

УДК 536.25

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ВБЛИЗИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТИ К ТРЕХМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

О. Д. НИКИШОВА

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 15.05.99

Рассматриваются устойчивость течения жидкости в пограничном слое относительно трехмерных продольных вихрей (вихрей Гертлера), формирующихся под действием центробежных сил. Показано, что вихри возникают на выпуклой поверхности, которая движется вдоль искривленной траектории, в отличие от случая, когда неподвижная криволинейная поверхность обтекается потоком жидкости и вихри возникают на вогнутой стороне. Исследована линейная устойчивость такого течения, построена диаграмма устойчивости. Найдено, что критическое число Гертлера значительно превышает аналогичное критическое число для случая обтекания потоком неподвижной вогнутой поверхности. Найдено, что диапазон волновых чисел, которые характеризуют неустойчивость течения, является более узким, по сравнению со случаем обтекания поверхности. Это позволяет сделать вывод о том, что течение около движущейся криволинейной поверхности, которая движется вдоль криволинейной траектории, является более устойчивым по сравнению с течением около неподвижной искривленной поверхности, которая обтекается потоком жидкости. Проведены систематические расчеты собственных функций задачи для разных значений чисел Гертлера Gr и безразмерного волнового числа $\alpha\theta$, где θ – толщина граничного слоя. Построены соответствующие графики этих функций, найдены положения и значения характерных точек каждой функции (максимальные и минимальные значения, точки пересечения с вертикальной осью). Приведенные данные позволяют приблизительно определять все компоненты возмущенной скорости и давления, если известна информация только об одной компоненте, например, о максимальном значении продольной компоненты возмущенной скорости, которое может быть измерено в экспериментах. Анализируется расположение зон неустойчивости к трехмерным продольным вихрям на теле плавущего прямолинейно дельфина, кормовая часть которого движется вверх и вниз.

Розглядається стійкість течії в пограничному шарі відносно тривимірних поздовжніх вихорів (вихорів Гьортлера), які формуються під дією відцентрових сил. Показано, що вихори виникають на опуклій поверхні, яка рухається по викривленій траєкторії, на відміну від випадку, коли нерухома криволінійна поверхня обтається потоком рідини і вихорі формуються на увігнутій стороні. Досліджено лінійну стійкість такої течії, побудовано діаграму стійкості. Знайдено, що критичне число Гьортлера значно перевищує аналогічне критичне число для течії, яка обтікає нерухому увігнуту поверхню. Знайдено, що діапазон хвильових чисел, які характеризують нестійкість течії, є вузьким в порівнянні з випадком обтікання поверхні. Це дозволяє зробити висновок, що течія біля рухомої викривленої поверхні, яка обтається потоком рідини, є більш стійкою в порівнянні з течією біля нерухомої викривленої поверхні, яка обтається потоком рідини. Проведено систематичні розрахунки власних функцій задачі для різних значень чисел Гьортлера Gr та безрозмірного хвильового числа $\alpha\theta$, де θ – товщина втрати імпульсу. Побудовано відповідні графіки цих функцій, знайдено положення і значення характерних точок кожної функції (максимальні і мінімальні значення, точки перетину вертикальної осі). Приведені дані дозволяють приблизно визначити усі компоненти збуреної швидкості та тиску, якщо відома інформація тільки про одну компоненту, наприклад, про максимальне значення поздовжньої компоненти швидкості, яка може бути виміряна експериментальним шляхом. Проведено аналіз розташування зон нестійкості до тривимірних вихорів на тілі дельфіна, який рухається прямолінійно і кормова частина його тіла робить рухи догори та донизу.

Stability of flow in a boundary layer in respect to three-dimensional longitudinal vortices (Goertler vortices), that are formed under centrifugal effect, is considered. It is shown that the vortices arise over convex surface that moves along curved trajectory in distinction from the case when stationary curved surface is flowed and the vortices are formed over concave surface. The linear stability of the flow is studied and the stability diagram is constructed. It is found that the critical Goertler number is much more than similar critical number for the case when the stationary concave surface is flowed. It is concluded that the flow over curved surface moving along curved trajectory is more stable in comparison with the flow over stationary curved surface. The comprehensive calculations of the eigen functions for different Goertler numbers Gr and non-dimensional wave number $\alpha\theta$, where θ the impulse thickness are carried out. The graphs of the functions are plotted, the positions and the values of the characteristic points of each function (maximum and minimum values, the crossing of the vertical axes) are found. These data permit to determine all components of the disturbed velocity and the pressure approximately if the information about one component, for example, the maximum value of the longitudinal component of the disturbed velocity that can be measured in experiments is known. The location of the instability region in respect to three-dimensional longitudinal vortices on the linearly moving dolphin's body, whose afterbody moves up and down, is discussed.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из методов снижения сопротивления движущихся тел в водной среде является использование вязко-упругих покрытий. Известно, что кожные покровы водных млекопитающихся, в

частности дельфинов, представляют собой подобные вязко-упругие покрытия. Анализ показывает, что эти покрытия имеют ряд структурных особенностей [1]: ячеистое строение эпидермиса, в котором имеются дермальные сосочки, глубоко проникающие в эпидермис, упорядоченная система дер-

мальных валиков, направленная, в основном, вдоль потока, разветвленная сеть мелких кровеносных сосудов по всей толще дермы и др. Тщательное рассмотрение направлений дермальных валиков и углов наклонов дермальных сосочков дает основание полагать об определенном влиянии их на поведение как двумерных, так и трехмерных возмущений, развивающихся в пограничном слое, и в конечном счете на трение [2].

При движении дельфинов их центр тяжести перемещается практически прямолинейно и равномерно, в то время как кормовая часть изгибается вверх и вниз. Это приводит к появлению центробежных сил, которые обуславливают появление трехмерных возмущений в виде продольных вихрей (вихрей Гертлера), взаимодействие которых с вязко-демпфирующей кожей дельфинов определяет дальнейшее развитие потока, его переход к турбулентному режиму, условия отрыва и др.

Известно, что течение в пограничном слое на вогнутой поверхности является неустойчивым из-за влияния центробежных сил, которые обуславливают формирование противоположно вращающихся вихрей Гертлера. Картина таких вихрей, развивающихся в пограничном слое, схематически изображена на рис. 1.

