

УДК 532.526

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСЕЙ ТУРБУЛЕНТНЫМ ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Е. А. ШКВАР

*Киевский международный университет гражданской авиации*

*Получено 25.03.2000*

Предложена полуэмпирическая модель турбулентного пограничного слоя жидкости с неоднородным распределением по его толщине малых концентраций вводимых жидких либо мелкодисперсных примесей. Выполнены модификации алгебраической модели турбулентности, позволяющие учесть совместное воздействие на турбулентную вязкость комплекса переносимых потоком фаз с нормальным относительно обтекаемой поверхности градиентом концентрации каждой из них. Разработан безытерационный маршевый метод расчета многофазного пограничного слоя с учетом возможного воздействия переносимых фаз на параметры основного потока. Показана возможность и эффективность применения к реализации данного метода алгоритмов распараллеливания вычислений, выполнена оценка времени расчета на многопроцессорном компьютере. Приведены примеры тестовых расчетов турбулентных течений.

Запроповано напівемпіричну модель турбулентного примежового шару з неоднорідним розподілом по його товщині малих концентрацій рідких або дрібнодисперсних домішків, що вводяться. Виконано модифікації алгебраїчної моделі турбулентності, які дозволяють врахувати сумісний вплив на турбулентну в'язкість комплексу фаз, що переносяться потоком, з нормальним відносно обтічної поверхні градієнтом концентрації кожної з них. Розроблено безітераційний маршевий метод розрахунку багатofазного примежового шару з урахуванням можливого впливу фаз, що переносяться, на параметри основного потоку. Показано можливість і ефективність застосування до реалізації даного методу алгоритмів розпаралелювання обчислень, виконано оцінку часу розрахунку на багатопроцесорному комп'ютері. Наведені приклади тестових розрахунків турбулентних течій.

Semiempirical model of turbulent boundary layer with nonuniform distribution of little concentrations of an injected liquid or fine-disperse phase additives on the thickness has been elaborated. The modifications of algebraic model of turbulent viscosity are carried out. They have allowed to take into account the joint action of a complex of phases, which move under the influence of basic flow and modify flow characteristics. The general phenomena of these phases is normal to streamlined surface gradient of their concentration. The without-iterational marching method of multiphase boundary layer has been carried out. The phenomena of elaborated method is an account of the moving phases influence on the basic flow parameters. The possibility and effectiveness of application in the frames of given method of a parallel processing algorithms is shown. The time of computations with the account of multiprocessor's computer architecture has been estimated. The examples of predictions of flow characteristics are presented.

### ВВЕДЕНИЕ

Высокий уровень загрязненности атмосферы и водного пространства Земли, наличие значительного количества потенциально опасных источников выбросов вредных веществ, локализованных, как правило, вблизи крупных населенных пунктов (атомные электростанции, химические производства, постепенно разрушающиеся подводные склады химического оружия, находящиеся на дне крупных водоемов еще со времен Второй мировой войны), являются реалиями нашего времени. Эти экологические проблемы обуславливают интерес к задачам моделирования динамики распространения малых концентраций примесей веществ, введенных локально в газообразную или жидкую среды за счет присущих этим средам вынужденноконвективного и диффузионного видов переноса [1].

Многокомпонентные и многофазные течения являются неотъемлемым атрибутом широкого круга рабочих процессов, происходящих в двигателях различных конструкций и предназначения, а также в ином промышленном оборудова-

нии [2 - 5]. Например, в авиационных турбореактивных двигателях, эксплуатирующихся в жарких климатических условиях, проблема повышения тяги на взлете решается посредством впрыска воды в воздухозаборник, в результате чего создается воздушно-капельная смесь. Более сложные процессы происходят в камерах сгорания, где в струе сжатого воздуха разбрызгивается топливная смесь, которая, сгорая, химически и энергетически реагирует с основным потоком, после чего поток представляет собой сложную смесь газообразных и мелкодисперсных продуктов сгорания.

В то же время, введение в поток жидкости незначительных концентраций высокомолекулярных полимеров либо поверхностно-активных веществ находит применение как эффективный метод воздействия на структуру течения и процессы формирования турбулентности в пограничном слое [6 - 8, 15, 16].

Иной способ воздействия на пристенное течение, сходный с предыдущим по принципу возможной конструктивной реализации, но не по механизму воздействия, заключается во введении в поток

жидкости взвеси микропузырьков газа [9].

Развитие этих подходов к управлению формированием пристенного течения состоит в комбинации названных выше методов, то есть в совместной подаче в пограничный слой как полимеров, так и микропузырьковой взвеси [10 - 12]. Данная идея базируется на известном гидробионическом факте, заключающемся в том, что в жабрах быстроплавающих рыб протекает интенсивный кислородный обмен с проходящей через них водой. Этот процесс сопровождается повышением температуры прошедшей через жабры воды и ее насыщением слабым раствором слизи, механизм влияния которой на поток во многом подобен принципу воздействия полимерных добавок. Поскольку отработанная вода выбрасывается из жаберных полостей тангенциально к направлению обтекающей рыбу потока, то есть в область наибольших сдвиговых напряжений, можно предположить, что одним из основных результатов происходящих в жабрах процессов модификации свойств воды является формирование нормального по отношению к обтекаемой поверхности градиента вязких свойств пристенного течения, предназначение которого состоит в снижении сопротивления турбулентного трения при плавании с большими скоростями.

Представляет интерес изучение возможностей переноса описанного механизма управления формированием турбулентного обтекания, реализуемого в живой природе, на технические объекты, что позволит целенаправленно и эффективно улучшать их гидродинамические характеристики.

Таким образом, потребности оптимизации оборудования, обеспечивающего инъекцию подобных веществ (взвесей газа) в пристенные течения, а также необходимость снижения расхода инжектируемых добавок приводят к условию применения локального введения их вблизи обтекаемой поверхности в некотором сечении пограничного слоя, а возможно, и в нескольких сечениях вдоль направления его развития с целью поддержания концентрации активных добавок вблизи стенки на оптимальном уровне. В этой связи являются актуальными задачи моделирования распространения введенной концентрации веществ с учетом конвективных и диффузионных свойств несущего потока и переносимых им веществ, а также с учетом наличия обусловленного локальным введением активных примесей нормального по отношению к обтекаемой поверхности градиента вязкости.

