

УДК 532.528

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПРОФИЛИ ДЛЯ СУПЕРКАВИТИРУЮЩИХ ГРЕБНЫХ ВИНТОВ С ИНТЕРЦЕПТОРАМИ И ФИКСИРОВАННЫМ УГЛОМ ЗАОСТРЕНИЯ ПЕРЕДНЕЙ КРОМКИ

А. Ш. АЧКИНАДЗЕ, Г. М. ФРИДМАН

*Санкт-Петербургский Государственный морской технический университет,
Россия*

Получено 15.06.2000

Получено точное аналитическое решение нелинейной задачи обтекания кавитирующего клина со щеками разной длины и с интерцептором на задней кромке нижней щеки в безударном режиме, когда критическая точка совпадает с вершиной клина. В качестве модели замыкания каверны использована схема Эфроса с возвратной струйкой. Полученные численные результаты сопоставлены с данными, полученными в рамках линейной теории. В результате спроектирован кавитирующий профиль нового типа с контролируемой толщиной передней кромки, с клиновидной полностью смоченной передней частью и интерцептором относительной длины 0.02.

Одержано точний аналітичний роз'язок нелінійної задачі обтікання кавітуючого клина зі щокми різної довжини та з інтерцептором на задній кромці нижньої щоки в безударному режимі, коли критична точка співпадає з вершиною клину. Як модель замикання каверни використана схема Ефроса зі зворотним струменем. Одержані чисельні результати порівнюються з даними, одержаними в рамках лінійної теорії. В результаті спроектровано кавітуючий профіль нового типу з контрольованою товщиною передньої кромки, з клиновидною повністю змоченою передньою частиною та інтерцептором відносної довжини 0.02.

The analytical solution has been carried out to the two-dimensional (2D) nonlinear problem of a shock free cavitating flow past a wedge with sides of unequal length and a spoiler at the trailing edge of the 'lower' face. The Efros cavity closure scheme with a re-entrant jet was adopted. The numerical results obtained are compared with those of the corresponding linear theory. A new type of the supercavitating section is designed, having a wedge-like shape of the two-sided wetted forward part, a 2% spoiler and a controllable thickness of the leading edge of the foil.

ВВЕДЕНИЕ

Решение нелинейных задач о кавитационном обтекании клина было получено различными методами и различными авторами давно, начиная с работ Мещерского [1, 2] о струйном обтекании клина. Однако в предлагаемой постановке решение задачи дается впервые. Важно отметить, что в работе рассматривается исключительно проектировочная задача, когда кавитирующий профиль проектируется на заранее определенный единственный режим, который можно назвать безударным. При этом передняя критическая точка совпадает с острием клина и проблем возможного образования частичных каверн на щеках клина не возникает. Рассмотрено обтекание только прямощечного клина с интерцептором на выходящей кромке одной из щек. Может показаться, что изучен слишком узкий для целей проектирования класс профилей. Тем не менее, как показано авторами в работе [4], при выполнении обобщенного условия однолистности, подразумевающего достаточную толщину каверны, использование плоской пластинки с оптимальным интер-

цептором позволяет получить кавитирующий профиль, не уступающий оптимальному по гидродинамическому качеству кавитирующему профилю с более сложной нагнетающей поверхностью.

Особую практическую ценность имеет кавитирующий профиль нового типа, спроектированный с помощью предложенного нелинейного подхода и имеющий значительную по длине клиновидную смоченную с обеих сторон переднюю часть и интерцептор, стоящий на задней кромке перпендикулярно нижней щеке клина и имеющий относительную длину ≈ 0.02 .

Сравнение с линейной моделью для случая очень малой длины интерцептора показало хорошее согласие, хотя линейный подход не дает возможности уточнить толщину профиля в районе входящей кромки.

1. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ О БЕЗУДАРНОМ ОБТЕКАНИИ КЛИНА

Рассмотрим нелинейную задачу о безударном обтекании кавитирующей пластины с интерцепто-

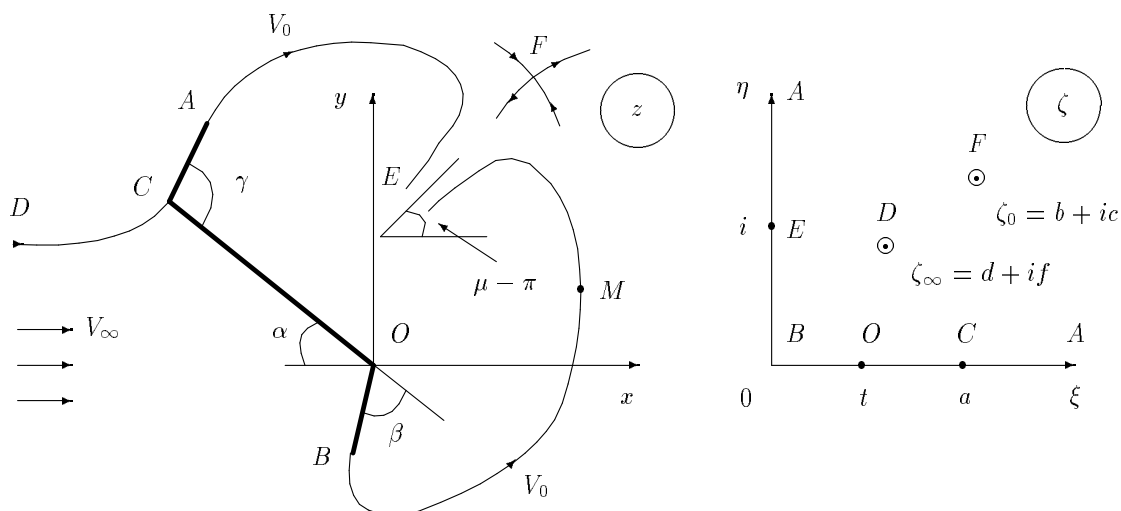


Рис. 1. Физическая и вспомогательная плоскости для нелинейной задачи обтекания кавитирующего профиля в безударном режиме. Схема замыкания Эффроса с возвратной струйкой

ром потоком идеальной невесомой жидкости при произвольном числе кавитации (рис. 1). В качестве модели замыкания каверны использована схема Эффроса с возвратной струйкой. Начало координат помещено в заднюю кромку пластины, причем ось x направлена по потоку, а ось y – вертикально вверх. Скорость потока на бесконечности перед пластиной равна V_∞ . Область течения ограничена смоченными участками $[AC]$, $[CO]$ и $[OB]$ длины $|AC| = l_w$, $|CO| = l$ и $|OB| = \varepsilon$, и границами каверны AE и BE . Угол атаки пластины α , угол наклона интерцептора к пластине β , а угол отклонения предкрылка $[AC]$ – γ . Важно отметить, что для безударного режима обтекания точка разветвления нулевой линии тока (критическая точка) должна находиться в вершине клина $(ACOB)$, а именно, в точке C . В таком случае длина предкрылка l_w рассматривается как неизвестный параметр задачи при заданном угле γ . Для числа кавитации $\sigma \geq 0$ скорость на границе каверны $V_0 = V_\infty \sqrt{1 + \sigma}$. Как обычно для схемы Эффроса, из-за влияния возвратной струйки E , в области течения возникает дополнительная критическая точка F . Поскольку струйка уходит на второй лист Римановой поверхности, то бесконечно удаленная точка потока D отлична от точки E . Направление струйки на бесконечности в точке E обозначено через угол μ (рис. 1). Таким образом, поставленная плоская задача относится к теории струй идеальной жидкости [1] и может быть решена соответствующими методами.

