

УДК 519.816

**В. В. Циганок**

Інститут проблем реєстрації інформації НАН України  
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

## **Визначення ефективності методів агрегації експертних оцінок при використанні парних порівнянь**

*Запропоновано спосіб визначення ефективності методів агрегації експертних оцінок при використанні парних порівнянь, заснований на моделюванні можливих помилок експертів при парних порівняннях. Ефективність методів агрегації розглянуто в сенсі підвищення ними достовірності результатів. Передбачено застосування генетичного алгоритму для пошуку максимально можливих відхилень у результатах агрегації парних порівнянь.*

**Ключові слова:** парні порівняння, ефективність методів агрегації експертних оцінок, генетичний алгоритм.

У системах підтримки прийняття рішень (СППР) для підвищення достовірності експертного оцінювання альтернатив, часто використовують метод парних порівнянь. Цей широковідомий метод є методом відносних вимірювань, який полягає в послідовному наданні експертіві всіх можливих пар альтернатив, або визначеній підмножини можливих пар, для оцінювання з наступним формуванням матриці парних порівнянь (МПП) на основі даних ним оцінок. Надалі обчислюються агреговані оцінки альтернатив як результати обробки МПП.

На теперішній час розроблено велику кількість методів агрегації експертних оцінок, отриманих при парних порівняннях. Одним із найчастіше застосовуваних є метод власного вектора, розроблений Томасом Сааті [1]. Крім того, для МПП мультиплікативного типу (коли при порівняннях експерт відповідає на запитання: «У скільки разів одна з пари альтернатив переважає іншу?») можливо й застосування спрощених методів агрегації, наприклад, знаходження середнього геометричного елементів МПП по кожному рядку цієї матриці, метод ступеню, нормалізації стовпців матриці та інші. Такі спрощені методи зазвичай дають прийнятні результати агрегації при високих ступенях внутрішньої узгодженості МПП [2]. Мають місце також серія методів послідовної обробки МПП без зворотного зв'язку з експертом («Лінія», «Трикутник», «Квадрат») [3, 4], а також метод комбінаторної обробки МПП [5].

© В. В. Циганок

У даній статті представлено механізм оцінювання вищезгаданих методів агрегації експертних оцінок, і можливо, не згаданих тут, на предмет виконання ними свого основного призначення — підвищення достовірності, а, отже, і точності експертного оцінювання. Таким чином, пропонується визначити деякий показник ефективності методів агрегації, який характеризує потенційну здатність методу утримувати свої результати в деяких межах.

### Сутність методу

Ідея визначення показника ефективності методів агрегації полягає в наступному. Задаються довільні позитивні значення ваг альтернатив  $w_i$ ,  $i = (1, n)$ . Число альтернатив  $n$  при експертному оцінюванні не повинне перевищувати  $7 \pm 2$  [6].

Проводиться нормування цих ваг до одиниці:  $w_i = w_i / \sum_{j=1}^n w_j$ . Тобто, тепер

$\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . Надалі ці ваги будемо вважати деяким еталоном у рамках даного етапу

дослідження. За цими еталономними вагами формально будується повністю (ідеально) узгоджена МПП (consistency matrix)  $A$ , виходячи зі співвідношення  $a_{ij} = w_i / w_j$ , де  $a_{ij}$  — елемент матриці  $A$ . Далі проводиться «зашумлення» матриці  $A$  таким чином, що кожен елемент матриці  $A$ , крім діагональних, може бути змінений за наступним законом  $a'_{ij} = a_{ij} \pm a_{ij} \cdot \delta / 100\%$ , де  $\delta > 0$  — наперед задана величина, що характеризує максимальне відносне відхилення результатів парних порівнянь експерта (елементів матриці  $A$ ) у відсотках від еталономних значень. Тим самим здійснюється моделювання наявності помилок при експертному оцінюванні. Величина  $\delta$ , у цьому випадку, представляє собою відносну помилку експерта при проведенні парних порівнянь. Далі «зашумлена» МПП, позначимо її  $A'$ , піддається обробці одним із методів агрегації з метою одержання узагальнених ваг альтернатив  $w'_i$ . Якість (ефективність) методу агрегації експертних оцінок пропонується обчислювати як максимально можливе відносне відхилення отриманої в результаті розрахунку ваги альтернативи від еталономної ваги цієї ж альтернативи

$\Delta = \max_i \left| \frac{w'_i - w_i}{w_i} \right| \cdot 100\%$ . Зауважимо, що отримані таким чином значення показни-

ка ефективності є детермінованими, і тому гарантованими, значеннями, а не стохастичні, які можливо було б отримати при застосуванні методів математичної статистики.