При локальной инъекции системы фаз представляет несомненный интерес задача поиска оптимального взаимного расположения инжекторов по высоте сечения, в котором осуществляется одно-

временное введение этих веществ, а также оптимизация соотношения геометрических размеров инжекторов, расходов различных фаз из них, а также процессы взаимного проникновения фаз и комбинированного их воздействия на параметры развития основного течения.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Цель данной статьи – изложение результатов, полученных при построении математической модели стационарного плоского турбулентного пограничного слоя, который переносит одну либо несколько фаз жидкой, мелкодисперсной газообразной или твердой примесей, введенных в малых концентрациях локально на некоторых высотах (в общем случае разных для различных инжектируемых фаз) от обтекаемой поверхности в одном из поперечных сечений вдоль преобладающего направления развития течения.

Особенностью постановки задачи данного исследования является учет неоднородности распределения концентрации вводимых веществ по толщине сдвигового течения как в том сечении, где осуществляется его введение, так и по мере развития пограничного слоя.

Отмеченная особенность предполагает:

1. Учет высоты размещения инжектирующего устройства над обтекаемой поверхностью и ширины инжектора;
2. Учет возможности наличия нескольких инжекторов различной ширины, размещенных на разных высотах по отношению к обтекаемой поверхности;
3. Учет возможности ввода различных концентраций примеси либо различных примесей различной структуры и химического состава из различных инжектирующих устройств;
4. Моделирование диффузии введенных в поток примесей по толщине развивающегося пограничного слоя при ее переносе осредненным течением.
5. Моделирование влияния на свойства изучаемого типа течений нормального градиента вязких и турбулентных свойств потока, обусловленного влиянием инжектируемых веществ.

Таким образом, задачу расчета можно формализовать следующим образом. При известном распределении скорости (либо давления) во внешнем по отношению к пограничному слою течения, при известных физических свойствах несущего потока и инжектируемых веществ и по известным начальным профилям скорости и заданным распределениям концентрациям примесей требуется рассчитать поля скорости и концентраций переноси-

мых веществ в представляющей интерес области развития течения.

При разработке математической модели считаются справедливыми следующие упрощающие допущения.

1. Течение имеет четко выраженное преобладающее направление развития, что обосновывает применение по отношению к рассматриваемой задаче теории пограничного слоя и уравнений, которые получены на основе этой теории.

2. Продольной диффузией характеристик как основного потока, так и переносимых примесей в соответствии с приближением пограничного слоя пренебрегается.

3. Обтекаемая поверхность предполагается плоской либо ее кривизна не оказывает существенного влияния на параметры моделируемого течения.

4. Концентрация вводимых веществ в газе (или растворе), выдуваемом из инжектора, предполагается достаточно малой, что позволяет пренебречь влиянием примесей на плотность среды основного потока. В случае моделирования течения жидкости это допущение также дает возможность рассматривать движущуюся жидкость как ньютоновскую.

5. Вводимая в пограничный слой примесь не нарушает монотонного распределения продольной составляющей осредненной скорости в сечении, где осуществляется ввод, и не приводит к изменению статического давления  $p$  по нормали к обтекаемой поверхности  $y$ , то есть не приводит к нарушению одной из основных предпосылок концепции пограничного слоя  $p(y) = \text{const}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ . В то же время, данное приближение позволяет пренебречь возможным обменом импульсом и энергией фаз вводимых примесей с несущим потоком, а также между фазами.

6. Допускается возможность воздействия переносимых примесей на характеристики основного течения через их влияние на вязкие и турбулентные свойства последнего. Взаимодействие между фазами ограничивается исключительно их смешением по мере развития пограничного слоя и комплексным воздействием на свойства несущего потока, а через него - на процесс переноса каждой из фаз. Данное допущение, сильно ограничивающее возможности межфазного взаимодействия, делает, тем не менее, неприменимым по отношению к моделируемым видам примесей концепции скалярной субстанции.

7. Несущий поток и переносимые им примеси предполагаются несжимаемыми средами.

Сформулированные допущения позволяют максимально упростить задачу расчета с целью изучения возможностей математического моделирования множественного физического воздействия фаз вводимых веществ на свойства несущего потока.

## 2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

В связи со сформулированными выше предположениями о справедливости концепции пограничного слоя применительно к изучаемому классу течения, запишем систему безразмерных уравнений пограничного слоя в следующем виде:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{u_H} \frac{du_H}{d\bar{x}} = 0, \quad (1)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = (1 - \bar{u}^2) \frac{1}{u_H} \frac{du_H}{d\bar{x}} + \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \bar{y}}, \quad (2)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{c}_n}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}_n}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( \bar{D}_n^\Sigma \frac{\partial \bar{c}_n}{\partial \bar{y}} \right). \quad (3)$$

Уравнение (1) является уравнением неразрывности; уравнение (2) - уравнение движения для продольной компоненты скорости  $u$ ; уравнение (3) описывает перенос концентрации каждой из введенных в поток примесей  $c_n$ . За каждой из  $N$  переносимых примесей закрепляется свой номер  $n = 1, \dots, N$ . Таким образом, в результате получается система, состоящая из  $N$  уравнений переноса концентраций многокомпонентной примеси в форме (3) и еще двух уравнений (1), (2), моделирующих динамику несущего потока.

Здесь  $x$ ,  $y$  - продольная и нормальная оси связанной с обтекаемой поверхностью декартовой системы координат, ось  $x$  расположена на обтекаемой поверхности в направлении преобладающего развития течения, ось  $y$  лежит по нормали к обтекаемой поверхности;  $\bar{x} = x/L$ ,  $\bar{y} = y/L$  - координатные оси, безразмерные по длине расчетной области  $L$ ;  $u$ ,  $v$  - компоненты скорости вдоль координатных осей  $x$  и  $y$ ;  $\bar{u} = u/u_H$ ,  $\bar{v} = v/u_H$  - компоненты скорости, безразмерные по скорости внешнего течения  $u_H$ ;  $\rho$  - плотность жидкости несущего потока. Безразмеривание координат  $x$  и  $y$  производится по характерному размеру расчетной области  $L$ , за который обычно принимается длина последней. Скорость внешнего течения предполагается известной функцией продольной координаты  $\bar{x}$ . Безразмерное напряжение трения  $\bar{\tau} = \tau/(\rho u_H^2)$  в соответствии с предположением о течении ньютоновской среды моделируется формулой Бусинеска

$$\bar{\tau} = \bar{\nu}^{\Sigma} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}, \quad (4)$$