При соответствии точек физической $z = x + iy$ и вспомогательной $\zeta = \xi + i\eta$ плоскостей, показанных на рис. 1, метод особых точек Чаплыгина дает следующее точное решение задачи в виде производных комплексного потенциала $F = \varphi + i\psi$:

$$\chi(\zeta) = \frac{dF}{V_0 dz} = e^{i(\alpha-\gamma)} \left(\frac{\zeta - a}{\zeta + a} \right)^{\gamma/\pi} \left(\frac{\zeta - t}{\zeta + t} \right)^{\beta/\pi} \times \frac{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \bar{\zeta}_0)}{(\zeta + \zeta_0)(\zeta + \bar{\zeta}_0)}; \quad (1)$$

$$\frac{dF}{d\zeta} = N \frac{\zeta(\zeta^2 - a^2)(\zeta^2 - \zeta_0^2)(\zeta^2 - \bar{\zeta}_0^2)}{(\zeta^2 + 1)(\zeta^2 - \zeta_\infty^2)^2(\zeta^2 - \bar{\zeta}_\infty^2)^2}, \quad (2)$$

откуда

$$z(\zeta) = \frac{N}{V_0} e^{i(\gamma-\alpha)} \int_t^\zeta \frac{\zeta(\zeta + a)^{1+\gamma/\pi} (\zeta - a)^{1-\gamma/\pi}}{(\zeta^2 + 1)} \times \left(\frac{\zeta + t}{\zeta - t} \right)^{\beta/\pi} \cdot \frac{(\zeta + \zeta_0)^2 (\zeta + \bar{\zeta}_0)^2}{(\zeta^2 - \zeta_\infty^2)^2 (\zeta^2 - \bar{\zeta}_\infty^2)^2} d\zeta. \quad (3)$$

Пять общих условий

$$z_C = z(a) = l e^{i(\pi-\alpha)}; \quad z_B = z(0) = \varepsilon e^{-i(\alpha+\beta)}; \\ z(\infty) - z(a) = l_w e^{i(\gamma-\alpha)}; \\ \chi(\zeta_\infty) = \frac{V_\infty}{V_0}; \quad \oint_{\zeta_\infty} \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = 0$$

генерируют систему из семи нелинейных уравнений для определения восьми неизвестных задачи $a, t, \zeta_0 = b + ic, \zeta_\infty = d + if, N/V_\infty$ и l_w .

Первые три условия переписаны в виде

$$l = \frac{N}{V_0} \int_t^a (a - \xi)^{1-\gamma/\pi} \left(\frac{\xi + t}{\xi - t} \right)^{\beta/\pi} \mathcal{A}(\xi) d\xi; \quad (4)$$

$$\varepsilon = \frac{N}{V_0} \int_0^t (a - \xi)^{1-\gamma/\pi} \left(\frac{t + \xi}{t - \xi} \right)^{\beta/\pi} \mathcal{A}(\xi) d\xi; \quad (5)$$

$$l_w = \frac{N}{V_0} \int_a^\infty (\xi - a)^{1-\gamma/\pi} \left(\frac{\xi + t}{\xi - t} \right)^{\beta/\pi} \mathcal{A}(\xi) d\xi, \quad (6)$$

где

$$\mathcal{A}(\xi) = (a + \xi)^{1+\gamma/\pi} \frac{\xi}{(\xi^2 + 1)} \times \frac{(\xi^2 + 2b\xi + b^2 + c^2)}{(\xi^2 + 2d\xi + d^2 + f^2)^2 (\xi^2 - 2d\xi + d^2 + f^2)^2}. \quad (7)$$

Разделение вещественной и мнимой части в четвертом условии приводит к формулам

$$\begin{aligned} & \arg(d - b + i(f - c)) + \arg(d - b + i(f + c)) - \\ & - \arg(d + b + i(f + c)) - \arg(d + b + i(f - c)) + \\ & + \frac{\gamma}{\pi} \{ \arg(d - a + if) - \arg(d + a + if) \} + \\ & + \frac{\beta}{\pi} \{ \arg(d - t + if) - \arg(d + t + if) \} = \gamma - \alpha; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma = & \left(\frac{(d + a)^2 + f^2}{(d - a)^2 + f^2} \right)^{\gamma/\pi} \times \left(\frac{(d + t)^2 + f^2}{(d - t)^2 + f^2} \right)^{\beta/\pi} \times \\ & \times \frac{((d + b)^2 + (f + c)^2)((d + b)^2 + (f - c)^2)}{((d - b)^2 + (f - c)^2)((d - b)^2 + (f + c)^2)} - 1, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\arg \zeta \in [0; \pi]$. Пятое условие может быть записано как

$$\begin{aligned} & \frac{\pi + \gamma}{2\pi} \frac{1}{\zeta_\infty + a} + \frac{\pi - \gamma}{2\pi} \frac{1}{\zeta_\infty - a} + \\ & + \frac{1}{\zeta_\infty - \zeta_0} + \frac{1}{\zeta_\infty - \bar{\zeta}_0} - \frac{\zeta_\infty}{\zeta_\infty^2 + 1} - \\ & - \frac{2\zeta_\infty}{\zeta_\infty^2 - \bar{\zeta}_0^2} - \frac{\beta}{\pi} \frac{t}{\zeta_\infty^2 - t^2} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

и после разделения вещественной и мнимой части найдем

$$\begin{aligned} & \frac{\pi + \gamma}{2\pi} \frac{d + a}{(d + a)^2 + f^2} + \frac{\pi - \gamma}{2\pi} \frac{d - a}{(d - a)^2 + f^2} + \\ & + \frac{d + b}{(d + b)^2 + (f + c)^2} + \frac{d + b}{(d + b)^2 + (f - c)^2} - \\ & - \frac{(d^2 + f^2 + 1)d}{(d^2 - f^2 + 1)^2 + 4d^2 f^2} - \\ & - \frac{1}{2d} - \frac{\beta}{\pi} \frac{(d^2 - f^2 - t^2)t}{(d^2 - f^2 - t^2)^2 + 4d^2 f^2} = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi + \gamma}{2\pi} \frac{f}{(d + a)^2 + f^2} + \frac{\pi - \gamma}{2\pi} \frac{f}{(d - a)^2 + f^2} + \\ & + \frac{f + c}{(d + b)^2 + (f + c)^2} + \frac{f - c}{(d + b)^2 + (f - c)^2} + \\ & + \frac{(1 - d^2 - f^2)f}{(d^2 - f^2 + 1)^2 + 4d^2 f^2} - \\ & - \frac{1}{2f} - \frac{2\beta}{\pi} \frac{dft}{(d^2 - f^2 - t^2)^2 + 4d^2 f^2} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Очевидно, задача не имеет единственного решения, поскольку число неизвестных превосходит количество условий. Тем не менее, можно использовать дополнительное соотношение, определяющее направление возвратной струйки в бесконечно удаленной точке E (рис. 1). Расчеты показывают, что угол μ не влияет существенно на гидродинамические коэффициенты, и поэтому его можно считать заданным. Так как направление вектора скорости $\theta(\zeta) = -\arg \chi(\zeta)$ на границе каверны ($\zeta = i\eta, \xi = 0$) имеет вид

$$\begin{aligned} \theta(\eta) = & -\arg \chi(i\eta) = -\alpha + \gamma - \frac{2\gamma}{\pi} \arctan \frac{a}{\eta} - \\ & - 2 \arctan \frac{b}{\eta - c} - 2 \arctan \frac{b}{\eta + c} - \frac{2\beta}{\pi} \arctan \frac{t}{\eta}, \end{aligned} \quad (13)$$