Розумно припустити, що обчислені значення показника  $\Delta$  будуть залежати як від заданої  $\delta$ , так і від відносних значень самих заданих еталонів. Тому визначені значення показника будуть представлені у вигляді графіків залежності  $\Delta(\delta)$  для кожного з варіантів характерних значень еталономних ваг. На думку автора, залежність  $\Delta(\delta)$  має сенс визначати для кожного з досліджуваних методів на інтервалі  $\delta \in ]0; 100[$ , виходячи з логічного припущення, що відносна помилка оцінювання при парних порівняннях експерта не перевищує 100%. Хоча, безсумнівно, що функція  $\Delta(\delta)$  визначена в більш широкому діапазоні —  $\delta \in [0; \infty[$ .

## Реалізація

Знаходження максимально можливого відносного відхилення  $\Delta$  для кожного  $\delta$  пропонується проводити із застосуванням цілеспрямованих переборів — еволюційних методів. Цей вибір обумовлений тим що, по суті, ми маємо справу із знаходженням максимуму функції багатьох змінних  $f(a'_{ij})$ ,  $i, j = (1, n)$ , аргументами якої є елементи МПП  $A'$ , а прийнятних аналітичних методів для рішення такого плану задач не існує. Значення  $\Delta(\delta)$  для конкретного методу агрегації залежить від значень вихідних еталонних ваг альтернатив  $w_i$ ,  $i = (1, n)$ . Це було підтверджено в процесі експерименту, проведеного за допомогою спеціально створеного програмного модуля.

Вектор вхідних ваг модуль одержує із вхідного файлу, результати розрахунку  $\Delta$  також можуть бути збережені у файлі для наступного аналізу. Керуючий модулем інтерфейс представлений у вигляді діалогового вікна (рис. 1) для введення необхідних вхідних даних і режимів для експерименту.

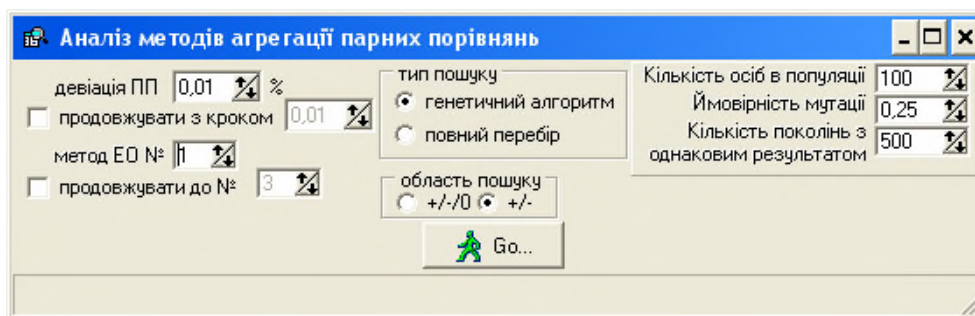


Рис. 1. Інтерфейс експериментального модуля аналізу методів агрегації парних порівнянь

Значення  $\delta$  може бути введене в поле вводу з назвою «девіація ПП» і може автоматично збільшуватися з певним кроком для можливості безперервного проведення серії розрахунків і нагромадження даних.

Модуль передбачає також режим перевірки правильності результатів роботи генетичного алгоритму при заданих вхідних параметрах цього алгоритму. Перевірку можна зробити при невеликих ( $< 6$ ) значеннях  $n$  за допомогою повного перебору варіантів значень аргументів — елементів МПП  $A'$ . При значеннях  $n \geq 6$  такі перевірки не доцільні через потребу значних обчислювальних ресурсів.