где  $\bar{\nu}^{\Sigma} = \nu^{\Sigma}/(u_H L)$  - безразмерный кинематический коэффициент эффективной вязкости;  $\nu^{\Sigma} = \nu + \nu_t$ ,  $\nu$ ,  $\nu_t$  - кинематические коэффициенты молекулярной и турбулентной вязкости соответственно. Концентрации примеси  $c_n$  в уравнении (3) безразмериваются по их характерным значениям  $c_{on}$  в начальном сечении  $x = x_o$ , то есть  $\bar{c}_n = c_n/c_{on}$ . Эффективный коэффициент диффузии  $D_n^{\Sigma}$  в уравнении (3) моделируется выражением

$$\bar{D}_n^{\Sigma} = \frac{\nu/Sc_n + \nu_t/Sc_{tn}}{u_H L},$$

где  $Sc$  и  $Sc_t$  - молекулярное и турбулентное числа Шмидта, которые находятся как отношения кинематических коэффициентов молекулярной и турбулентной вязкости ( $\nu$  и  $\nu_t$ ) к соответствующим коэффициентам диффузии ( $D$  и  $D_t$ ), то есть  $Sc_n = \nu/D_n$ ,  $Sc_{tn} = \nu_t/D_{tn}$ . Значение  $Sc$  определяется исключительно физико-химическими свойствами примеси и растворителя (воды), тогда как значение  $Sc_t$ , являясь критерием подобия, устанавливает меру аналогии протекания турбулентной диффузии растворителя по отношению к турбулентной диффузии транспортируемой им субстанции (полимерной добавки). В первом приближении, в данном исследовании турбулентные числа Шмидта  $Sc_t$  для каждой из переносимых фаз моделировались постоянными значениями.

### 3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Система (1)-(4) решается при следующих граничных условиях. На обтекаемой поверхности ( $y = 0$ ):

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 0, \quad \frac{\partial \bar{c}_n}{\partial \bar{y}} = 0. \quad (5)$$

На внешней границе пограничного слоя ( $y \rightarrow \infty$ ):

$$\bar{u} \rightarrow \bar{u}_H, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \bar{c}_n}{\partial \bar{y}} \rightarrow 0. \quad (6)$$

В начальном расчетном сечении ( $x = x_o$ ):

$$\bar{u} = \bar{u}(\bar{y}), \quad \bar{c}_n = \bar{c}_n(\bar{y}), \quad n = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Функция  $\bar{u} = \bar{u}(\bar{y})$  задает начальный профиль скорости, ее источником могут служить, например, экспериментальные данные или приближенно-аналитические приближения. Функция  $\bar{c}_n = \bar{c}_n(\bar{y})$  определяется характеристиками однородности раствора взвеси вводимой примеси на

срезе сопла инжектора, а также геометрическими характеристиками последнего, а именно, высотой расположения его нижней кромки от обтекаемой поверхности  $h$  и шириной щели  $s$ . При использовании предположения об однородности раствора (взвеси) примеси на выходе из инжектора, резонно считать концентрации каждого из вводимых веществ постоянными в выходных сечениях сопел соответствующих этим веществам инжекторов и равными  $c_{on}$ . В этом случае начальные профили безразмерных концентраций могут быть заданы ступенчатыми функциями следующего вида:

$$\bar{c}_n = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \bar{y} < \bar{h}_n, \\ 1 & \text{при } \bar{h}_n \leq \bar{y} < \bar{h}_n + \bar{s}_n, \\ 0 & \text{при } \bar{y} \geq \bar{h}_n + \bar{s}_n. \end{cases}$$

Задание в начальном сечении распределения  $\bar{v} = \bar{v}(\bar{y})$  ступенчатыми функциями, аналогичными приведенной выше, позволяет моделировать наклонный по отношению к обтекаемой поверхности выдув примесей из сопел инжекторов.

### 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В настоящем исследовании с целью моделирования турбулентности использована алгебраическая модель турбулентности, предложенная проф. В.Т. Мовчаном и модифицированная автором данной работы на случай моделирования ряда особенностей пристенных течений, таких как шероховатость обтекаемой поверхности, пространственный характер течения, немонотонность распределения скорости в пристенных струях [13, 14]. Выбор именно алгебраической модели обусловлен тем, что при своей относительной простоте, данный класс моделей турбулентности хорошо аппроксимирует особенности формирования турбулентного осредненного течения в непосредственной близости к обтекаемой поверхности. Что касается более сложных дифференциальных моделей, то, при больших возможностях описания переноса компонент тензора напряжений Рейнольдса, а также других составляющих турбулентного движения, дифференциальные уравнения, соответствующие моделируемым характеристикам турбулентности, имеют недостаточную физическую обоснованность вблизи обтекаемой поверхности. Изучаемый физический эффект воздействия вводимых примесей на турбулентный поток вводимых примесей проявляется наиболее сильно именно вблизи обтекаемой поверхности, что обуславливает необходимость проведения значительного объема исследований с целью поиска физически обоснованных и математически корректных аппроксимаций

правых частей соответствующих дифференциальных уравнений.

Считая эту задачу актуальной и перспективной в связи с дальнейшей разработкой данного направления исследований, на данном этапе выбор остановлен на использовании более простых и апробированных к расчетам пограничных слоев алгебраических подходов к моделированию турбулентности.