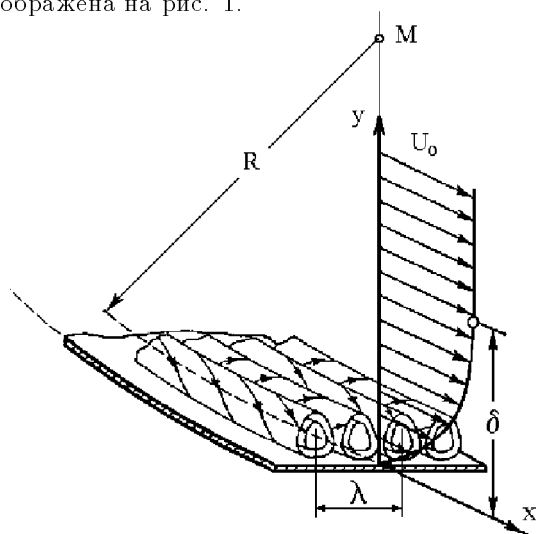


Рис. 1. Картина вихрей Гертлера:
 U_0 – скорость течения вне пограничного слоя; δ – толщина пограничного слоя; R – радиус кривизны поверхности; λ – длина волны; x и y – продольная и нормальная к поверхности координаты соответственно

Возникающие вихри имеют большое влияние на течение с искривленными линиями тока, которое может приводить к значительным изменениям коэффициента трения, характеристик перехода течения к турбулентному режиму и отрыва. Процессы

тепло- и массопереноса в пограничном слое также сильно зависят от вихревой структуры течения.

Устойчивость течения в пограничном слое на вогнутой поверхности, включая линейное и нелинейное развитие возмущений и переход, привлекает большое внимание ученых. Гертлер [16] первым рассмотрел эту проблему. Он ввел критический параметр, определяющий потерю устойчивости течения и сконструировал диаграмму устойчивости. Затем различные аспекты проблемы изучались многими авторами, среди которых можно отметить авторов работы [8, 10, 11, 27]. Были разработаны теоретические основы линейной теории. Экспериментальные исследования выполнены в [3, 4, 26, 31, 35]. Найдено, что начальный рост амплитуды возмущений происходит в соответствии с линейной теорией. Были измерены профили скорости в разных зонах вихревой структуры и обнаружены различные типы вторичной неустойчивости.

Продольные вихри возникают также во вращающихся прямолинейных или искривленных каналах. Причина их появления связана с дестабилизирующим действием сил Кориолиса [33]. Характеристики вихревой структуры таких течений изучены в [21, 23, 24]. Было исследовано влияние вращения и был сформулирован невязкий критерий устойчивости.

Устойчивость течения в пограничном слое на вогнутой поверхности, которая подвергается однородному вращению, изучена в работе [38]. Авторы показали, что устойчивость зависит от направления вектора вращения. Течение является неустойчивым, если этот вектор параллелен сдвиговой завихренности течения в пограничном слое, и является устойчивым при противоположной его ориентации.

Схематически конфигурация течения в пограничном слое на обтекаемой вогнутой поверхности изображена на рис. 2, *d*. Отметим, что этот случай изучался Гертлером. Баланс сил показывает, что такое течение является неустойчивым из-за кривизны линий тока. Центробежная сила, обуславливающая потерю устойчивости, направлена по направлению к поверхности, но ее нормальная производная направлена от нее. В то же время течение около неподвижной выпуклой поверхности, которая обтекается потоком жидкости, является устойчивым по отношению к вихрям Гертлера [29]. В этом случае направление центробежной силы совпадает с направлением ее нормальной производной (рис. 2, *c*).

В случае, когда поверхность движется вдоль

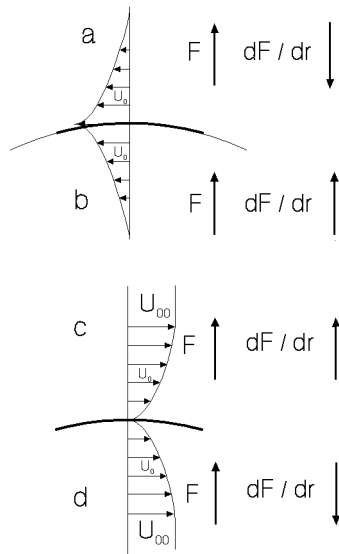


Рис. 2. Схемы течений

искривленной траектории, например окружности, центробежные эффекты могут также приводить к неустойчивости течения в пограничном слое. Направления центробежной силы и ее нормальной производной совпадают в течении около движущейся вогнутой поверхности (рис. 2, b) и являются противоположно ориентированы в потоке вблизи движущейся выпуклой поверхности (рис. 2, a). На основании предыдущего анализа можно сделать вывод о том, что течение около движущейся вогнутой поверхности устойчиво и вблизи движущейся выпуклой поверхности – неустойчиво. Выводы об устойчивости течения вблизи вогнутой и выпуклой движущихся поверхностей подтверждаются анализом баланса сил Кориолиса и сил давления [33].

В данной работе рассматривается линейная устойчивость течения в пограничном слое на выпуклой поверхности, которая движется вдоль искривленной траектории. Вычислены диаграмма устойчивости и собственные функции. Выполнен анализ параметров функций в зависимости от числа Гертлера.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение сегмента круглой цилиндрической поверхности радиуса R , которая вращается в неподвижной жидкости вокруг своей оси с угловой скоростью Ω (рис. 3, a). Линейная скорость движения сегмента равна $U_0 = |\Omega|R$. Отме-

тим, что тангенциальная производная центробежной силы равна нулю, т.е. течение около сегмента может рассматриваться как течение с нулевым градиентом давления. В соответствии с выполненным ранее анализом будем считать, что течение вблизи сегмента является неустойчивым по отношению к продольным вихрям.

Введем криволинейную систему координат, которая движется вместе с сегментом.

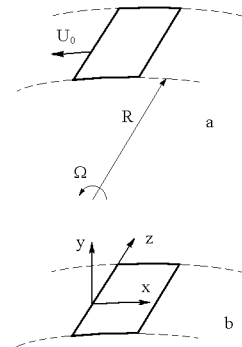


Рис. 3. Расположение системы координат

Начало системы координат находится на ведущей кромке сегмента. Ось x направлена вдоль сегмента (тангенциальная координата), оси y и z являются нормальной и трансверсальной координатами соответственно (рис. 3, b). В случае, когда радиус кривизны R значительно превышает толщину пограничного слоя δ ,

$$R \gg \delta, \quad (1)$$

систему координат можно считать ортогональной в пристеночной области [13]. Принимая во внимание неравенство (1), изменениями радиуса кривизны в этой области пренебрегаем. В принятой системе координат систему уравнений Навье-Стокса можно представить в следующей форме:

$$(\vec{v} \cdot \nabla)u + uvk - 2U_0kv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \quad (2)$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla)v - u^2k + 2U_0ku = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \quad (3)$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla)w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (5)$$

где u, v, w – компоненты вектора скорости вдоль осей x, y, z соответственно; p – давление; ν – кинематический коэффициент вязкости; $k = 1/R$, Δ – оператор Лапласа. Отметим, что, следуя работе

[16], только наиболее существенные члены, учитывающие влияние кривизны, сохранены в уравнениях.