то восьмое условие записано как

$$\theta(1) = \mu. \quad (14)$$

Система уравнений (4)–(14) позволяет определить все неизвестные параметры задачи и найти коэффициент давления на смоченной поверхности:

$$\begin{aligned} C_p^n(\xi) = & 1 - |\chi(\xi)|^2 = 1 - \left| \frac{\xi - a}{\xi + a} \right|^{2\gamma/\pi} \times \\ & \times \left(\frac{\xi^2 - 2b\xi + b^2 + c^2}{\xi^2 + 2b\xi + b^2 + c^2} \right)^2 \left| \frac{\xi - t}{\xi + t} \right|^{2\beta/\pi}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\xi = \text{Re}(\zeta)$ связано с z соотношением (3). Коэффициенты подъемной силы и сопротивления C_L и C_D для безударного кавитирующего профиля

$$C_L + iC_D = -\frac{i}{l} \int_0^{\infty} C_p^n(\xi) \frac{dz}{d\xi} d\xi = -\frac{i}{l} (1 + \sigma) \left(z_A - z_B - \frac{1}{V_0^2} \int_0^{\infty} \frac{dF}{d\xi} \frac{d\overline{F}}{dz} d\xi \right) \quad (16)$$

В то же время, применяя теорию вычетов, получим следующее соотношение [1], справедливое для профиля произвольной формы:

$$C_D = \frac{2q}{V_{\infty} l} \left(1 - \frac{V_0}{V_{\infty}} \cos \mu \right); \quad (17)$$

$$C_L = \frac{2q}{V_{\infty} l} \left(\frac{\Gamma}{q} - \frac{V_0}{V_{\infty}} \sin \mu \right),$$

где q обозначает расход в возвратной струйке E , а Γ – циркуляция по контуру, охватывающему профиль и каверну. Отметим, что

$$\oint_{\zeta_{\infty}} \frac{dF}{d\zeta} d\zeta = \Gamma + iq$$

и, более того,

$$q = \pi N \frac{(1+a^2) \left((1+b^2-c^2)^2 + 4b^2c^2 \right)}{2 \left((1+d^2-f^2)^2 + 4d^2f^2 \right)}.$$

Форма каверны записана в виде

$$z(\eta) = x(\eta) + iy(\eta) = \frac{1}{V_0} \int_0^{\eta} \frac{dF}{d\eta} \exp\{i\theta(\eta)\} d\eta + z_B,$$

где

$$\frac{dF}{d\eta} = N \frac{\eta(\eta^2 + a^2) \left((\eta^2 + b^2 - c^2)^2 + 4b^2c^2 \right)}{(1-\eta^2) \left((\eta^2 + d^2 - f^2)^2 + 4d^2f^2 \right)}.$$

Длина каверны L_n определена как

$$L_n = x(\eta_M), \quad \text{где} \quad \theta(\eta_M) = \frac{\pi}{2}. \quad (18)$$

Проанализируем решение задачи при $\alpha \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow 0$, $\varepsilon/l \rightarrow 0$ и $l_w/l \rightarrow 0$, т. е. в предположении, что профиль вносит малые возмущения в однородный поток. Очевидно, что тогда $a \rightarrow +\infty$, $\zeta_0 \rightarrow i$ ($b \rightarrow 0$ и $c \rightarrow 1$) и $t \rightarrow 0$, при условии, что $\beta = O(1)$ и $\gamma = O(1)$. Подставляя $\zeta_0 = i + \delta_0$, где

$\delta_0 = b + i(c-1)$, в условие (10), найдем, что выражение

$$r = d^2 - f^2 + 1$$

имеет тот же порядок, что и $1/a$ и t . Оставляя только линейные члены в разложениях формул (4)–(14), получаем

$$\begin{aligned} l &\sim \frac{Na^2}{4V_0(f^2 + d_0^2)^2}; \quad \varepsilon \sim \frac{Na^2t^2}{V_0(f^2 + d_0^2)^4} R; \\ l_w &\sim \frac{N}{V_0a^2} Q; \quad \alpha \sim \frac{2\gamma}{\pi} \frac{f}{a} - \frac{2b}{f} - \frac{2\beta t}{\pi} \frac{f}{f^2 + d_0^2}; \\ \sigma &\sim \frac{4\gamma}{\pi} \frac{d_0}{a} + \frac{4b}{d_0} + \frac{4\beta t}{\pi} \frac{d_0}{f^2 + d_0^2}; \\ -r &\sim 4(c-1) + \frac{4\gamma}{\pi} \frac{d_0f^2}{a} - \frac{4b}{d_0} + \frac{4\beta t}{\pi} \frac{d_0f^2}{(f^2 + d_0^2)^2}; \\ -r &\sim 4(c-1) + 4d_0b + \frac{8\beta t}{\pi} \frac{d_0^3f^2}{(f^2 + d_0^2)^2}; \\ \frac{\alpha + \mu}{2} &\sim \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{a} + \arctan \frac{b}{c-1} - \frac{b}{2} - \frac{\beta}{\pi} t, \end{aligned}$$

где

$$d_0 = \sqrt{f^2 - 1}; \quad R = \int_0^1 \xi \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{\beta/\pi} d\xi; \quad (19)$$

$$Q = \int_0^1 \xi(1-\xi^2) \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{\gamma/\pi} d\xi.$$

Вводя естественное предположение, что $\mu = \pi + O(\alpha)$, найдем, что $(c-1) \ll b$, и поэтому члены, содержащие $(c-1)$ следует исключить из приведенных выше асимптотических разложений. Легко видеть из выражения (13), что $\eta_M \rightarrow 1$ и $\cos \theta(\eta) \rightarrow 1$. Тогда $L_n \sim x(1)$ и окончательно имеем

$$L_n \sim \frac{Na^2}{16V_0f^2d_0^2(f^2 + d_0^2)^2}. \quad (20)$$

После преобразований

$$t \sim \frac{f^2 + d_0^2}{2} \frac{1}{\sqrt{R}} \sqrt{\varepsilon} l; \quad \frac{l_w}{l} \sim 4(f^2 + d_0^2)^2 \frac{Q}{a^4}; \quad (21)$$

$$\sigma \sim 4fd_0\alpha + \frac{8\beta d_0}{\pi} \frac{1}{\sqrt{R}} \sqrt{\varepsilon} l; \quad \frac{L_n}{l} \sim \frac{1}{4f^2d_0^2}.$$

Так как последние два выражения не содержат параметр μ , то можно сделать вывод, что влияние направления возвратной струйки на характеристики потока имеет порядок по крайней мере α^2 .