Підбір вхідних параметрів генетичного алгоритму (кількість осіб у популяції, ймовірність мутації, кількість поколінь з однаковим результатом) для оптимальної його роботи, проводиться в декілька ітерацій, з використанням, за можливості, повного перебору для перевірки.

Програмний модуль також передбачає вибір одного з двох режимів пошуку максимуму функції: перевірку варіантів відхилення аргументів із можливістю залишати аргумент без зміни (+/-/0) або без такої (+/-). На практиці, численні експерименти показали, що достатньо використовувати більш вузьку область пошуку варіантів, коли всі аргументи змінюються на відносну величину  $\delta$  в позитивну або в негативну сторону (на скріншоті позначення +/-).

Ефективність методів агрегації експертних оцінок у даній роботі розглядається з точки зору підвищення ними точності визначення узагальнених ваг альтернатив. У цьому плані, чим меншою є можлива розрахована помилка  $\Delta$ , тим вища ефективність методу. В ідеалі, хотілося би, щоб для будь-яких ваг альтернатив  $w_i$  і для будь-яких заданих відносних відхилень  $\delta$ , завжди, значення  $\Delta$  було би менше  $\delta$ . У такому випадку метод при агрегації зменшував би відносну помилку парних порівнянь. Але, на практиці, як підтвердило експериментальне дослідження ряду існуючих методів, на жаль, цього не відбувається.

## Експериментальне дослідження

У процесі експерименту були зроблені розрахунки для методів агрегації експертних оцінок, таких як:

- 1) метод сум елементів рядків (Sums by Rows);
- 2) середнє геометричне (Geometric average);
- 3) метод ступеня (Powers method);
- 4) нормалізація елементів стовпців (Columns normalizing);
- 5) метод власного вектора (Eigen vector method) [1];
- 6) метод «Квадрат» («Square» method) [3, 4];
- 7) комбінаторний метод (Combinatorial method) [5].

Назви перших чотирьох, які можна віднести до класу спрощених методів, не є загальнозживаними, тому коротко розкриємо їхню сутність.

*Метод сум елементів рядків* МПП  $A'$  полягає у визначенні ненормованих ваг альтернатив  $w'_i$  згідно з формулою  $w'_i = \sum_{j=1}^n a'_{ij}$ , із подальшим їхнім нормуванням:

$$w_i = w'_i / \sum_{j=1}^n w'_j.$$

У наступному методі агрегації МПП  $A'$  *середнє геометричне* елементів рядків визначається за формулою:  $w'_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a'_{ij}}$ , після чого також проводиться нормування.

*Метод ступеня* полягає в наступному. МПП  $A'$  послідовно підноситься до деякого натурального ступеня  $p = \{1 \dots N\}$ . Цей процес проводиться за допомогою операції множення матриць. Після цього, на кожному  $p$ -му кроці агреговані значення ваг визначаються за формулою:  $w_i = \sum_{j=1}^n a'_{ij} / \sum_{j,k=1}^n a'_{jk}$ . Тобто, сума елементів рядка ділиться на суму елементів всієї матриці. Процес припиняється, коли абсолютне значення різниці обчислених результатів на  $p$ -му та  $(p - 1)$ -му кроці не перевищує величину заданої похибки (в даному експерименті — значення 0,00001). Потреби в подальшому нормуванні результатів у цьому випадку немає.

*Метод нормалізації елементів стовпців* полягає в обчисленні середніх арифметичних значень елементів рядків матриці  $A'$ , у якій спочатку нормалізовані елементи стовпців за формулою:  $a'_{ij} = a'_{ij} / \sum_{i=1}^n a'_{ij}$ .