Для решения системы уравнений (2)–(5) были использованы следующие граничные условия:

условие прилипания на твердой поверхности

$$u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad (6)$$

условие затухания возмущений вдали от поверхности

$$u, v, w \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Решение системы уравнений (2)–(5) было представлено как сумма основного и возмущенного решений:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(x, y) \\ 0 \\ 0 \\ P(x, y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'(x, y, z) \\ v'(x, y, z) \\ w'(x, y, z) \\ p'(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где u', v', w' – компоненты возмущенной скорости. Учитывая неравенство (1), для больших чисел Рейнольдса течение в пограничном слое может рассматриваться как квазипараллельное, и в качестве профиля скорости основного течения $\tilde{U}(y)$ можно принять профиль Блазиуса. Это предположение основано на результатах Гертлера, который показал, что малые вариации формы профиля не влияют существенно на результаты, если толщина потери импульса θ одна и та же. Таким же образом P и p' представляют среднее и возмущенное давление.

Отметим, что в экспериментах при обтекании вогнутой поверхности в стационарном пограничном слое, как правило, регистрируют продольные вихри, амплитуда которых растет вниз по потоку [5, 32]. В связи с этим, возмущения рассматривались в виде вихрей, амплитуда которых растет вдоль координаты x :

$$\begin{aligned} u' &= \hat{u}(\eta) \cos(\alpha z) \exp(\int \beta dx), \\ v' &= \hat{v}(\eta) \cos(\alpha z) \exp(\int \beta dx), \\ w' &= \hat{w}(\eta) \sin(\alpha z) \exp(\int \beta dx), \\ p' &= \hat{p}(\eta) \cos(\alpha z) \exp(\int \beta dx). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\eta = y/\theta$; θ – толщина потери импульса; $\theta = 0.0664\sqrt{\nu x/U_0}$, α – волновое число; β

– инкремент нарастания возмущений; $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}$ – амплитуды возмущений. Отметим, что оси вихрей являются в данном случае параллельными оси x .

После замены переменных (x, y, z) на координаты пограничного слоя (x, η, z) в системе уравнений (2) – (5) и подстановки в нее соотношений (8)–(9) получим уравнения для амплитуд возмущений. При этом необходимо учитывать, что основное течение $U(x, y), P(x, y)$ также является решением системы (2) – (5).

Введем безразмерные величины: $\tilde{U} = U/U_0$, $\tilde{u} = \hat{u}/U_0$, $\tilde{v} = \hat{v}/U_0$, $\tilde{w} = \hat{w}/U_0$, $\tilde{p} = \hat{p}/\rho U_0^2$, $B = \beta\theta$, $A = \alpha\theta$, $K = k\theta$, $Re = U_0\theta/\nu$, где скорость U_0 и толщина потери импульса θ были выбраны в качестве характерных параметров задачи. При использовании обычного метода линеаризации членами уравнений, содержащими квадратичные члены, пренебрегалось. Следует отметить, что строгое обоснование метода линеаризации применительно к задачам устойчивости ряда стационарных течений было сделано Юдовичем [37]. После ряда преобразований была получена система уравнений для амплитуд возмущений, которая для случая $\beta = \text{const}$ может быть представлена в следующем виде (здесь и ниже символ \sim опущен):

$$Lu - Re_\theta \frac{dU}{d\eta} - Re_\theta BP + Re_\theta K v(U - 2) = 0, \quad (10)$$

$$Lv + 2(U - 1)Re_\theta K u - Re_\theta \frac{dP}{d\eta} = 0, \quad (11)$$

$$Lw + Re_\theta AP = 0, \quad (12)$$

$$Bu + \frac{dv}{d\eta} + Aw = 0, \quad (13)$$

где оператор

$$L = \frac{d^2}{d\eta^2} - (A^2 + Re_\theta UB).$$

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами является однородной. Граничные условия в соответствии с условиями (6), (7) имеют вид

$$u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0, \quad (14)$$

$$u, v, w \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Решение однородной системы уравнений (10)–(13) с однородными граничными условиями (14), (15) зависит от трех параметров A, B, K . Задавая два из них, третий параметр может рассматриваться в качестве собственного числа задачи [22]. В работах [18, 27] показано, что амплитуда возмущений

быстро затухает с ростом η . Таким образом, граничное условие (15) может быть представлено в виде

$$u = v = w = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \theta_0. \quad (16)$$

Конечно-разностный метод использован для решения задачи [7]. Область интегрирования разделена на M равных частей с шагом $h = \eta_0 / (M - 1)$. Производные аппроксимировались центральными разностями второго порядка точности по h [19]. Получена система однородных алгебраических уравнений, которая для точки m может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} L_m u_m + b_3^m v_m + b_4^m p_m &= 0, \\ L_m v_m + b_6^m u_m + b_7^m w_m + \\ &+ C_1(p_m - p_{m-1}) = 0, \\ L_m w_m + b_7^m v_m + b_{10}^m p_m &= 0, \\ b_{11}^m u_m + C_2(v_{m+1} - v_{m-1}) + \\ &b_{12}^m v_m + b_{13}^m w_m = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где введен следующий оператор:

$$L_m f_m = Q_1^m f_{m+1} + Q_3^m f_m + Q_2^m f_{m-1}.$$

Здесь коэффициенты Q_i^m , b_i^m зависят от $\text{Re}\theta$, U_0 , h , m , K^* (символ $*$ обозначает параметр, связанный с конечно-разностной задачей); C_1 , C_2 являются постоянными величинами. Кроме того, имеем следующие условия:

$$\begin{aligned} u_0 = v_0 = w_0 &= 0, \\ u_M = v_M = w_M &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

вытекающие из граничных условий (14) и (16).