Линейные асимптотические разложения производных комплексного потенциала (1) и (2) в новой системе координат $\tilde{z} = e^{i\alpha}z$ имеют вид

$$\frac{dF}{V_\infty d\tilde{z}} \sim 1 - \frac{2\gamma}{\pi} \frac{\zeta}{a} - 4b \frac{\zeta}{\zeta^2 + 1} - \frac{2\beta}{\pi} \frac{t}{\zeta}; \quad (22)$$

$$\frac{dF}{d\zeta} \sim \frac{-Na^2\zeta(\zeta^2 + 1)}{(\zeta^4 + 2\zeta^2 + (f^2 + d_0^2))^2}.$$

Конформное отображение первого квадранта ζ – плоскости на верхнюю полуплоскость u при соответствии точек $\zeta = \zeta_0$ и $u = i$

$$\zeta = i \sqrt{\frac{u + u_0}{u}},$$

где $u_0 = 2d_0f \sim \sqrt{L_n/l}$. Подстановка этого выражения в (22) дает

$$\begin{aligned} \frac{dF}{V_\infty d\tilde{z}} \sim 1 - i \frac{2\beta}{\pi} \frac{tu_0}{\sqrt{u(u+u_0)}} + \\ + i \sqrt{\frac{u+u_0}{u}} \left(\frac{4b}{u_0} u - \frac{2\gamma}{\pi} \frac{1}{a} + \frac{2\beta}{\pi} t \right). \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{d\tilde{z}}{du} \sim (L_n + l) \frac{2u}{(u^2 + 1)^2}. \quad (24)$$

В случае нулевого числа кавитации $\sigma = 0$ точки D и F сливаются с точкой E ($\zeta_0 \rightarrow i$, $\zeta_\infty \rightarrow i$) и соответствующая нелинейная задача (рис. 2) имеет следующее точное решение:

$$\frac{dF}{V_\infty dz} = e^{i(\alpha-\gamma)} \left(\frac{\zeta - a}{\zeta + a} \right)^{\gamma/\pi} \left(\frac{\zeta - t}{\zeta + t} \right)^{\beta/\pi};$$

$$\frac{dF}{d\zeta} = N \frac{\zeta(\zeta^2 - c^2)}{(\zeta^2 + 1)^3};$$

$$\begin{aligned} z(\zeta) = \frac{N}{V_\infty} e^{i(\gamma-\alpha)} \int_t^\zeta \frac{\zeta(\zeta+a)^{1+\gamma/\pi} (\zeta-a)^{1-\gamma/\pi}}{(\zeta^2+1)^3} \times \\ \times \left(\frac{\zeta+t}{\zeta-t} \right)^{\beta/\pi} d\zeta. \end{aligned}$$

Система четырех нелинейных уравнений

$$l = \int_t^a \mathcal{B}(\xi) (a - \xi)^{1-\gamma/\pi} \left(\frac{\xi+t}{\xi-t} \right)^{\beta/\pi} d\xi;$$

$$\varepsilon = \int_0^t \mathcal{B}(\xi) (a - \xi)^{1-\gamma/\pi} \left(\frac{t+\xi}{t-\xi} \right)^{\beta/\pi} d\xi;$$

$$l_w = \int_a^\infty \mathcal{B}(\xi) (\xi - a)^{1-\gamma/\pi} \left(\frac{\xi+t}{\xi-t} \right)^{\beta/\pi} d\xi;$$

$$\alpha - \gamma + \frac{2\gamma}{\pi} \arctan a + \frac{2\beta}{\pi} \arctan t = 0,$$

где

$$\mathcal{B}(\xi) = \frac{N}{V_\infty} \frac{\xi(\xi+a)^{1+\gamma/\pi}}{(\xi^2+1)^3}$$

определяет четыре неизвестных c , t , N/V_∞ и l_w .

Линейные члены разложений при $\alpha \rightarrow 0$ и $\varepsilon/l \rightarrow 0$

$$\alpha + \frac{2\beta}{\pi} t \sim \frac{2\gamma}{\pi} \frac{1}{a}; \quad l \sim \frac{N}{V_\infty} \frac{a^2}{4}; \quad t \sim \frac{1}{2\sqrt{R}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{l}};$$

$$\frac{l_w}{l} \sim \frac{\pi^4}{4\gamma^4} \left(\alpha + \frac{\beta}{\pi} \frac{1}{\sqrt{R}} \sqrt{\varepsilon l} \right)^4 Q;$$

$$\frac{dF}{V_\infty d\tilde{z}} \sim 1 - \alpha \zeta - \frac{2\beta}{\pi} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right);$$

$$\frac{dF}{d\zeta} \sim -4l V_\infty \frac{\zeta}{(\zeta^2 + 1)^2},$$

где R и Q находятся по формулам (19). Наконец, используя конформное отображение первого квадранта ζ – плоскости на верхнюю полуплоскость u

$$\zeta = i \sqrt{\frac{u + u_0}{u}},$$

где $u_0 = \sqrt{l}$, приходим к соотношениям

$$\frac{dF}{V_\infty d\tilde{z}} \sim 1 - i\alpha \sqrt{\frac{u+u_0}{u}} - i \frac{\beta}{\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{Rl}} \frac{u_0}{\sqrt{u(u+u_0)}}$$

$$\frac{d\tilde{z}}{du} \sim 2u. \quad (25)$$

2. СРАЩИВАЕМЫЕ АСИМПТОТИКИ

В предположении о том, что кавитирующий профиль вносит малые возмущения в поток, асимптотический анализ, проведенный в предыдущем разделе показал, что линейная теория теряет свою пригодность вблизи передней (с предкрылком) и задней (с интерцептором) кромок, поскольку в соответствующих локальных областях с масштабом порядка $O(l_w/l)$ и $O(\varepsilon/l)$ возмущения перестают быть малыми. Это проявляется и в возникновении особенностей степени $1/4$ и $1/2$ для функции скорости на передней и задней кромках (см. выражения (23) и (25)).