Модель турбулентной вязкости, примененная в данной работе, имеет следующий вид:

$$\nu_t = \chi \Delta v_* \gamma \text{th} \frac{l \sqrt{\tilde{\tau}}}{\chi \Delta}, \quad (8)$$

$$l = k y_* \text{th} \frac{\text{sh}^2(\chi_1 y_*^+) \text{th}[\text{sh}^2(\chi_2 y_*^+)]}{k y_*^+ \sqrt{\tilde{\tau}}}, \quad (9)$$

где  $\chi = 0.0168 - 0.0215$ ,  $\chi_1 = 0.068 - 0.072$ ,  $\chi_2 = 0.223$ ,  $k = k(c_n, \dots)$  - коэффициенты модели;  $l$  - масштаб длины пристенного турбулентного движения, имеющий смысл "длины пути перемешивания";  $\tilde{\tau} = \tau(y)/\tau_w$  - безразмерное напряжение трения в окрестности обтекаемой поверхности, которое определяется в зависимости от знака градиента давления  $\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}$  соотношениями

$$\tilde{\tau} = \begin{cases} 1 + \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \bar{y} & \text{при } \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \geq 0, \\ 1 / \left( 1 - \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} \bar{y} \right) & \text{при } \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} < 0; \end{cases}$$

$\tau_w$  - значение напряжения трения на стенке;  $\bar{p} = \frac{p}{\rho u_H^2}$  - безразмерное давление;  $\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = -\frac{1}{u_H} \frac{du_H}{d\bar{x}}$ ;  $\Delta = u_H \delta^* / v_*$  - параметр длины Ротта-Клаузера;  $\delta^*$  - толщина вытеснения;  $v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$  - динамическая скорость;  $\gamma = \sqrt{1 - \eta}$  - функция, моделирующая влияние перемежаемости турбулентного течения;  $\eta = y / \delta$  - нормальная координата, безразмерная по локальной толщине пограничного слоя  $\delta$ ;  $y^+ = y v_* / \nu$  - нормальная координата, приведенная к масштабу "закона стенки";  $y_*$  - нормальная координата, смещенная относительно стенки с целью учета влияния шероховатости обтекаемой поверхности и примесей веществ, влияющих на положение логарифмического участка профиля скорости (например, полимеров), определяемая в координатах закона стенки выражением

$$y_*^+ = \begin{cases} 0 & \text{при } s^+ \leq 0, \\ s^+ & \text{при } s^+ > 0, \end{cases}$$

$s^+ = y^+ + \Delta y_{rhn}^+ - \Delta y_{add}^+$ ,  $\Delta y_{rhn}^+$  - параметр, учитывающий влияние шероховатости обтекаемой поверхности;  $\Delta y_{add}^+$  - параметр, введенный в данной

работе с целью моделирования влияния введенных в поток добавок веществ, способных воздействовать на вязкие свойства жидкости и на формирование турбулентности. Введение функции сдвига  $\Delta y_{rhn}^+ > 0$  позволяет отразить в рамках модели турбулентности известный из экспериментальных исследований эффект влияния шероховатости обтекаемой поверхности. Этот эффект заключается в смещении логарифмического участка скорости профиля скорости, представленного в полулогарифмических координатах, вниз относительно положения для случая обтекания гладкой поверхности на некоторую величину  $\Delta u_{rhn}^+$ . Последняя величина является некоторой функцией параметров шероховатости обтекаемой поверхности. Структура этой функции и ее связь с  $\Delta y_{rhn}^+$  описана в [13, 14].

Аналогично, функция сдвига  $\Delta y_{add}^+ > 0$  учитывает смещение логарифмического участка профиля скорости в противоположном направлении, которое возникает под влиянием добавок полимеров или поверхностно-активных веществ [7, 8, 15, 16] в пограничный слой жидкости. Подобно функции влияния шероховатости, в рамках данной модели между  $\Delta y_{add}^+$  и сдвигом скорости  $\Delta u_{add}^+$  существует однозначная и универсальная зависимость. Однако анализ и обобщение экспериментальных данных обнаруживает невозможность установления универсальной и однозначной зависимости между  $\Delta u_{add}^+$  и концентрацией, а также другими параметрами, характеризующими физико-химические свойства полимерных добавок или поверхностно-активных веществ. Поэтому в каждом отдельном случае необходимо пользоваться известной экспериментальной информацией по влиянию на концентрации и других характеристик конкретного вещества. Эмпирические зависимости такого типа приведены, например, в [15, 16]. Данная информация и была использована в качестве первого приближения в рамках описываемой модели турбулентности.

Для учета неравномерности концентрации полимера по поперечному сечению рассматриваемого течения была выдвинута следующая гипотеза: функция сдвига  $\Delta y_{add}^+$ , в отличие от функции влияния шероховатости  $\Delta y_{rhn}^+$ , не является постоянной величиной в конкретном расчетном сечении  $x = \text{const}$ , а определяется в каждом расчетном узле вдоль нормальной координаты  $y$  по значениям локальных концентраций примесей  $c_n(\bar{y})$ , которые находятся в результате решения уравнений переноса  $\bar{c}_n(\bar{y})$  каждой из присутствующих в пограничном слое фаз примесей (3). Размерное значение концентрации определяется в соответствии с пра-

вилом, примененным для ее обезразмеривания, то есть  $c_n(\bar{y}) = \bar{c}_n(\bar{y})c_{on}$ .

При моделировании молекулярного коэффициента турбулентной вязкости  $\bar{\nu}$  принимается следующая гипотеза: его локальное значение рассматривается как парциальная величина в зависимости от концентраций каждой из фаз, которые присутствуют в рассматриваемой точке потока. Аналогичное предположение принимается справедливым и при вычислении суммарного смещения логарифмического участка профиля скорости  $\Delta u_{add}^{+\Sigma}$ . В математической форме эта идея реализована уравнениями

$$\bar{\nu}^{\Sigma} = \sum_{n=1}^N (\bar{\nu}_n \bar{c}_n), \quad \Delta u_{add}^{+\Sigma} = \sum_{n=1}^N (\Delta u_{addn}^{+} \bar{c}_n).$$

Таким образом, здесь используется допущение об отсутствии нелинейного взаимодействия между переносимыми примесями, поскольку приведенные формулы по принципу построения являются линейными комбинациями вкладов каждой из переносимых фаз ( $\bar{\nu}_n, \Delta u_{addn}^{+}$ ) в совокупные значения рассчитываемых характеристик  $\bar{\nu}^{\Sigma}$  и  $\Delta u_{add}^{+\Sigma}$  пропорционально локальным значениям обезразмеренных концентраций  $\bar{c}_n$ , которые выступают в качестве коэффициентов этих линейных комбинаций.