Для експерименту були використані чотири характерні набори ваг при  $n = 5$  з наступними значеннями:  $\{0,2; 0,3; 4; 5; 0,7\}$ ,  $\{1; 1,732051; 3; 5,196152; 9\}$ ,  $\{1; 9; 1; 9; 1\}$ ,  $\{1; 1; 1; 1; 1\}$ . Ці значення вибиралися, виходячи з наступних міркувань: перший набір — довільні значення, другий набір — рівновіддалені значення в діапазоні значень фундаментальної шкали [1, 7], поділки якої відповідають числам натурального ряду від 1 до 9. Таким чином, для другого набору значення формувалися за законом  $w_{i+1} = w_i \cdot c$ , де  $c$  — константа, для  $n = 5$  і фундаментальної шкали  $c = \sqrt{3}$ . Виходячи із цього, другий набір має вигляд:  $\{1, 1 \cdot \sqrt{3} = 1,732051; \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3, 3 \cdot \sqrt{3} = 5,196152; 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9\}$ . Третій набір — крайні значення поділок фундаментальної шкали, і, четвертий набір — рівні значення.

Параметри генетичного алгоритму в даному експерименті були підібрані наступними: кількість особин у популяції — 200, імовірність мутації — 25 %, кількість поколінь із однаковим результатом — 1500.

Результати експерименту для різних заданих наборів ваг альтернатив  $w$  представлені в графічному вигляді на рис. 2.