Таким образом, задача свелась к решению системы уравнений (17) с граничными условиями (18). Нетривиальное решение этой системы существует, если детерминант матрицы ее коэффициентов равен нулю [14]. Дополнительные граничные условия, которые необходимы для того, чтобы задача была замкнутой, получены из условия несжимаемости

$$v_1 = 0.25v_2, \quad (19)$$

$$v_{M-1} = 0. \quad (20)$$

Решение системы уравнений (17) с условиями (18)–(20) зависит от параметров A^* , B^* , K^* . Задавая два из них, третий может рассматриваться

как собственное число задачи. Наибольший интерес представляет минимальное собственное число. Используя теорему о наименьшем собственном числе, в работе [7] показано, что минимальное собственное число конечно-разностной задачи λ_1^M приближается к собственному числу оригинальной задачи, сформулированной ранее, когда $M \rightarrow \infty$. Ошибка в определении собственного числа приближается к нулю, как h^2 , т.е.

$$|\lambda_1 - \lambda_1^M| \leq \text{const} \cdot h^2.$$

Теперь остановимся на форме профиля основного потока. Гертлер [16] продемонстрировал, что характеристики неустойчивости зависят прежде всего от толщины потери импульса θ и небольшие отклонения в форме профиля скорости не производят заметного влияния на конфигурацию диаграммы устойчивости. Аналогичный вывод сделан в работе [9], в которой изучалась устойчивость течения вдоль вогнутой поверхности методом Галеркина. Автор рассматривал следующий профиль скорости:

$$\begin{aligned} U/U_0 = y & \quad \text{при} \quad 0 \leq y \leq 1, \\ U/U_0 = 1 & \quad \text{при} \quad 1 < y, \end{aligned}$$

и показал, что характеристики неустойчивости являются близкими к результатам Гертлера.

Следует отметить, что пограничный слой на искривленной поверхности мало отличается от пограничного слоя на плоской поверхности, если кривизна поверхности мала [13, 17]. На основе оценки членов уравнений Навье–Стокса, записанных в криволинейной системе координат, можно показать, что все дополнительные члены уравнений, в которые входит радиус кривизны, меньше в δ/R раз членов, которые входят в уравнения Прандтля для пограничного слоя на плоской поверхности. Если радиус кривизны R больше длины рассматриваемого цилиндрического сегмента l , то система уравнений распадается на две: обычные уравнения Прандтля для плоской пластины и уравнения для центробежной силы, которые можно решить после решения уравнений Прандтля. Тогда для профиля скорости основного течения может быть использовано известное решение Блазиуса, учитывая, что наибольшее влияние на характеристики неустойчивости имеет толщина потери импульса. Конкретные величины для $U(\eta)$ были взяты из монографии Шлихтинга [28].

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Рассчитанная диаграмма устойчивости представлена на рис. 4. По оси абсцисс отложено волновое число, нормированное на толщину потери импульса θ , по оси ординат – число Гертлера

$$Gr = \frac{U_0 \theta}{\nu} \sqrt{\frac{\theta}{R}}$$

Сплошные кривые соответствуют разным значениям величины $\beta\theta Re_\theta$, которая характеризует инкремент нарастания возмущений (течение является неустойчивым выше нейтральной кривой $\beta\theta Re_\theta = 0$). Штриховые кривые (короткий штрих) с отрицательными значениями $\beta\theta Re_\theta$ (в данном случае $-0.05, -0.1, -0.2$) соответствуют затухающим возмущениям.

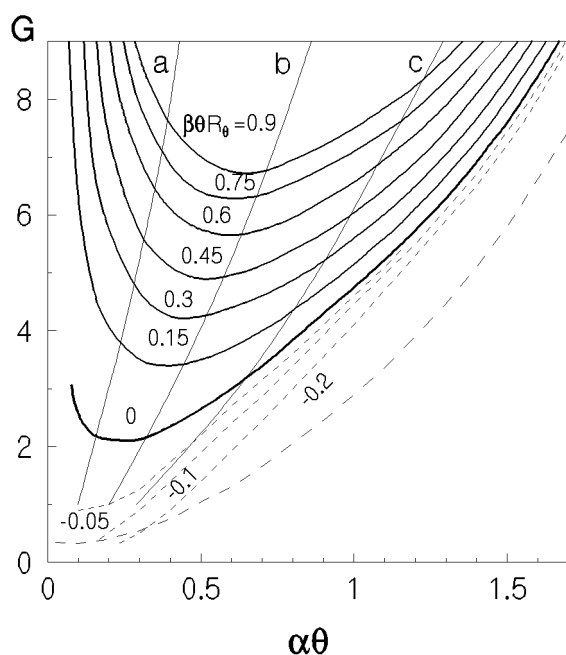


Рис. 4. Диаграмма устойчивости

Нейтральная кривая, найденная Смитом [27] для случая обтекания вогнутой поверхности, представлена штриховой кривой (длинный штрих). Видно, что критическое число Гертлера Gr_{cr} , полученное для случая движения сегмента цилиндрической поверхности, составляет 2.1, в то время как $Gr_{cr} = 0.33$ для обтекания вогнутой поверхности. Таким образом, течение вблизи выпуклой движущейся поверхности является более устойчивым, чем течение над вогнутой поверхностью.

Кривые *a*, *b*, *c* на рис. 4 характеризуют развитие возмущений с заданной длиной волны при возрастании числа Гертлера. Анализ проведен для трех длин волн. Волновые числа при этом были равны: $\alpha\theta = 0.1$ (кривая *a*), $\alpha\theta = 0.1$ (кривая *b*), $\alpha\theta = 0.1$ (кривая *c*) при $Gr = 1$. Точки на кривых *a*, *b*, *c*, которые лежат выше нейтральной кривой ($\beta\theta Re_\theta = 0$), отвечают нарастающим возмущениям, а точки ниже ее – затухающим. Видно, что амплитуда возмущения, связанного с кривой *c*, сильно затухает вниз по потоку. Когда число Гертлера равно приблизительно 3 (это зона пересечения кривой *c* с нейтральной кривой), амплитуда возмущения уже заметно уменьшилась, и она начинает нарастать только с этого места. Затухание возмущения *b* является заметно меньшим и его нарастание начинается, когда число Гертлера Gr несколько превышает его критическое значение, т.е. $Gr > 2.1$. Отметим, что кривая *b* расположена в области, для которой характерен наибольший рост амплитуды возмущений. Видно, что затухание возмущения *a* еще меньше, чем затухание возмущения *b*, но и его нарастание существенно меньше, чем возмущения *b*.

