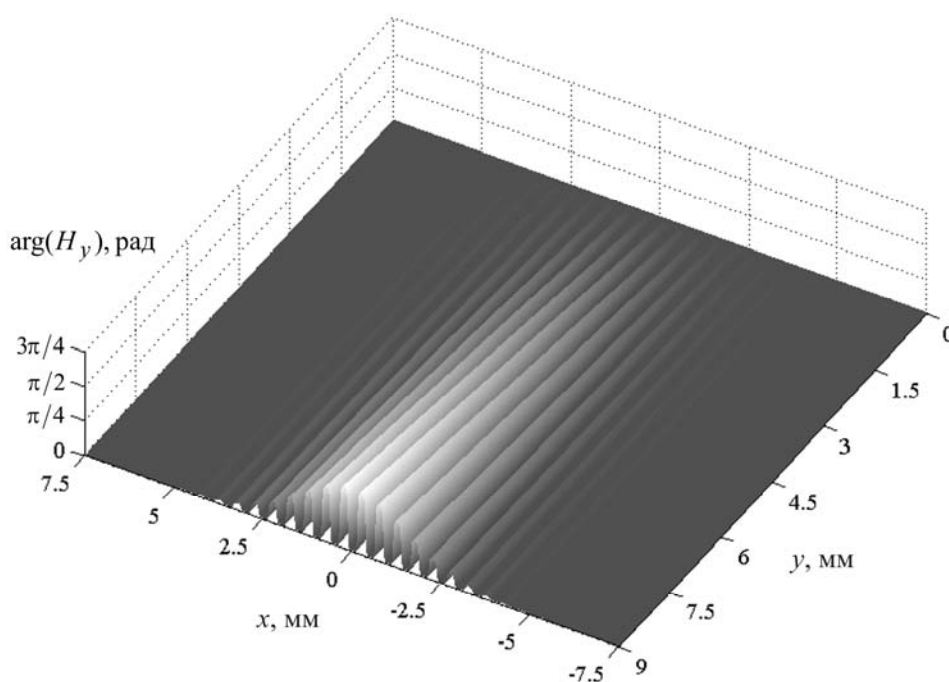


Рис. 3. Фаза электромагнитной волны при считывании

## Результаты эксперимента

Запись и последующее считывание информации с фоторефрактивных транспарантов выполнялось с использованием макета экспериментальной установки, изображенного на рис. 4.

Световой поток от лазерного модуля DHL-G200 компании DHOM (Suzhou Daheng Optics and Fine Mechanics) освещает амплитудный транспарант в виде решетки (период  $0,5 \text{ мм}$ ), размещенный на поверхности образца (кристалл  $\text{LiNbO}_3$ ). Режиму записи соответствует интенсивность порядка  $3 \text{ Вт/см}^2$ , время экспонирования — до 10 минут.

Сформированная в процессе записи периодическая фазовая решетка регистрировалась цифровой зеркальной фотокамерой Nikon D3000, после преобразования фазомодулированного светового потока в амплитудно-модулированный.

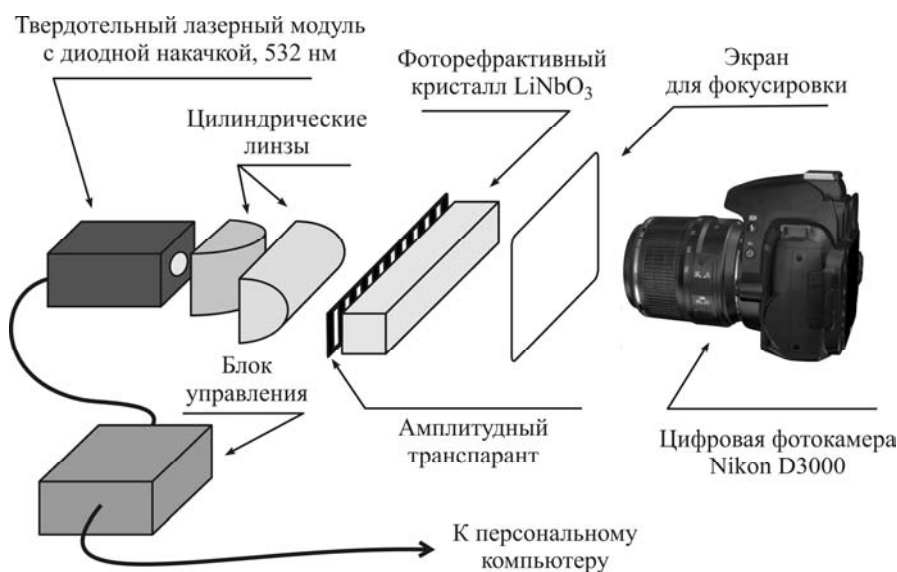


Рис. 4. Макет экспериментальной установки

Для выбранного времени экспонирования картина изменения сохранялась в течение длительного времени (несколько суток). Стирание записанной информации обеспечивалось равномерной засветкой кристалла ультрафиолетовой лампой ЕВТ-01.

На рис. 5 приведены фотоснимки распределения интенсивности в прошедшем образце пучке. Результаты эксперимента соответствует физическим представлениям о природе фоторефрактивного эффекта в кристалле ниобата лития, положенным в основу численного моделирования процесса записи.