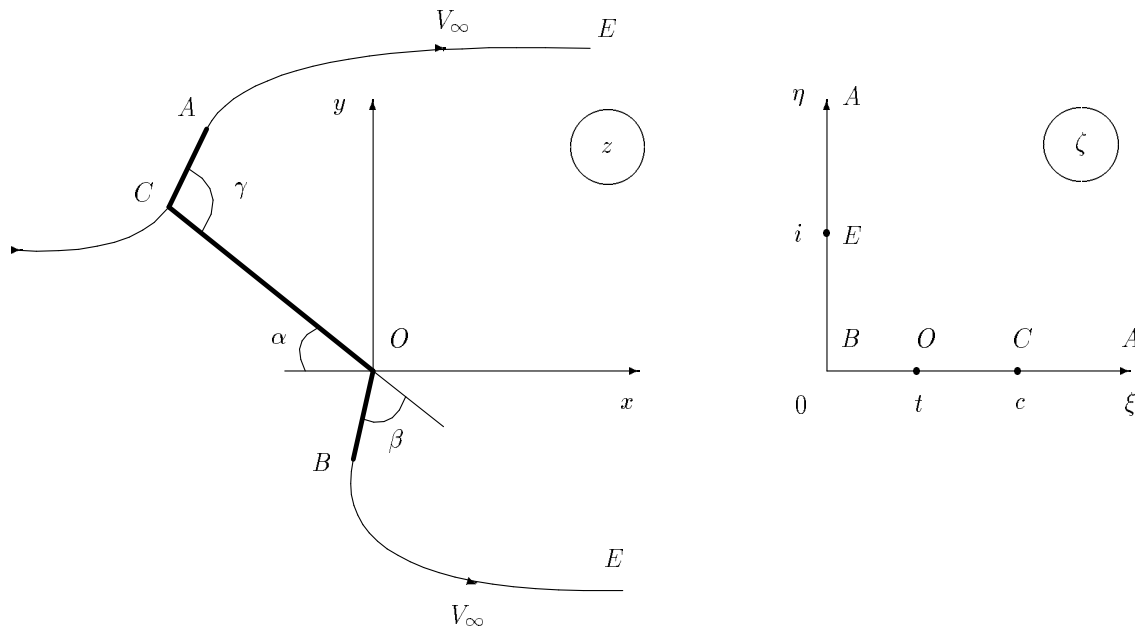


Рис. 2. Физическая и вспомогательная плоскости для нелинейной задачи обтекания кавитирующего профиля в безударном режиме при нулевом числе кавитации

Для получения корректного всюду пригодного решения применим метод сращиваемых асимптотических разложений, позволяющий сочетать простоту линейной теории и точность нелинейной. Это достигается за счет отдельного построения асимптотических решений во внешней области и вблизи кромок, и их сращивания. При этом во внешней зоне вдали от кромок, где $x, y = O(1)$, достаточно простого линейного разложения, а во внутренних следует искать точные нелинейные решения в растянутых локальных координатах. Подобный подход хорошо зарекомендовал себя при решении широкого круга задач, см., например, [7].

2.1. Внешнее решение

Во внешнем пределе, при $\alpha \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0, \bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon/l \rightarrow 0$ и $\bar{\varepsilon}_2 = l_w/l \rightarrow 0$, получим линейную кавитационную задачу, но в новом классе $\infty - \infty$, что связано с наличием интерцептора. Переместим для удобства начало координат в переднюю кромку и выпишем известное линейное решение [8] для кавитирующего профиля с интерцептором с нагнетающей стороной $y = f(x), x \in [0; 1]$ как решение смешанной краевой задачи для верхней вспомогательной полуплоскости ζ в классе $\infty - \infty$ (рис. 3):

$$\chi^\circ(\zeta) = \frac{dF}{V_0 dz} = 1 + \frac{iB}{\sqrt{\zeta(\zeta+a)}} +$$

$$+ i \sqrt{\frac{\zeta+a}{\zeta}} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^a \sqrt{\frac{t}{a-t}} \frac{\theta(t) dt}{\zeta-t} + A\zeta + C \right), \quad (26)$$

где $V_0 = V_\infty(1 + \sigma/2)$ – скорость на каверне, $z = L\zeta^2/(1 + \zeta^2)$, $\theta(x) = f'(x)$, а неизвестные коэффициенты A, B, C и параметр $a = 1/\sqrt{L-1}$, связанный с длиной каверны L , определяются из условия замкнутости каверны и условия на бесконечности

$$\text{Im} \oint_{\zeta=i} \chi^\circ(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = 0; \quad \chi^\circ(i) = 1 - \frac{\sigma}{2},$$

а также условия, доставляемого сращиванием с локальным решением для области вблизи интерцептора. Отметим, что для достаточно широкого класса мероморфных функций $f(z)$ вместо формулы (26) существенно более удобен так называемый метод построения бесквадратурного решения, предложенный А.Г. Терентьевым [9].

В простейшем случае кавитирующей пластины с интерцептором имеем:

$$\chi^\circ(\zeta) = 1 + \frac{iB}{\sqrt{\zeta(\zeta+a)}} - i\alpha + i \sqrt{\frac{\zeta+a}{\zeta}} (A\zeta + C),$$

где

$$A = \sqrt{\sin \frac{\tau}{2}} \left(\frac{\sigma}{2} \cos \frac{\tau-\pi}{4} + \alpha \sin \frac{\tau-\pi}{4} \right) +$$

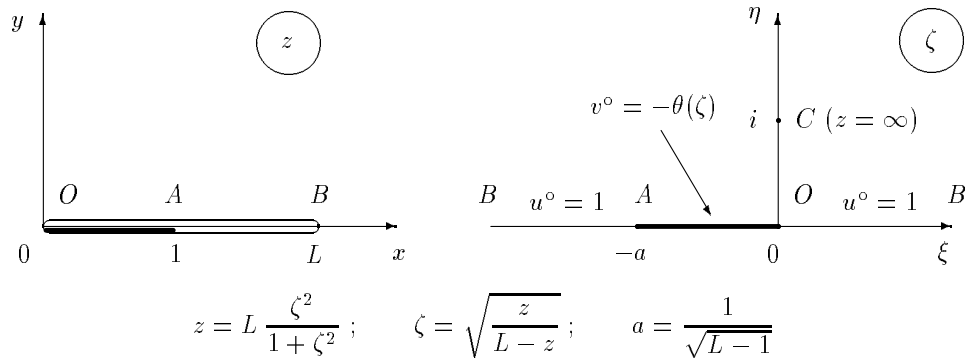


Рис. 3. Каноническая и вспомогательная плоскости для задачи о суперкавитирующей дуге с интерцептором

$$C = \sqrt{\sin \frac{\tau}{2}} \left(\frac{\sigma}{2} \sin \frac{\tau - \pi}{4} - \alpha \cos \frac{\tau - \pi}{4} \right) + B \sin^2 \frac{\tau}{2};$$

$$+ B \sin \frac{\tau}{2} \cos \frac{\tau}{2};$$

$$\sigma = 2\alpha \cot \frac{\tau}{2} - 4B \frac{\sin^{3/2} \tau/2}{\sin \frac{\tau + \pi}{4}}, \quad L = \cos^{-2} \left(\frac{\tau}{2} \right),$$

а величина коэффициента B определяется из сращения.

2.2. Внутренние решения

Задача вблизи интерцептора

Рассмотрим задачи, возникающие в областях, где внешнее решение “не работает”, теряет свою пригодность. При растяжении локальных координат вблизи задней кромки с интерцептором в масштабе $1/\bar{\varepsilon}_1$ ($\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon/l$) получим хорошо известную внутреннюю задачу обтекания прямого интерцептора (рис. 4), где область течения ограничена лучом $[OB]$, отрезком единичной длины $[OA]$ и свободной поверхностью AB . Скорость на ней неизвестна и обозначена через U_1 (эта величина определится из сращения). Точное решение по методу Чаплыгина:

$$\chi_1^i(s) = \frac{dF}{U_1 dZ_1} = \left(\frac{s-1}{s+1} \right)^{\beta/\pi}; \quad \frac{dF}{ds} = N_1 s;$$

$$Z_1(s) = \frac{N_1}{U_1} \int_1^s s \left(\frac{s+1}{s-1} \right)^{\beta/\pi} ds,$$

где $Z_1 = X_1 + iY_1 = (z-1)/\bar{\varepsilon}$, N_1 определена из условия $Z_A = Z_1(0) = e^{-i\beta}$, или

$$-\frac{N_1}{U_1} \int_0^1 \xi \left(\frac{1+\xi}{1-\xi} \right)^{\beta/\pi} d\xi = -\frac{N_1}{U_1} R = 1.$$