Вышеприведенные результаты помогают найти ответ на вопрос: какие возмущения могут встретиться в реальной ситуации? Очевидно, если в потоке имеются энергичные возмущения, то переход к турбулентности происходит практически сразу за точкой потери устойчивости, т.е. когда число Гертлера становится большим, чем критическое значение. Экспериментальные работы на вогнутой поверхности показывают, что зона перехода является достаточно большой, когда степень турбулентности потока меньше, чем 0.1%. Рассмотрим два случая. Сначала рассмотрим возмущения, которые существуют во всем потоке, т.е. и вне пограничного слоя. Они имеют широкий спектр длин волн и могут находиться в любой области пограничного слоя. Очевидно, что возмущения с максимальным инкрементом нарастания будут обнаруживаться в экспериментах. Если нанести точки, соответствующие экспериментально зарегистрированным возмущениям, на диаграмму неустойчивости, то можно ожидать, что эти точки будут располагаться несколько левее кривой *b*. Теперь рассмотрим случай, когда возмущения возникают вблизи ребра ведущей кромки поверхности. Их спектр длин волн является также достаточно широким, но в процессе своего развития возмущения сначала проходят устойчивую зону пограничного слоя, где происходит их затухание. Из диаграммы неустойчивости видно, что

возмущения с большими волновыми числами затухают значительно быстрее, чем возмущения с малыми волновыми числами. Когда возмущения достигают области неустойчивости, их спектр уже изменен, причем возмущения с большими длинами волн являются доминирующими. Поэтому можно ожидать, что длинноволновые возмущения будут преобладать во всей зоне неустойчивости и наблюдаться в экспериментах. Область на диаграмме неустойчивости, которая соответствует этим возмущениям, должна находиться вблизи (немного правее) кривой *a*. Область слева от кривой *a* отвечает возмущениям, чей инкремент нарастания меньше, поэтому они будут наблюдаться редко.

дельных случаях при изучении обтекания вогнутой поверхности [12, 27]. Расчет же профилей давления, как правило, не производился. В экспериментах обычно регистрируется только продольная компонента возмущенной скорости [31, 34]. Экспериментальная информация о других компонентах практически отсутствует. В связи с этим выполнены систематические расчеты амплитудных функций возмущений скорости и давления в зависимости от параметров основного течения в пограничном слое на выпуклой движущейся поверхности.

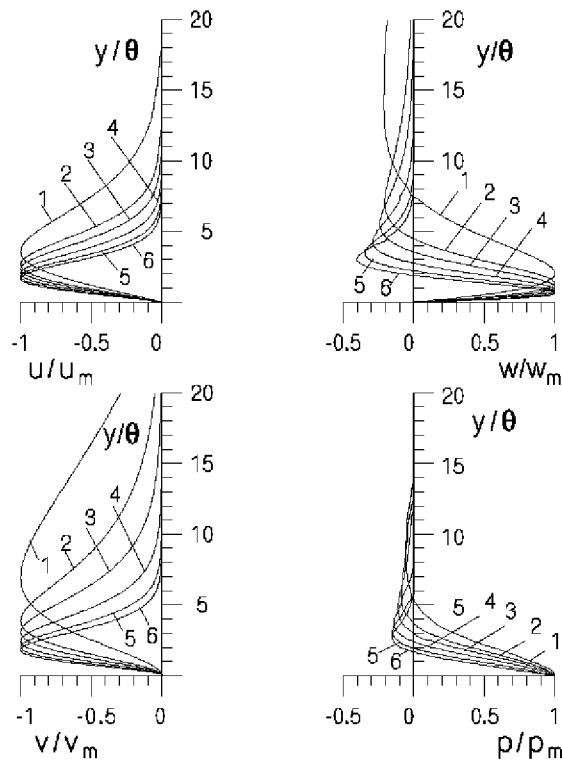


Рис. 5. Амплитудные функции:
 кривая 1 соответствует $\alpha\theta = 0.1$, кривая 2 – $\alpha\theta = 0.23$, кривая 3 – $\alpha\theta = 0.5$, кривая 4 – $\alpha\theta = 0.7$,
 кривая 5 – $\alpha\theta = 0.9$, кривая 6 – $\alpha\theta = 1.1$

Известно, что определение характеристик пульсаций скорости в области перехода в пограничном слое имеет важное практическое значение при расчете процессов теплопереноса в течениях около вогнутой поверхности [15, 29, 34]. Знание числа Гертлера Gr и длины волны λ возмущения является недостаточным, чтобы получить полную информацию о характеристиках пульсаций.

Отметим, что профили компонент скорости возмущений рассчитывались только в некоторых от-

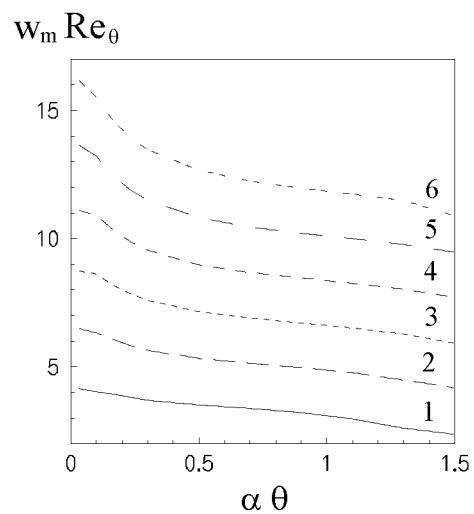


Рис. 6. Зависимость w_m от волнового числа

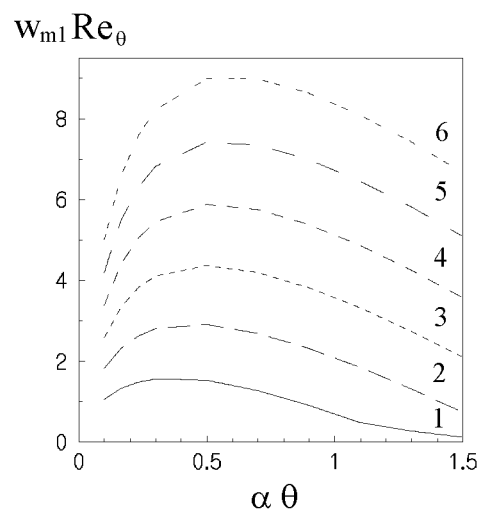


Рис. 7. Зависимость w_{m1} от волнового числа

Типичные кривые амплитудных функций компонент возмущенной скорости u, v, w и давления p , нормализованные по соответствующим величинам u_m, v_m, w_m, p_m , где $u_m = |u|_{max}$, $v_m = |v|_{max}$, $w_m = |w|_{max}$, $p_m = |p|_{max}$ для числа Гертлера $Gr = \beta$, представлены на рис. 5. Эдесь индекс "max" обозначает максимальные значения амплитудных функций.