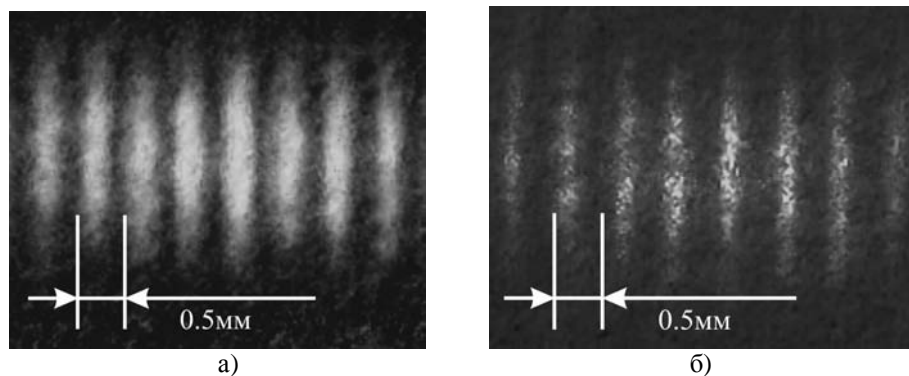


Рис. 5. Распределение интенсивности выходного светового потока в режиме чтения:  
а) с установленным транспарантом до записи; б) записанной информации

## ВЫВОДЫ

Результаты моделирования и экспериментальных исследований, приведенные в работе, показали возможность формирования фоторефрактивных фазовых транспарантов в кристаллах LiNbO<sub>3</sub> и создания на их основе ФОЗС с дискретным представлением информации.

Моделирование фоторефракции в области с характерными размерами, превышающими длину волны в ~20000 раз, выполнено методом распространяющегося пучка. Основным преимуществом метода являются сравнительно малые затраты памяти, связанные с послойным способом вычисления составляющих электромагнитного поля, требующим запоминания информации только о предыдущем слое. Это делает возможным учет изменения показателя преломления среды вследствие фоторефрактивного эффекта по мере распространения светового пучка.

1. Липинский А.Ю. Оптоэлектронные интегральные вычислительные среды / А.Ю. Липинский. — Донецк: изд-во «Ноулидж», 2010. — 147 с.
2. Choi Y. A Real-Time FPGA-Based 20000-Word Speech Recognizer with Optimized DRAM Access / Y. Choi, K. You, J. Choi, W. Sung // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. — 2010. — Vol. 57, N 8. — P. 2119–3131.
3. Sudarsanam A. Dynamically Reconfigurable Systolic Array Accelerators: A Case study with Extended Kalman Filter and Discrete Wavelet Transform Algorithms / A. Sudarsanam, R. Barnes, J. Carver [et al.] // IET Computers & Digital Techniques. — 2010. — Vol. 4, N 2. — P. 126–142.
4. Chun H.H. Hybrid Reconfigurable Architecture for Low Power Digital Signal Processing System / H.H. Chun, C.K.F. Yiu // Proc. 2010 International Conference on Green Circuits and Systems. — 2010. — P. 370–374.
5. Липинский А.Ю. Моделирование слабого акустооптического взаимодействия методом конечных элементов во временной области / А.Ю. Липинский, А.Н. Рудякова, В.В. Данилов // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2006. — Т. 8, № 2. — С. 25–37.
6. Jin J. The Finite Element Method in Electromagnetics / J. Jin. — New York: J. Wiley & Sons, 2002. — 753 p.
7. Липинский А.Ю. Пространственно-временное представление сигналов в акустооптических устройствах дискретной обработки информации / А.Ю. Липинский // Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2009. — Т. 11, № 1. — С. 74–86.
8. Poon T.-C. Engineering Optics with Matlab / T.-C. Poon, T. Kim. — Singapore: World Scientific, 2006. — 249 p.
9. Kawano K. Introduction to Optical Waveguide Analysis / K. Kawano, T. Kitoh. — New-York, NY: John Wiley & Sons, 2001. — 271 p.
10. Hadley G.R. Transparent Boundary Condition for the Beam Propagation Method / G.R. Hadley // IEEE Journal of Quantum Electronics. — 1992. — Vol. 28, N 1. — P. 363–370.
11. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — М: Бинум. Лаборатория знаний, 2006. — 636 с.
12. Yu F.T.S. Photorefractive Optics: Materials, Properties, and Applications / F.T.S. Yu, S. Yin. — San Diego, CA: Academic Press, 2000. — 570 p.
13. Banerjee P.P. Nonlinear Optics: Theory, Numerical Modeling, and Applications / P.P. Banerjee. — New-York, NY: Marcel Dekker, 2004. — 315 p.
14. Liu J.J. Role of Diffusive, Photovoltaic, and Thermal Effects in Beam Fanning in LiNbO<sub>3</sub> / J.J. Liu, P.P. Banerjee, Q.W. Song // JOSA B. — 1994. — Vol. 11, N 9. — P. 1688–1693.
15. Nikogosyan D.N. Nonlinear Optical Crystals: A Complete Survey / D.N. Nikogosyan. — New-York, NY: Springer, 2005. — 427 p.

Поступила в редакцию 10.05.2011