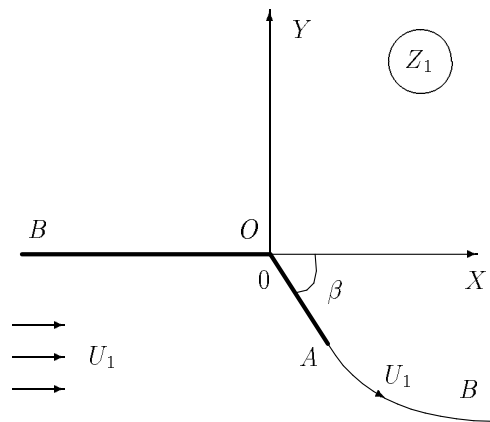


Рис. 4. Физическая и вспомогательная плоскости для внутренней нелинейной задачи обтекания интерцептора

Задача вблизи передней кромки

При растяжении локальных координат вблизи передней кромки в масштабе $\bar{\varepsilon}_2 = l_w/l$ (длина предкрылка заранее неизвестна, но может быть использована как масштаб растяжения), получим нелинейную задачу со свободной поверхностью, показанную на рис. 5, где $Z_2 = z/\bar{\varepsilon}_2 = X_2 + iY_2$. Точное решение задачи найдено в форме

$$\chi_2^i(\zeta) = \frac{dF}{U_2 dZ_2} = \left(\frac{\zeta-i}{\zeta+i} \right)^{\gamma/\pi};$$

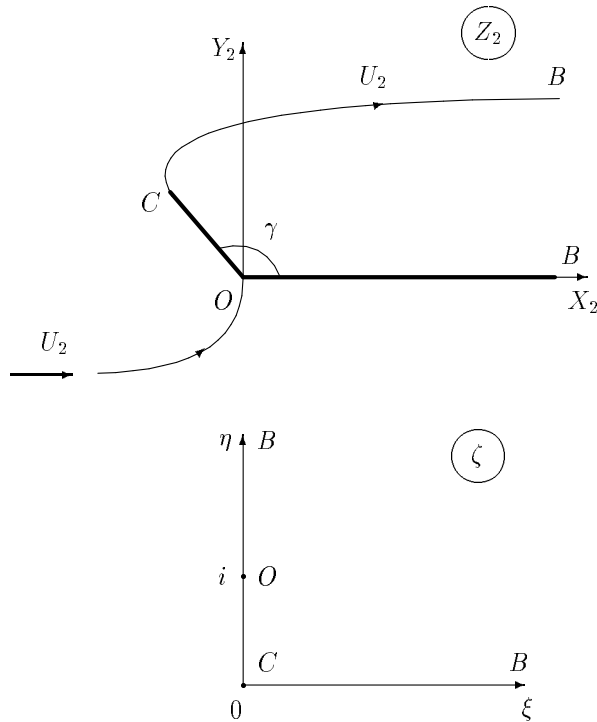


Рис. 5. Физическая и вспомогательная плоскости для задачи обтекания "срезанной" кавитирующей передней кромки

$$\frac{dF}{d\zeta} = N_2 \zeta (\zeta^2 + 1);$$

$$Z_2(\zeta) = \frac{N_2}{U_2} \int_i^\zeta \zeta (\zeta^2 + 1) \left(\frac{\zeta + i}{\zeta - i} \right)^{\beta_1/\pi} d\zeta,$$

где U_2 – неизвестная скорость на локальной бесконечности, а длина отрезка $|OC| = 1$ связана с неизвестным параметром задачи N_2 соотношением

$$|CO| = 1 = \frac{N_2}{U_2} \int_0^1 t(1-t^2) \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^{\gamma/\pi} dt.$$

Сращивание асимптотических решений

Применяя правило сращивания Прандтля для внешнего и внутреннего пределов, срастим сначала задачу для интерцептора с внешним разложением (в результате определим параметр B и скорость U_2), а затем – внешнее разложение с решением вблизи передней кромки (это даст значения l_w и U_1). Таким образом, можно отметить, что в первом приближении информация при сращивании "течет" от задней кромки к передней. Срав-

нивая асимптотики выражения для комплексно-сопряженной скорости $\chi^o(z)$ при $z \rightarrow 1$ и $\chi_1^i(Z_1)$ при $X_1 \rightarrow -\infty$, найдем, что

$$U_1 = V_0; \quad B = -\frac{\beta}{\pi} \cot \frac{\tau}{2} \sin^{-1} \frac{\tau}{2} \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}}{R}}.$$

Из сращивания $\chi^o(z)$ при $z \rightarrow 0$ и $\chi_2^i(Z_2)$ при $X_2 \rightarrow +\infty$ получим $U_2 = V_0$ и

$$\begin{aligned} \frac{l_w}{l} &= \frac{\pi^4}{4\gamma^4} Q \left(\sqrt{a}C + \frac{B}{\sqrt{a}} \right)^4 = \\ &= \frac{\pi^4 Q}{4\gamma^4} \left(\frac{\sigma}{2} \sin \frac{\tau - \pi}{4} - \alpha \cos \frac{\tau - \pi}{4} - \frac{\beta}{\pi} \sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}}{R}} \sin \frac{\tau}{2} \right)^4, \end{aligned}$$

где величина Q определена формулой (19). Важно подчеркнуть, что полученные при сращивании результаты для плоской пластины совпадают с проведенным в предыдущем разделе асимптотическим анализом нелинейной задачи, см. выражения (21) и (23).

Составное всюду равномерно пригодное асимптотическое решение получено по аддитивному правилу:

$$\chi^c(z) = \chi^o + \chi_1^i + \chi_2^i - \chi_1^{oi} - \chi_2^{oi},$$

где верхний индекс oi обозначает внутреннее разложение внешнего предела.

Преимущества асимптотического подхода перед классическим линейным очевидна. Эффективность сращиваемых асимптотик особенно наглядна для задачи обтекания профиля (клина) с изогнутой нагнетающей стороной (нижней щекой), когда получение нелинейного решения связано с известными численными трудностями.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Разработанный аналитический метод решения нелинейной плоской задачи обтекания пластины с интерцептором и клиновидной формой входящей кромки можно использовать для проектирования суперкавитирующих сечений крыльев и гребных винтов. Главная особенность метода – учет клиновидной формы и безударного режима обтекания входящей кромки – позволяет уточнить важнейшее условие обеспечения прочности проектируемого профиля в ее окрестности. Линейное решение аналогичной задачи, обсужденное в работе авторов [4], в принципе не позволяет оценить толщину каверны в районе входящей кромки. В других точках хорды, как показали приведенные

ниже сравнительные расчеты, линейное решение удовлетворительно оценивает толщину каверны, (см. табл. 1).

В случае 2%-го интерцептора (см. табл. 2) заметное различие в значениях толщины каверны связано с имеющимся качественным отличием формы течения в линейном и асимптотическом и нелинейном решениях. Действительно, рассматриваемое асимптотическое и нелинейное решения в этих случаях предполагают смоченный клиновидный участок значительной длины на засасывающей стороне профиля, тогда как линейное решение не предполагает такого участка.