Найдено, что каждая нормализованная амплитудная функция зависит только от числа Гертлера и длины волны возмущений.

Как можно видеть из рис. 5, каждый график амплитудной функции горизонтальной компоненты возмущенной скорости u имеет одну экстремальную точку. Аналогичные экстремальные точки имеет каждый график амплитудной функции вертикальной компоненты v .

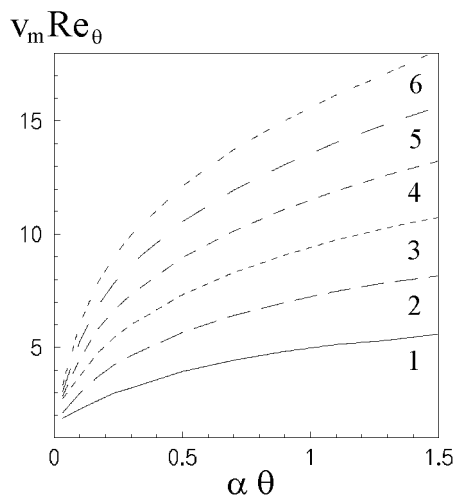


Рис. 8. Зависимость v_m от волнового числа

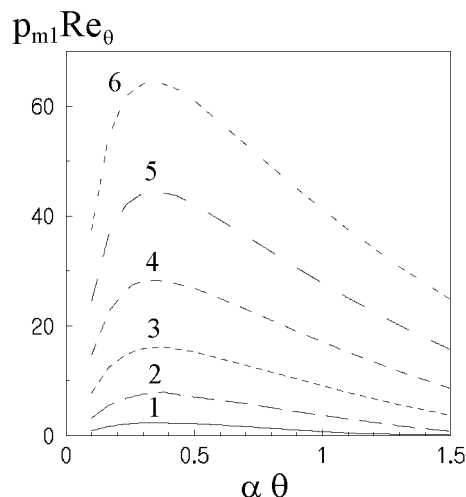


Рис. 10. Зависимость p_{m1} от волнового числа

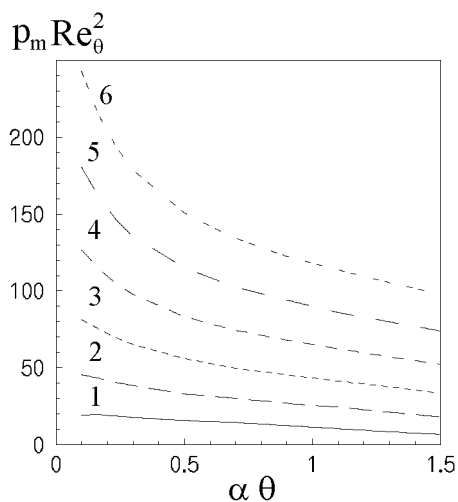


Рис. 9. Зависимость p_m от волнового числа

Как и следовало ожидать, возмущения с меньшими длинами волн располагаются ближе к поверхности по сравнению с возмущениями с большими длинами волн.

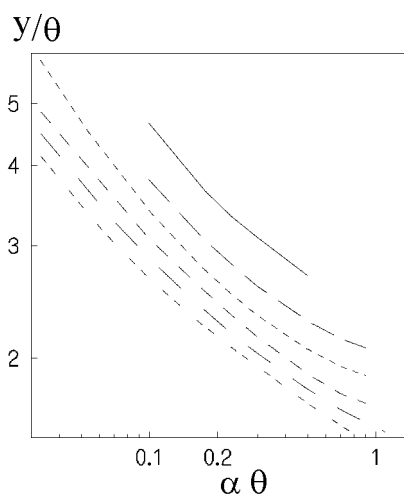


Рис. 11. Зависимость положения u_m от волнового числа

В отличие от них каждый график амплитудной функции трансверсальной компоненты возму-

щенной скорости w имеет две экстремальные точки: первая (w_m) является максимумом функции, а вторая, которую обозначим как w_{m1} , – минимумом (ее значение отрицательно). Аналогичная ситуация имеет место с графиками амплитудных функций давления p : первая точка (p_m) относится к максимальному значению и вторая точка (p_{m1}) – соответственно к минимальному значению.

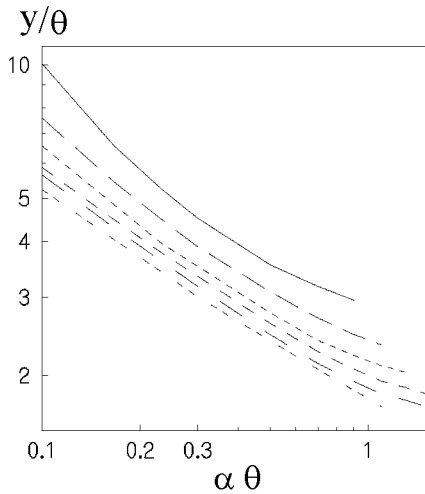


Рис. 12. Зависимость положения w_m от волнового числа

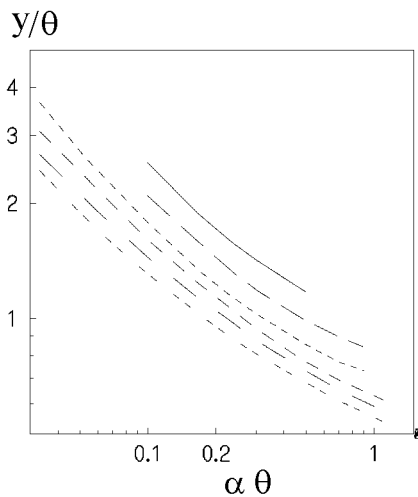


Рис. 13. Зависимость положения w_{m1} от волнового числа

Анализ показал, что величины $v_m Re_\theta$, $w_m Re_\theta$, $w_{m1} Re_\theta$, $p_m Re_\theta^2$, $p_{m1} Re_\theta^2$ также определяются числом Гертлера Gr и безразмерным волновым числом $\alpha\theta$.

Результаты вычислений этих величин в зависимости от волнового числа $\alpha\theta$ для разных значений чисел Гертлера Gr представлены на рис. 6 – 10. Кривая 1 соответствует числу Гертлера $Gr = 3$, кривая 2 – $Gr = 4.5$, кривая 3 – $Gr = 6$, кривая 4 – $Gr = 7.5$, кривая 5 – $Gr = 9$, кривая 6 – $Gr = 10.5$.