## 5. МЕТОД РАСЧЕТА

Для решения уравнений (1)–(4) при заданных граничных условиях (5)–(7) построен неявный безытерационный маршевый метод. Уравнения решаются на неравномерной в обоих направлениях прямоугольной сетке. Количество узлов в направлении координаты  $x$  ( $i_{max}$ ) задается с учетом того, чтобы первый расчетный шаг составлял две толщины пограничного слоя в начальном сечении, а далее увеличивался по закону геометрической прогрессии  $\Delta x^{i+1} = \Delta x^i q_x$  с знаменателем порядка  $q_x = 1.05-1.1$ . В нормальном к обтекаемой поверхности направлении сетка также задается по закону геометрической прогрессии. Первый шаг по координате  $y$  от стенки определяется условием  $\Delta y_1^+ = 0.8$ , а последний в пределах толщины пограничного слоя начального сечения  $\delta$  принимается равным  $\Delta y_{jmax} = 0.05\delta$ . Таким образом, сетка строится с учетом характеристик конкретного течения. Обычно количество узлов в направлении развития течения составляет  $i_{max} = 40-70$  узлов, а по нормали к поверхности -  $j_{max} = 70-140$  узлов. Для удобства описания расчетного метода, уравнения (2), (3) удобно представить в обобщенной

форме

$$A_x \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{x}} + A_y \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} = S_{\phi} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left( F \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} \right), \quad (10)$$

где  $\bar{\phi} = \{u, c_n\}$ ,  $n = 1, \dots, N$  - обобщенное обозначение переменной;  $A_x, A_y$ , - коэффициенты конвективного переноса в направлениях осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $F$  - диффузионный коэффициент;  $S_{\phi}$  - источниковый член. Данные величины определяются в зависимости от решаемого уравнения в соответствии с таблицей:

| Уравнение | $\bar{\phi}$ | $A_x$     | $A_y$       | $F$                  | $S_{\phi}$  |
|-----------|--------------|-----------|-------------|----------------------|---|
| (2)       | $\bar{u}$    | $\bar{u}$ | $\bar{\nu}$ | $\bar{\nu}^{\Sigma}$ | $(1 - \bar{u}^2) \frac{1}{u_H} \frac{du_H}{d\bar{x}}$ |
| (3)       | $\bar{c}_n$  | $\bar{u}$ | $\bar{\nu}$ | $D_n^{\Sigma}$       | 0   |

Расчет характеристик течения в расчетном сечении  $x^{i+1}$  по известным значениям величин в расчетном сечении  $x^i$  производится в два этапа. На каждом из этих этапов решаются уравнения (2) и (3), представленные в виде неявной шеститочечной конечно-разностной схемы

$$\begin{aligned} A_{xj} \frac{\bar{\phi}_j^{i+1} - \bar{\phi}_j^i}{\Delta \bar{x}^i} + \frac{A_{yj}}{2} \left( \frac{\bar{\phi}_{j+1}^{i+1} - \bar{\phi}_j^{i+1}}{\Delta \bar{y}_j} + \frac{\bar{\phi}_j^{i+1} - \bar{\phi}_{j-1}^{i+1}}{\Delta \bar{y}_{j-1}} \right) = \\ = \frac{2}{\Delta \bar{y}_{av}} \left( \bar{F}_{j+1/2} \frac{\bar{\phi}_{j+1}^{i+1} - \bar{\phi}_j^{i+1}}{\Delta \bar{y}_j} - \bar{F}_{j-1/2} \frac{\bar{\phi}_j^{i+1} - \bar{\phi}_{j-1}^{i+1}}{\Delta \bar{y}_{j-1}} \right) + S_{\phi}, \quad (11) \end{aligned}$$

где индексы  $i, j$  определяют расположение узла разностной сетки, в котором находится значение сеточных переменных уравнения (11);  $\Delta \bar{x}^i = \bar{x}^{i+1} - \bar{x}^i$ ;  $\Delta \bar{y}_j = \bar{y}_{j+1} - \bar{y}_j$ ;  $\Delta \bar{y}_{av} = 0.5(\bar{y}_{j+1} - \bar{y}_{j-1})$  - текущие значения шагов сетки;  $F_{j+1/2} = 0.5(F_j + F_{j+1})$ ,  $F_{j-1/2} = 0.5(F_{j-1} + F_j)$  - значения диффузионного коэффициента в полуцелых точках между узлами вдоль оси  $y$ . Уравнение (11) можно представить в форме разностного соотношения

$$W \phi_{j-1}^{i+1} + P \phi_j^{i+1} + E \phi_{j+1}^{i+1} = R.$$

Это уравнение связывает значения рассчитываемой величины  $\phi^{i+1}$  в трех соседних узлах разностной сетки вдоль оси  $y$ . Коэффициенты  $W, P, E, R$  являются функциями параметров сетки и сеточных переменных. Последовательное применение этого уравнения ко всем внутренним узлам сетки  $j = 2, \dots, (j_{max} - 1)$  в расчетном сечении  $x^{i+1} = \text{const}$  приводит к системе  $j_{max} - 2$  линейных

алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, которая решается посредством алгоритма прогонки [17].

Значения переменных, определяющих величины конвективных коэффициентов  $A_x, A_y$ , диффузионного коэффициента  $F$  и источникового члена  $S_\phi$  на первом этапе расчета берутся с расчетного сечения вдоль оси  $x$ , которое имеет номер  $i$ , то есть:

$$A_x = \bar{u}_j^i, A_y = \bar{v}_j^i, F = \bar{v}_j^i, S_\phi = (1 - \bar{u}_j^{i2}) \frac{1}{u_H} \frac{du_H}{d\bar{x}}$$

- для уравнения (2);  $A_x = \bar{u}_j^i, A_y = \bar{v}_j^i, F = \bar{D}_j^i, S_\phi = 0$  - для уравнения (3). Таким образом, первый этап данного метода полностью совпадает по принципу построения конечно-разностной аппроксимации решаемых уравнений с методом Р.Х. Плетчера [18].