Поясним подробнее сравнительные данные решения задачи в нелинейной, асимптотической и линейной постановках, содержащиеся в табл. 1 и 2. Подчеркнем, что численные результаты, полученные в рамках нелинейного и асимптотического подходов, отличаются для всех профилей на десятые доли процента, поэтому в таблицах они объединены.

Все переменные в задаче обезразмерены по хорде нагнетающей стороны кавитирующего клина l и величине скорости набегающего потока на бесконечности V_∞ . Отметим, что в расчетах рассмотрен случай интерцептора, наклоненного под прямым углом к нижней щеке клина.

В нелинейной проектной задаче следующие параметры считаются заданными: число кавитации σ , угол атаки α (угол наклона нижней щеки клина), относительная длина выдвиг интерцептора ε , раствор клина γ (этот параметр не учитывался в рамках линейной теории), суммарный коэффициент сопротивления трения и других некавитационных составляющих сопротивления C_{Df} .

Требуется найти:

- относительную длину верхней щеки кавитирующего клина (профиля) l_w ;
- коэффициент подъемной силы C_L ;
- полный коэффициент сопротивления, складывающийся из кавитационного и некавитационного $C_{D\Sigma} = C_D + C_{Df}$;
- гидродинамическое качество $C_L/C_{D\Sigma}$;
- максимальную относительную толщину стандартного тела δ , которое можно вписать в пределах хорды профиля в пространство между нагнетающей стороной (нижней щекой клина) и линией тока, состоящей из смоченной

верхней щеки клина и сходящей с нее поверхностью каверны, определяемой из точного решения нелинейной задачи; заметим, что стандартное тело, принятое в статье, имеет плоскую нагнетающую сторону, совпадающую с нижней щекой клина, и параболическую засасывающую:

$$y(x) = \delta x(2 - x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1. \quad (27)$$

Таким образом, значение δ определяется толщиной каверны на задней кромке кавитирующего клина (профиля);

- максимальную относительную условную толщину δ_{LE} стандартного тела, имеющего угол γ между параболической верхней и плоской нижней стороной при $x = 0$. Легко видеть, что для описанного выше стандартного тела $\delta_{LE} = \gamma/2$. Тогда его засасывающая поверхность

$$y(x) = \delta_{LE} x(2 - x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq 1.$$

Смысл двух последних величин (δ_{LE} и δ) заслуживает пояснений. В работах [4–6] показано, что особое внимание следует уделять условию обеспечения прочности. Это условие подразумевает достаточную толщину каверны для вписывания выбранного стандартного тела между нагнетающей поверхностью профиля и верхней поверхностью каверны. Ясно, что засасывающая сторона вписанного тела может не совпадать с границей каверны, т. е. должно выполняться обобщенное условие однолиственности течения:

$$0 \leq T_{SB}(x) \leq T_{cav}(x) \quad \text{при } l_w < x < 1, \quad (28)$$

где $T_{cav}(x)$ – распределение толщины каверны, $T_{SB}(x) = \delta \overline{T}_{SB}(x)$, а $\overline{T}_{SB}(x)$ обозначает распределение относительной толщины стандартного тела по хорде. Из выражения (27) следует, что

$$\overline{T}_{SB}(x) = x(2 - x)$$

и

$$\frac{d\overline{T}_{SB}}{dx} = 2 \quad \text{при } x = 0,$$

откуда угол раствора передней кромки стандартного тела с максимальной относительной толщиной δ_{LE} равен $\gamma_{SB} = 2\delta_{LE}$. Поэтому для заданного угла γ получаем, что максимальная толщина стандартного тела

$$\delta_{LE} = \frac{\gamma}{2}.$$

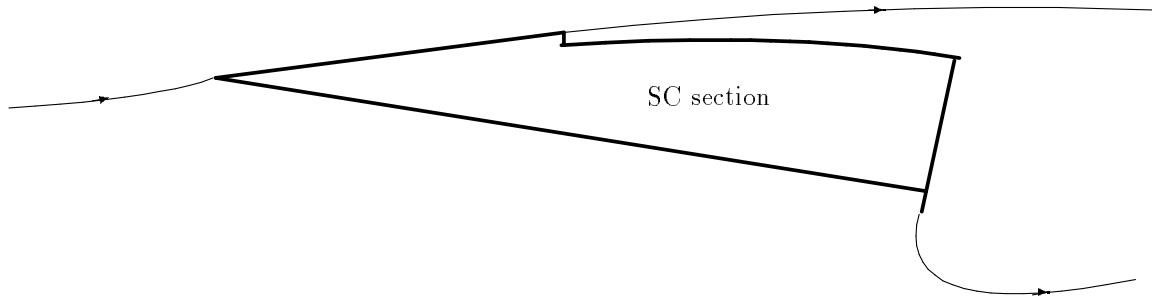


Рис. 6. Новый тип кавитирующего профиля в безударном режиме

Из сказанного выше ясно, что меньшая из величин δ и δ_{LE} обеспечивает выполнение обобщенного условия однолистности течения в проектировочной нелинейной задаче для кавитирующего профиля в безударном режиме не только вблизи передней кромки, но и по всей хорде профиля. Эти два параметра весьма удобны, поскольку позволяют выяснить самостоятельную роль ограничений по толщине в носике и по всей хорде. Если $\delta_{LE} > \delta$, то следует толщину носика вблизи входящей кромки на отрезке хорды $0 \leq x \leq l_w$ увеличить по сравнению с толщиной, определяемой законом распределения $T_{SB}(x)$, принятым для стандартного тела в выражении (28). Например, из табл. 1 видно, что относительную толщину профиля около передней кромки (на 1.43% длины хорды) нужно увеличить с 0.0958 до 0.1745, т. е. почти вдвое, а распределение толщины модифицировать, чтобы угол раствора передней кромки совпал с заданным углом раствора клина $\gamma = 20^\circ$.

Следует подчеркнуть, что решение проектировочной задачи в рамках линейной теории получено с использованием открытой модели замыкания каверны [4], а именно, модели Ву-Фабулы и не позволяло задавать угол γ . В табл. 1 и 2 "линейная" толщина стандартного тела δ , полученная в процессе решения линейной задачи, контролировалась в 100 точках по хорде профиля.

Анализ данных в таблице 1 (точное нелинейное решение) показывает, в частности, что при отсутствии интерцептора длина верхней смоченной щеки клина очень мала и составляет менее 1% при угле атаки $\alpha < 4^\circ$ и $\gamma = 20^\circ$. В то же время отношение δ_{LE}/δ достаточно велико, а именно: 7.12, 3.82, 2.52, 1.82, 1.36 для $\alpha = 1, 2, 3, 4$ и 5 градусов соответственно. Согласование нелинейного и линейного решения для значений δ , C_L и гидродинамического качества сохраняется в

пределах 20%. Для заданного коэффициента некавитационного сопротивления $C_{Df} = 0.008$ максимальное гидродинамическое качество составляет 6.89 (17.5 для идеального качества) и соответствует "оптимальному" углу атаки $\alpha \approx 3^\circ$. Отметим, что с уменьшением величины коэффициента трения оптимальное значение угла атаки в рассматриваемом случае также уменьшается и указанный экстремум отсутствует. В таком случае проектный угол атаки берется наименьшим возможным, удовлетворяющим условию обеспечения прочности профиля (однолистности течения).