Представленные результаты позволяют проводить оценку экстремальных значений амплитудных функций u, v, w, p , если только одна экстремальная величина известна (например, измерена экспериментальным путем) при заданных параметрах потока и конкретного значения волнового числа.

Очевидно, что для построения графиков амплитудных функций помимо информации о значениях экстремальных точек необходимо также знать расположение этих точек. Следует отметить, что графики функций w и p кроме экстремальных имеют также другие характерные точки – точки пе-

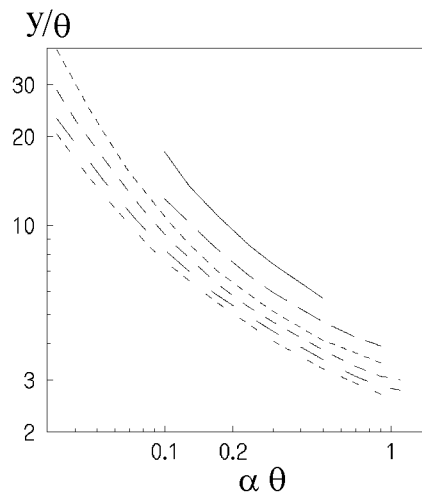


Рис. 14. Зависимость положения w_{m1} от волнового числа

ресечения каждого графика с вертикальной осью (w_s и p_s , соответственно). Положения характерных точек графиков амплитудных функций для разных значений числа Gr в зависимости от безразмерного волнового числа $\alpha\theta$ представлены на рис. 11 – 15.

Типы кривых линий те же, что и на рис. 6. Приведенные графики вместе с результатами, представленными на рис. 6 – 10, дают возможность получить необходимую информацию для приближенного построения графиков амплитудных функций для заданного волнового числа $\alpha\theta$ при использовании данных только об одной компоненте воз-

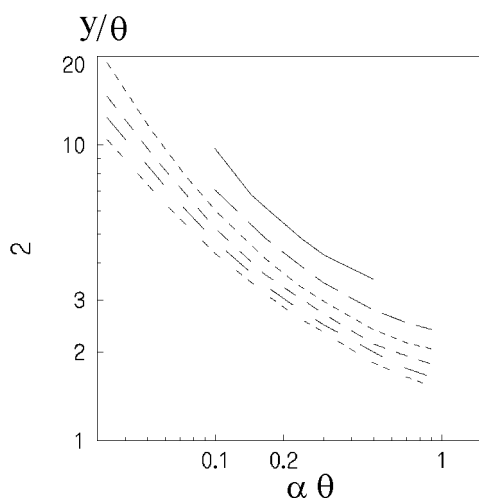


Рис. 15. Зависимость положения w_s от волнового числа

мущенной скорости и параметров потока.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Информация о вихревой структуре течения в пристеночной области необходима при проектировании и создании технических устройств, использование которых позволяет интенсифицировать процессы тепло-массообмена в потоках газа и жидкости, для совершенствования методов расчета этих процессов, для разработки технических предложений, реализация которых позволяет уменьшить сопротивление трения и др. Эта информация является основой для создания эффективных методов управления потоками.

Известно [6], что турбулентные потоки в пристеночной области характеризуются существованием двойной структуры вихрей. Вблизи стенки, т.е. в вязком подслое и в буферной зоне, существуют продольные вихри малых масштабов (вихри Клайна). Выше их имеется область, которая характеризуется наличием вихревых структур больших масштабов (когерентные структуры). Развитие вихревых структур в потоке, их взаимодействие между собой является главным фактором, определяющим характеристики течения вблизи стенки.

Одной из причин, которая обуславливает возникновение и формирование продольных вихрей, является центробежная сила, связанная с существованием кривизны линий тока. В работе [36] показано, что масштабы длины продольных ви-

хрей (вихрей Гертлера) на протяжении своего развития вплоть до обрушения хорошо сопоставимы с параметрами переходного пограничного слоя на плоской пластине [20, 25], если учитывать также положения зон генерации вторичной неустойчивости. На это было также указано в работе [30].

Информация о характеристиках продольных вихрей, которые находятся на линейной стадии развития, служит основой для понимания процессов перехода к турбулентному режиму, а также для построения нелинейных моделей развивающихся вихрей Гертлера. Следует отметить, что линейная стадия развития вихрей на вогнутой поверхности изучена достаточно полно. В данной работе рассматриваются новые аспекты проблемы. Показано, что вихри Гертлера возникают на выпуклой поверхности, которая движется вдоль искривленной траектории, в отличие от случая, когда неподвижная криволинейная поверхность обтекается потоком жидкости и вихри возникают на вогнутой стороне. Исследована линейная устойчивость такого течения, построена диаграмма устойчивости. Найдено, что критическое число Гертлера значительно превышает аналогичное критическое число для случая обтекания потоком неподвижной вогнутой поверхности. Более того, диапазон волновых чисел, которые характеризуют неустойчивость течения, является более узким, по сравнению со случаем обтекания поверхности. Это позволяет сделать вывод о том, что течение около движущейся криволинейной поверхности, которая движется вдоль криволинейной траектории, является более устойчивым по сравнению с течением около неподвижной искривленной поверхности, которая обтекается потоком жидкости.

В работе проведены систематические расчеты собственных функций задачи для разных значений чисел Гертлера Gr и безразмерного волнового числа $\alpha\theta$. Построены соответствующие графики этих функций, найдены положения и значения характерных точек каждой функции (максимальные и минимальные значения, точки пересечения с вертикальной осью). Эти данные позволяют приблизительно определять все компоненты возмущенной скорости и давления, если известна информация только об одной компоненте, например, о максимальном значении продольной компоненты возмущенной скорости, которая может быть изменена в экспериментах.

Следует также отметить, что область применения полученных результатов не ограничивается случаем движения по круговой траектории. Известно, что продольные вихри возникают также

при обтекании неподвижной вогнутой поверхности при наличии продольного градиента давления. Тогда следует ожидать возникновения таких вихрей при движении не только цилиндрического сектора, но и тел разной формы вплоть до плоской поверхности (при условии безотрывного обтекания с внешней стороны). В этом случае линии тока будут искривлены и центробежная сила будет также обуславливать возникновение продольных вихрей.

Как было указано ранее, центробежные силы могут возникать и при активном плавании морских млекопитающих, в частности дельфинов, за счет изгибных движений кормовой части тела. Исходя из полученных результатов, становится ясно, что продольные вихри возникают на выпуклой поверхности кормовой части. При изгибных движениях кожа дельфина со стороны вогнутой поверхности сжимается, и ее управляющие функции должны ослабевать. Наоборот, со стороны выпуклой части кожа растягивается, ее внутренняя структура проявляется резче и, следовательно, можно ожидать усиления возможности воздействия ее на поток, в частности на формирующиеся продольные вихри, которые и возникают именно вблизи выпуклой движущейся поверхности.