На втором этапе в качестве этих величин используются результаты расчета первого этапа в сечении  $x^{i+1}$ , то есть  $A_x = \tilde{u}_j^i, A_y = \tilde{v}_j^i, F = \tilde{v}_j^i, S_\phi = (1 - \tilde{u}_j^{i2}) \frac{1}{u_H} \frac{du_H}{d\bar{x}}$  - для уравнения (2);  $A_x = \tilde{u}_j^i, A_y = \tilde{v}_j^i, F = \tilde{D}_j^i, S_\phi = 0$  - для уравнения (3). Здесь символом “ $\tilde{\phantom{x}}$ ” обозначены результаты расчета первого этапа. Если результаты расчета второго этапа обозначить “ $\hat{\phantom{x}}$ ”, то окончательные значения рассчитываемых переменных в сечении  $x^{i+1}$  находятся по формуле

$$\bar{\phi}_j^{i+1} = 0.5 \left( \hat{\phi}_j^{i+1} + \tilde{\phi}_j^{i+1} \right). \quad (12)$$

Следующим этапом расчета является определение напряжения трения на обтекаемой поверхности, для чего применяется аппроксимация соотношения (4) на первом полушаге  $\Delta y_{1+1/2}$  по значениям рассчитанных сеточных переменных на стенке (узел  $j = 1$ ) и в следующем от стенки узле  $j = 2$

$$(\bar{\tau}_w)_{1+1/2}^{i+1} = 0.5 \left[ (\bar{\nu}^\Sigma)_1^{i+1} + (\bar{\nu}^\Sigma)_2^{i+1} \right] \frac{\bar{u}_2^{i+1}}{\Delta \bar{y}_1}. \quad (13)$$

с последующей интерполяцией этого значения совместно с  $(\bar{\tau}_w)_1^{i+1}$  и  $(\bar{\tau}_w)_2^{i+1}$  на стенку  $y = 0$ . Местные значения коэффициента сопротивления трения  $c_f$  и динамической скорости  $v_*$  находятся по формулам  $c_f = 2\bar{\tau}_w^{i+1}, v_* = u_H \sqrt{\bar{\tau}_w^{i+1}}$ . Затем рассчитываются интегральные толщина вытеснения  $\delta^* = \int_0^1 (1 - \bar{u}) d\eta$  и толщина потери импульса  $\delta^{**} = \int_0^1 \bar{u}(1 - \bar{u}) d\eta$ .

Уравнение неразрывности (1) аппроксимируется на четырехточечном шаблоне. Решение этого уравнения выполняется после интегрирования уравнения (10) при  $\bar{\phi} = \bar{u}$ , что позволяет рассчитать значения вертикальной составляющей скорости  $\bar{v}$  в сечении  $x^{i+1}$  по значениям горизонтальной

составляющей  $\bar{u}$  в двух сечениях вдоль  $x$ . Затем производится переход к следующему расчетному сечению вдоль координаты  $x$  и описанная выше процедура повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто конечное сечение расчетной области. Таким образом, построенный метод относится к методам типа “predictor-corrector”. В соответствии со своей структурой он обеспечивает второй порядок точности аппроксимации уравнений (1)–(3) по координате  $y$ . Двухэтапная схема решения обусловлена целью увеличения точности аппроксимации расчетного алгоритма до второго порядка также и по координате  $x$ .

Использованное конечно-разностное представление решаемых уравнений в форме (11) с описанным выше способом моделирования его членов имеет, в сравнении с часто используемой аппроксимацией на основе конечно-разностной схемы Кранка–Николсона, существенное преимущество. Оно заключается в том, что в данном методе отсутствует необходимость проведения итераций уравнения (2), поскольку расчет, независимо от расчетных условий, выполняется за два этапа, причем на каждом из этих этапов коэффициенты уравнения (10)  $A_x, A_y, F$  и источниковый член  $S_\phi$  являются известными из предшествующего расчета величинами.

При использовании схемы Кранка–Николсона, даже при решении динамической задачи, возникает необходимость проведения итераций по двум основным причинам. Первой причиной является нелинейность решаемых уравнений и, как следствие, зависимость коэффициентов их конечно-разностного представления  $A_x, A_y$  от находимых в процессе расчета распределений  $\bar{u}(\bar{y}), \bar{v}(\bar{y})$  на шаге  $x^{i+1} = \text{const}$ . Вторая причина состоит в необходимости нахождения итерационным путем значения напряжения трения на стенке при турбулентном обтекании  $\tau_w^{i+1}$ , поскольку данная величина, определяемая в процессе решения на шаге  $x^{i+1} = \text{const}$  из уравнений типа (13), входит через динамическую скорость  $v_*^{i+1} = \sqrt{\tau_w^{i+1}/\rho}$  в модель турбулентности (8), (9), а, следовательно, определяет диффузионные коэффициенты  $F$ .

Наличие в потоке примесей, способных воздействовать на вязкие и турбулентные свойства переносящего их пограничного слоя, добавляет в модель турбулентности дополнительные параметры, являющиеся функциями концентраций переносимых примесей  $\bar{c}_n$ , которые, являясь переменными величинами, рассчитываются путем интегрирования соответствующих им уравнений переноса (3). Данное обстоятельство делает применение схемы

Кранка–Николсона неэффективным уже при описании переноса одной примеси типа добавки полимера. При увеличении количества переносимых компонентов следует ожидать резкого снижения эффективности расчетного метода, построенного на основе схемы Кранка–Николсона, что обосновывает нерациональность его разработки для рассматриваемого класса задач.

Предлагаемый метод расчета свободен от перечисленных недостатков. В особенности данное преимущество безытерационности разработанного метода проявляется при расчетах течений со значительными значениями градиента давления и, прежде всего, в тех случаях, когда положительный градиент давления приводит к формированию отрывного или предотрывного течений, где сходимость итерационного процесса существенно ухудшается.

В связи со структурой и принципом построения описанного метода следует также отметить, что подход к увеличению порядка аппроксимации по продольной координате  $x$  при численном интегрировании уравнений пограничного слоя посредством использования в качестве коэффициентов  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $F$  и источникового члена  $S_\phi$  уже найденных в предыдущем расчете (на предыдущем шаге по  $x$  или этапе) значений был реализован в трехэтапном алгоритме, предложенном в [17]. Этот расчетный метод многократно и с успехом использовался автором данной работы в расчетах разнообразных турбулентных пристенных сдвиговых течений, например, в целях моделирования двухфазного газо–жидкостного пограничного слоя с границей раздела фаз, а также в расчетах пристенных струй с характерным немонотонным профилем скорости [13, 14].