Анализ данных в табл. 2 показывает, что даже интерцептор с относительной длиной 0.02 существенно влияет на картину течения. Относительная длина верхней смоченной щеки клина достигает 14, 17, 22, 39 и 66% при $\alpha = 4.2, 4.5, 5.0, 6.0$ и 7.0 градусов соответственно. По сути, нелинейное решение привело к проектированию нового типа суперкавитирующих сечений с интерцептором и клиновидной входящей частью, смоченной с обеих сторон, при этом критическая точка расположена в вершине клина, что обеспечивает "безударный" режим обтекания, (рис. 6).

Подчеркнем, что сравнение с линейным решением, приведенное в табл. 2, не вполне корректно, поскольку в линейной постановке задачи предполагалось, что верхняя поверхность профиля полностью покрыта каверной. Видно, что согласование существенно ухудшается по сравнению с уровнем, соответствующим табл. 1. Еще одним отличием является отсутствие, в принципе, экстремума у кривой зависимости качества от угла атаки, так как коэффициент подъемной силы для профилей нового типа уменьшается с ростом угла атаки (в отличие от профилей без интерцептора из табл. 1). При этом толщина каверны оказывается избыточной (принятый закон распределения

Табл. 1. Численные результаты, полученные в рамках нелинейного и асимптотического (NLT-MAE) и линейного (LT) подходов для кавитирующего профиля без интерцептора. Число кавитации $\sigma = 0.05$, раствор клина $\gamma = 20^\circ$, $\delta_{LE} = \gamma/2 = 0.1745$, $C_{Df} = 0.008$

профиль #	подход	α (град)	l_w	δ	C_L	$C_L/C_{D\Sigma}$
1.1	NLT-MAE	1°	0.00236	0.0245	0.0603	6.65
	LT		—	0.0298	0.0785	8.38
	NLT-LT /NLT (%)		—	17.8%	23.2%	20.6%
1.2	NLT-MAE	2°	0.00128	0.0457	0.0728	6.83
	LT		—	0.0459	0.0830	7.61
	NLT-LT /NLT (%)		—	0.4%	12.3%	10.2%
1.3	NLT-MAE	3°	0.00490	0.0692	0.0910	6.89
	LT		—	0.0661	0.1010	7.60
	NLT-LT /NLT (%)		—	4.5%	9.9%	9.3%
1.4	NLT-MAE	4°	0.0143	0.0958	0.1089	6.45
	LT		—	0.0868	0.1237	7.44
	NLT-LT /NLT (%)		—	9.4%	13.6%	13.3%
1.5	NLT-MAE	5°	0.0350	0.1282	0.1234	5.65
	LT		—	0.1078	0.1483	7.08
	NLT-LT /NLT (%)		—	15.9%	16.8%	20.2%

Табл. 2. Численные результаты, полученные в рамках нелинейного и асимптотического (NLT-MAE) и линейного (LT) подходов для кавитирующего профиля с интерцептором относительной длины 0.02. Число кавитации $\sigma = 0.05$, раствор клина $\gamma = 20^\circ$, $\delta_{LE} = \gamma/2 = 0.1745$, $C_{Df} = 0.008$

профиль #	подход	α (град)	l_w	δ	C_L	$C_L/C_{D\Sigma}$
2.1	NLT-MAE	4.2°	0.141	0.202	0.350	5.14
	LT		—	0.138	0.453	7.70
	NLT-LT /NLT (%)		—	31.7%	22.7%	33.2%
2.2	NLT-MAE	4.5°	0.169	0.220	0.347	5.02
	LT		—	0.144	0.461	7.46
	NLT-LT /NLT (%)		—	34.5%	24.7%	32.7%
2.3	NLT-MAE	5°	0.225	0.253	0.339	4.44
	LT		—	0.155	0.475	7.08
	NLT-LT /NLT (%)		—	38.5%	28.6%	37.3%
2.4	NLT-MAE	6°	0.389	0.335	0.311	3.33
	LT		—	0.176	0.501	6.42
	NLT-LT /NLT (%)		—	47.5%	37.9%	48.1%
2.5	NLT-MAE	7°	0.658	0.526	0.259	2.26
	LT		—	0.198	0.529	5.86
	NLT-LT /NLT (%)		—	62.4%	51.0%	61.4%

толщины стандартного тела совершенно не соответствует толщине клина) и величина δ_{LE} становится основным параметром задачи: именно его следует использовать в качестве максимальной относительной толщины профиля, поскольку всегда $\delta_{LE} < \delta$, в отличие от данных из табл. 1. Итак, для всех профилей в табл. 2 принято $\delta_{LE} = \gamma/2$.

Таким образом, приведенные численные результаты показали, что предложенный нелинейный

подход позволяет проектировать суперкавитирующие сечения как традиционной формы (без интерцептора и с увеличенной и контролируемой толщиной входящей кромки на малом участке хорды), так и сечения нового типа с развитой клиновидной формой смоченной передней части профиля при относительной длине интерцептора около 2% и более.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье найдено точное решение нелинейной проектировочной задачи для кавитирующего профиля с интерцептором в безударном режиме обтекания, когда критическая точка совпадает с вершиной полностью смоченной клиновидной передней части. Построено также равномерно пригодное решение рассматриваемой задачи. Основываясь на аналитических и численных результатах, спроектирован суперкавитирующий профиль нового типа, для которого выполнено условие по прочности (обобщенное условие однолиственности). Подобные секции могут быть полезны при проектировании частично погруженных гребных винтов и водометов.

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. – М: Наука, 1979. – 536 с.
2. Мещерский И. В. К вопросу о сопротивлении жидкостей // Журнал русского физико-химического общества. – 1886. – XVIII. – С. 12.
3. Yim B. H. Application of Matched Asymptotic Expansion for Designing a Leading Edge of Supercavitating Section // Journal of Ships and Ocean Engineering. – 1995. – 21. – P. 1 – 6.
4. Achkinadze A.S., Fridman G.M. On Some Aspects of Design of Supercavitating Foils and Propellers. Variation and Asymptotic Approach // Proceedings of PROPCAV'95. – Newcastle, UK. – 1995. – P. 163 – 174.
5. Achkinadze A. S. Optimum Shape of Supercavitating Hydrofoil of Given Thickness Distribution at Arbitrary Cavitation Number // Trans. of Leningrad Shipbuilding Institute. – 1973. – 80. – P. 13 – 18.
6. Achkinadze A.S., Narvsky, A.S. Supercavitating Propellers Design Education in Lifting Surface Theory and Method of Its Solution // Proceedings of 14th Conference of SMSSH, BSHC, Varna, Bulgaria. – 1985. – 1. – P. 2-19 – 2-21.
7. Fridman G.M. Matched asymptotics for two-dimensional planing hydrofoils with spoilers // Journal of Fluid Mechanics. – 1998. – 358. – P. 259 – 281.
8. Rozhdestvensky K.V., Fridman G.M. Matched Asymptotics for Free Surface Lifting Flows with Spoilers // “Mathematical Approaches in Hydrodynamics”. – SIAM, Edited by T. Miloh, Philadelphia. – 1991. – P. 499 – 517.
9. Терентьев А.Г. К решению линейной задачи кавитационного обтекания дуги // Известия АН СССР, МЖГ. – 1972. – 1. – С. 125 – 135.