1. Яблоков А.В., Белькович В.М., Борисов В.И. Киты и дельфины. – М.: Наука, 1972. – 472 с.
2. Першин С.В. Самонастройка демпфирования кожи и снижение гидродинамического сопротивления при активном плавании китообразных // Бионика. – 1976. – вып. 10. – С. 33-40.
3. Aihara Y., Koyama H. Secondary instability of Goertler vortices: formation of periodic three-dimensional coherent structure // Trans. Japan Soc. Aeronaut. and Space Sciences. – 1981. – 24, No.64. – P. 78-94.
4. Aider J.L., Wesfreid J.E. Characterization of longitudinal Goertler vortices in a curved channel using ultrasonic Doppler velocimetry and visualizations // J.Pfys.III France. – 1996. – 6. – P. 893-906.
5. Бобошко В.А., Шмедро Ю.А. Продольные вихри в пограничном слое на вогнутой поверхности // Труды Николаевского кораблестроительного ин-та. – 1979. – 152. – С. 57-64.
6. Cantwell B.J. Organized motion in turbulent flow // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1981. – 13. – P. 457-515.
7. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 503 с.
8. Day H.P., Herber T., Saric W.S. Comparing local and marching analyses of Goertler instability. // AIAA J. – 1990. – 28 No.6. – P. 1010-1015.
9. Прима Р. Применение метода Галеркина к задачам устойчивости в гидромеханике // Механика. Сб. переводов и обзоров иностр. период. лит. – 1956. – No.3. – С. 53-61.
10. Floryan J.M., Saric W.S. Stability of Goertler vortices in boundary layers // AIAA J. – 1982. – 20. – P. 316-324.
11. Hall P. Taylor-Goertler vortices in fully developed or boundary-layer flows: Linear theory // J. Fluid Mech. – 1982. – 124. – P. 475-494.
12. Herbert T. Higher eigenstates of Goertler vortices // In "Recent developments in theoretical and experimental mechanics". – New York. – 1979. – P. 322-330.
13. Гайс Т. Подобные пограничные слои на телах вращения // В кн. Проблема пограничного слоя и теплопередача. – М.-Л.: Гостехиздат. – 1960. – С. 248-257.
14. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971. – 271 с.
15. Гимпель Р.М. Исследование влияния вихрей Гертлера на пограничный слой искривленной пластины // Труды Николаевского кораблестроительного института. – 1977. – 126. – С. 95-97.
16. Goertler H. Uber ein dreidimensionale Instabilitat laminarer Grenzschichten an konkaven Wanden // Ges.d.Wiss. Gottingen, Nachr. a.d. Math. – 1940. – 2, No.1. – P. 1-26.
17. Годстейн Г. Классическая механика. – М.: Гостехтеориздат, 1957. – 408 с.
18. Kahawita R.A., Meroney R.N. Longitudinal vortex instabilities in laminar boundary layer over curved heated surface // Phys. Fluids. – 1974. – 17, No. 9. – P. 1661-1666.
19. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
20. Komoda H. Nonlinear development of disturbances in a laminar boundary layer // Ph. Fluids (Suppl.). – 1967. – 10, No.2, pt.2. – P. 87-94.
21. Lezius D.K., Johnson J.P. Roll-cell instabilities in rotating laminar and turbulent channel flows // J. Fluid Mech. – 1976. – 77, No.1. – P. 153-175.
22. Линь Цзя-цзяо Теория гидродинамической устойчивости. – М.: Иностран. литер., 1958. – 194 р.
23. Matsson O.J.E., Alfredsson P.H. Curvature- and rotation-induced instabilities in channel flow // J. Fluid Mech. – 1990. – 210. – P. 537-583.
24. Mutabazi I., Normand C., Wesfreid J.E. Gap size effects on centrifugally and rotationally driven instabilities // Phys. Fluids. – 1990. – A4. – P. 1199.
25. Nishioka M., Asai M. Evolution of Tollmien-Schlichting waves into wall turbulence // In "Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids", edited by T. Tatsumi. – Elsevier, Amsterdam. – 1984. – P. 87-92.
26. Petitjeans Ph., Wesfreid J.E. Spatial evolution of Goertler instability in a curved duct of high curvature // AIAA J. – 1996. – 34, No. 9. – P. 1793-1800.
27. Smith A.M.O. On the growth of Taylor-Goertler vortices along highly concave walls. // Quart. of Applied Math. – 1955. – 13, No.3. – P. 233-262.
28. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. – 711 с.
29. Шукин В.К. Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил. – М.: Машиностроение, 1970. – 331 с.
30. Swearingen J.D., Blackwelder R.F. The growth and breakdown of streamwise vortices in the presence of a wall // J. Fluid Mech. – 1987. – 182. – P. 255-290.
31. Tani I. Production of Longitudinal Vortices in the Boundary Layer a Concave Wall // J. Geophysical Res. – 1962. – 67, No. 7. – P. 3072-3080.

32. *Tani I., Aihara Y.* Goertler vortices and boundary layer transition // ZAMP.– 1969.– **20**, No.5.– P. 609-618.
33. *Тригтон Д.Дж., Дэвис Р.А.* Неустойчивости в геофизической гидродинамике // В кн. "Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности".– 1981.– **45**.– P. 271-316.
34. *Winoto S.H., Duraõ D.F.G., Grane R.I.* Measurements within Goertler vortices // J. Fluids Eng. Trans. ASME.– 1979.– **101**, No. 4.– P. 517-520.
35. *Wortmann F.X.* Experimentelle Untersuchungen laminarer grenzsichten bei instabiler Schichtung // in "Appl. Mech. Proc. 11-th Inter. Congr. Appl. Mech., Munich, 1964.– Berlin: Springer.– 1966.– P. 815-825.
36. *Yu X., Liu J.T.C.* On the mechanism of sinuous and varicose modes in three-dimensional viscous secondary instability of nonlinear Goertler rolls // Phys. Fluids.– 1994.– **6(4)**.– P. 736-750.
37. *Юдович В.И.* Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР.– 1965.– **161**, No. 5.– С. 1037-1040.
38. *Zebib A., Bottaro A.* Goertler vortices with system rotation: Linear theory // Phys. Fluids.– 1993.– **A5** No.5.– P. 1206-1210.