Однако применение двухэтапной схемы расчета совместно с формулой (12) имеет преимущество перед трехэтапным алгоритмом [17], заключающееся в отсутствии присущей последнему проблемы корректного удовлетворения численного решения  $\bar{\phi}(\bar{y})$  асимптотическому граничному условию  $\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{y}} \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow \delta$  на верхней границе пограничного слоя.

Еще одним весьма важным с точки зрения моделирования многокомпонентных течений достоинством разработанного метода, вытекающим из его структуры, является отсутствие в нем необходимости согласования рассчитываемых на шаге  $x^{i+1} = \text{const}$  характеристик даже при наличии непосредственного и, возможно, сильного физического взаимодействия между ними. Эта особенность позволяет решать каждое из уравнений (2),

(3) независимо друг от друга на каждом из двух этапов, что обеспечивает возможность эффективного распараллеливания вычислений и использования преимуществ многопроцессорных вычислительных установок. Затраты времени использования компьютера на решение задачи моделирования переноса многокомпонентной среды турбулентным пограничным слоем при реализации предложенного метода будут, в отличие от подхода на базе схемы Кранка–Николсона, пропорциональны количеству уравнений переноса в системе (2), (3) и обратно пропорциональны числу процессоров компьютера.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТОВЫХ РАСЧЕТОВ

Целью данного раздела является проверка предположений, положенных в основу построенной модели турбулентности и расчетного метода посредством тестирования расчетами нескольких видов течений, интересных в связи с задачами данного исследования.

Первым этапом тестирования модели является ее проверка в расчетах профилей продольной составляющей скорости осредненного турбулентного движения. С этой целью было выполнено численное интегрирование соотношения, которое получается в результате приведения уравнения (4) к масштабу закона стенки и имеет вид

$$\frac{\partial u^+}{\partial y^+} = \frac{1}{1 + \nu_t/\nu}, \quad \text{где } u^+ = \frac{u}{v_*}.$$

Интегрирование выполнялось в пределах внутренней области пограничного слоя, что позволило не учитывать изменения сдвигового напряжения по координате  $y$ , свойственные, например, внутренним течениям в трубах. Турбулентная вязкость определяется соотношениями (11), (12). На рис. 1 представлены результаты сопоставления расчетов распределения продольной составляющей скорости (линии) с экспериментальными данными, полученными различными авторами (точки различного начертания) для течений однородных растворов разных полимеров различных концентраций в широком диапазоне значений. Все профили скорости представлены в полулогарифмических координатах. При моделировании турбулентной вязкости использовались соответствующие экспериментальным условиям вид полимера и значения его концентрации. Как следует из представленных сопоставлений, расчетные распределения скорости с удовлетворительной точностью соответствуют данным экспериментов различных



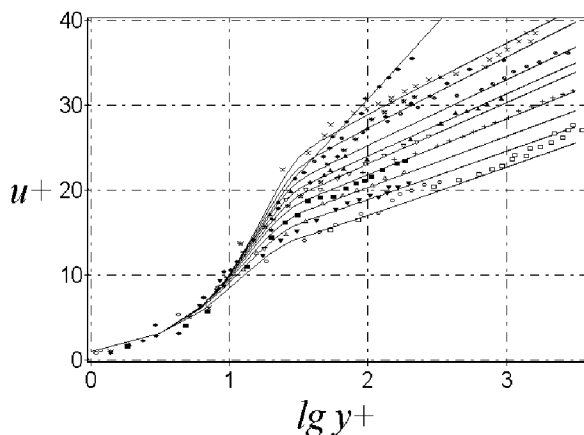


Рис. 1. Сопоставление рассчитанных (линии) и экспериментально измеренных (точки) профилей скорости  $u^+ = u^+(y^+)$  для течений однородных растворов различных полимеров в широком диапазоне концентраций  $c = 0 - 7.4 \cdot 10^{-4}$  г/см<sup>3</sup>

авторов, причем в расчетах корректно моделируется эффект увеличения толщины вязкого подслоя при увеличении концентрации полимера в растворе, а также переход от линейной зависимости в вязком подслое  $u^+ = y^+$  к логарифмическому закону  $u^+ = k^{-1} \ln y^+ + C$ . Кроме того, проведенный численный эксперимент показал, что зависимость коэффициента Кармана от концентрации полимера  $k = k(c)$  не является универсальной и, также как и зависимость  $\Delta y_{add}^+ = f(c)$ , определяется видом конкретного полимера.

Следующая иллюстрация (рис. 2) относится к случаю моделирования внешнего многофазного течения, развивающегося вдоль обтекаемой поверхности. С этой целью разработана программа, написанная на алгоритмическом языке Object Pascal в среде программирования Delphi-3 с широким использованием графических средств отображения рассчитываемой информации и применением технологии организации распараллеливания вычислений посредством использования вычислительных потоков (threads).

Рис. 2 является результатом компьютерной визуализации тестового расчета многослойного течения воды, в которое в некотором сечении, принимаемом в расчете за начальное, вводятся из трех сопел, расположенных одно непосредственно над другим, три различные примеси малых концентраций растворенных в воде веществ. Распределения их безразмерных концентраций  $\bar{c}_n$ , ( $n = 1, \dots, 3$ ) в начальном сечении (на рис. 2 - крайнее слева) представлены прямоугольниками одинаковой ширины. Высоты этих прямоуголь-

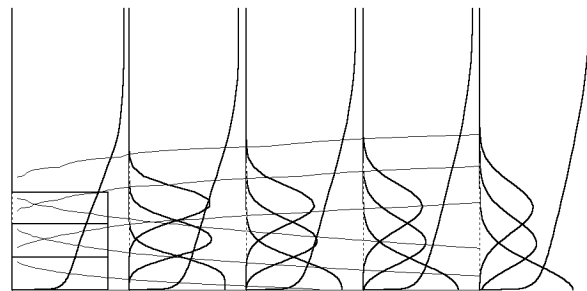


Рис. 2. Компьютерная визуализация результатов математического моделирования формирования турбулентного пограничного слоя воды, переносящего три разнородные примеси

ников определяются шириной сопел, осуществляющих инъекцию. По мере развития течения (слева направо) происходит процесс диффузии введенных примесей по ширине пограничного слоя с формированием характерных колоколообразных профилей концентраций  $\bar{c}_n = \bar{c}_n(\bar{y})$  для фаз, движущихся внутри рассматриваемого многокомпонентного течения,  $n = 2, 3$ . Профиль концентрации примеси, введенной непосредственно возле обтекаемой поверхности,  $\bar{c}_1 = \bar{c}_1(\bar{y})$ ,  $n = 1$ , имеет монотонно убывающий (по мере удаления от стенки) вид. Границы распространения каждой из фаз по толщине сдвигового слоя очерчены на рис. 2 соответствующими линиями, что позволило проиллюстрировать процесс взаимного смешения фаз как расположенных по соседству, так и непосредственно не соприкасающихся в сечении, где осуществляется их инъекция. Профили скорости  $\bar{u} = \bar{u}(\bar{y})$  в каждом из характерных сечений представлены традиционными для пограничного слоя монотонно возрастающими кривыми.

Данная иллюстрация позволяет сделать вывод о непротиворечивом характере воспроизведения предложенными в данной работе математической моделью и расчетным методом процесса динамики переноса и диффузии введенных в турбулентный пограничный слой разнородных примесей.

## 7. ВЫВОДЫ

1. Разработана полумпирическая алгебраическая модель турбулентной вязкости, позволяющая учитывать наличие в потоке жидкости добавок примесей в виде жидкой либо мелкодисперсной фаз, одним из основных эффектов влияния которых может являться воздействие на вязкие и турбулентные свойства сдвигового потока, приводящее к формированию нормального по отношению к обтекаемой поверхности градиента коэффициен-

тов молекулярной и турбулентной вязкости.

2. Разработан безытерационный метод расчета турбулентного пограничного слоя, позволяющий описать течение, в котором осуществляется локальная инъекция нескольких примесей, позволяющий эффективно использовать методологию распараллеливания вычислений.

3. Выполнен расчет профилей скорости осредненного течения однородных растворов различных полимеров в широком диапазоне концентраций  $c = 0 - 7.4 \cdot 10^{-4}$  г/см<sup>3</sup>.

4. Выполнен тестовый расчет развития течения вдоль гладкой поверхности с учетом инъекции трех примесей при различных высотах расположения инжекторов относительно обтекаемой поверхности.

5. Полученные результаты качественно верно описывают процессы, протекающие в гетерогенном пограничном слое при выполнении допущений, положенных в основу разработанных математической модели и расчетного метода.

1. Пива Р., Орланди П. Численное решение для течений в атмосферном пограничном слое над уличными каньонами // В сб.: Новое в зарубежной науке. Сер. Механика. 14. "Численное решение задач гидромеханики". – М.: Мир, 1977. – С. 127–134.
2. Дейч М. Е., Филиппов Г. А. Газодинамика двухфазных сред. – М.: Энергия, 1968. – 422 с.
3. Гилинский М. М. Сверхзвуковые газодисперсные струи. – М.: Машиностроение, 1990. – 175 с.
4. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. – М.: Мир, 1990. – 661 с.
5. Мостафа А. А., Монджиа А. А., Макдонелл В. Г., Самуэлсен Г. С. Распространение запыленных струйных течений. Теоретическое и экспериментальное исследование // Аэрокосмическая техника. – 1990. – N 3 март. – С. 65–81.
6. La Torre R., Vabenco V. Role of Bubble Injection Technique Drag Reduction // Proc. of the International Symposium on SeaWater Drag Reduction, 22–23 July 1998. – Newport, Rhode Island, 1998. – P. 319–326.
7. Седов Л. И., Иоселевич В. А., Пилишенко В. Н. Механизм снижения трения полимерными добавками // В сб.: Проблемы турбулентных течений. – "Наука". – 1987. – С. 9–14.
8. Повх И. Л., Ступин А. Б., Асланов П. В. Особенности турбулентной структуры потоков с добавками поверхностно-активных веществ и полимеров // В сб.: Проблемы турбулентных течений. – "Наука". – 1987. – С. 152–162.
9. Elseev A. R., Maltzev L. I., Malyuga A. G. Experimental Investigation of a Water Boundary Layer with Gas Microbubbles // Proc. of the 11-th Drag Reduction Working Meeting. 15–17 September 1999. – Prague, 1999. – P. 13.
10. Fontaine A. A., Deuth S., Moeny M. J., Brungart T. A., Petrie H. L. Synergistic Drag Reduction in Coupled Systems: Microbubbles and Polymers // Proc. of the 11-th Drag Reduction Working Meeting. 15–17 September 1999. – Prague, 1999. – P. 14–15.
11. Semenov B. The Combination of Polymer, Compliant Wall and Microbubble Drag Reduction Schemes // Proc. of the International Symposium on SeaWater Drag Reduction, 22–23 July 1998. – Newport, Rhode Island, 1998. – P. 269–276.
12. Philips R., Castano J., Stace J. Combined Polymer and Microbubble Drag Reduction // Proc. of the International Symposium on SeaWater Drag Reduction, 22–23 July 1998. – Newport, Rhode Island, 1998. – P. 335–340.
13. Movchan V. T., Shkvar E. A. Modelling of Dynamics and Heat Transfer Processes in Turbulent Near-Wall Shear Flows // Proc. of the 2nd European Thermal-Sciences and 14th UIT National Heat Transfer Conference, 29–31 May, 1996, Rome, Italy. – Edizioni ETS, Pisa, Vol. 1. – P. 1996.535–540
14. Movchan V. T., Shkvar E. A. Modeling of Turbulent Near-Wall Shear Flows Properties // AGARD Report 827. – "High Speed Body Motion in Water". – 1997. – P. 10-1–10-7.
15. Повх И. Л., Никулин В. А. Турбулентное течение вязкой жидкости и слабых растворов полимеров в трубах // Киев-Донецк. – "Вища школа". – 1990. – С. 25–34.
16. Матвиевский С. А. Некоторые эмпирические зависимости турбулентного течения разбавленного раствора полимера // Гидромеханика. К.: Институт гидродинамики АН УССР. – Вып. 43, 1984. – С. 162–170.
17. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 285 с.
18. Плетчер Р. Х. Расчет несжимаемого турбулентного отрывного течения // Теоретические основы инженерных расчетов. Т. 100. – N4. – 1978. – С. 167–173.