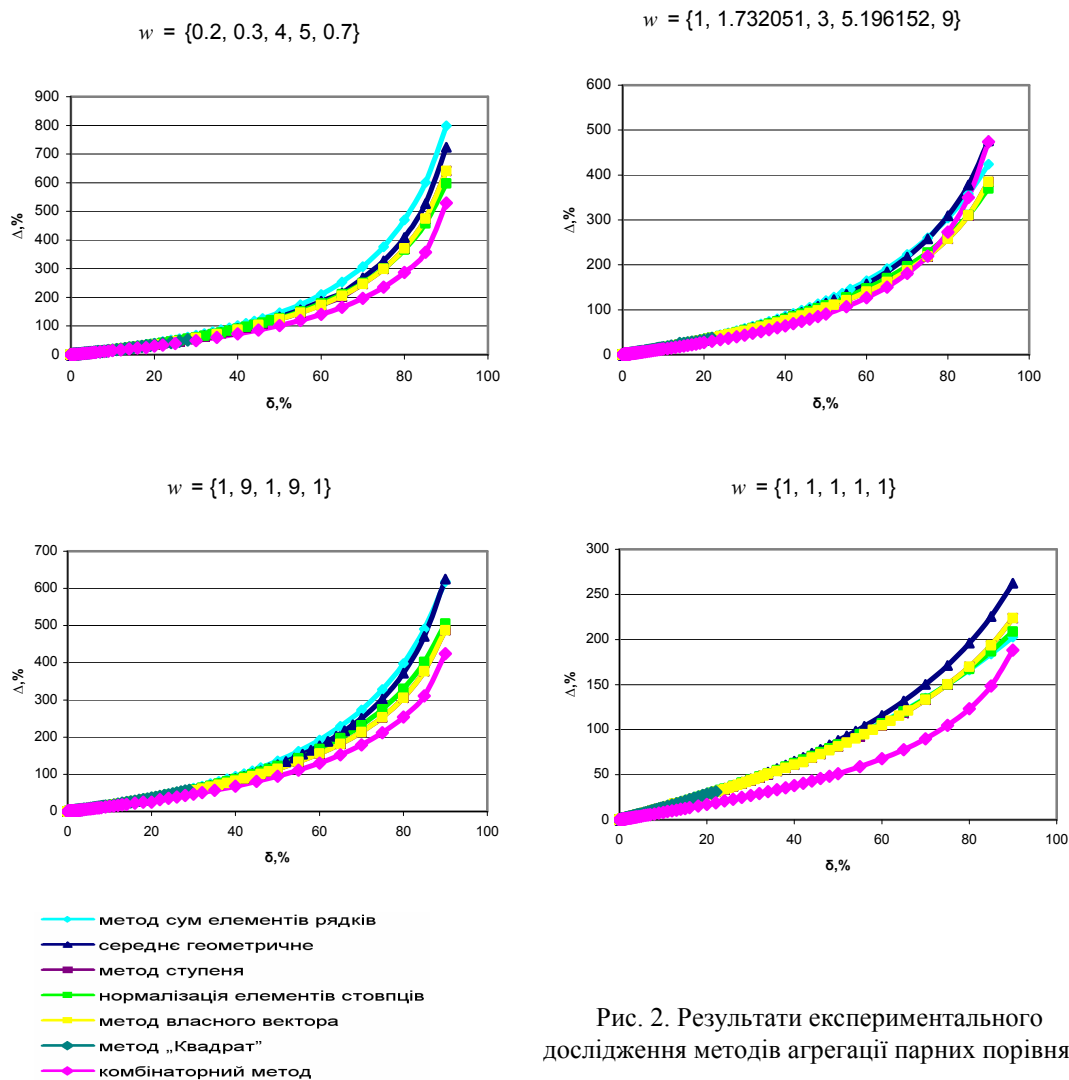


Рис. 2. Результати експериментального дослідження методів агрегації парних порівнянь

Висновки, які можна зробити за результатами експериментального дослідження:

— результати експерименту підтверджують відоме положення, що метод власного вектора переважніше за точністю, ніж знаходження ваг як геометричного середнього по рядках МПП;

— показники методу ступеню в більшості випадків практично співпадають із показниками методу власного вектора при однакових вхідних даних;

— відповідно методу «квадрат», агрегація оцінок МПП має сенс тільки при досягненні деякої обчисленої мінімальної узгодженості, а при  $\delta > 22...30$  % у процесі експерименту вже генеруються МПП, які не відповідають даній умові, тому область визначення функції  $\Delta(\delta)$  для цього методу обмежується справа до цих відповідних значень  $\delta$ ;

— при відносних помилках експертних парних порівнянь менших 75 %, тобто в найбільш імовірній ситуації при експертному оцінюванні, при всіх варіантах значень еталонних ваг (і це було трохи несподіваним для автора) спостерігається значна перевага ефективності методу комбінаторної обробки МПП у порівнянні з іншими методами, які представлені в експерименті;

— тільки один метод із досліджуваних, а саме, комбінаторний метод, і тільки при близьких значеннях заданих еталонних ваг і при відносних помилках парних порівнянь менших 50 %, дозволяє одержати ваги альтернатив із відносною помилкою меншою, ніж вихідна помилка парних порівнянь.

### Загальні висновки

Розкрито підхід до визначення ефективності методів агрегації експертних оцінок при використанні парних порівнянь, заснований на моделюванні можливих помилок експертів при парних порівняннях. На відміну від підходів, що базуються на статистичних методах, він дає можливість гарантовано (а не з деякою ймовірністю) визначати значення показника ефективності того чи іншого методу агрегації. Базуючись на цьому підході, проаналізовано ряд відомих методів агрегації та зроблено висновки про їхню ефективність.

Запропоноване застосування еволюційних методів, а саме, генетичного алгоритму для пошуку максимально можливих відхилень у результатах агрегації парних порівнянь.

Створено програмний експериментальний модуль для визначення показника ефективності методів агрегації результатів парних порівнянь, за допомогою якого планується провести ще ряд досліджень, а саме: проаналізувати динаміку залежності ефективності методів агрегації від розмірності МПП, виявити закономірності поведінки графіків залежності при різних значеннях ваг альтернатив, спробувати визначити напрямки роботи по створенню нових, більш ефективних, методів агрегації.

1. Саати Т. Принятие решений — Метод анализа иерархий / Т. Саати. — М.: Радио и связь, 1993. — 278 с.

2. *Тоценко В.Г.* Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект / В.Г. Тоценко; ИПРИ НАНУ. — К.: Наук. думка, 2002. — 382 с.
3. *Тоценко В.Г.* Генерация алгоритмов парных сравнений для моделирования предпочтений эксперта при поддержке принятия решений. Ч. 1 / В.Г. Тоценко // Электронное моделирование. — 2000. — № 3. — С. 11–24.
4. *Тоценко В.Г.* Генерация алгоритмов парных сравнений для моделирования предпочтений эксперта при поддержке принятия решений. Ч. 2 / В.Г. Тоценко // Электронное моделирование. — 2000. — № 4. — С. 16–24.
5. *Циганок В.В.* Комбинаторный алгоритм парных порівнянь зі зворотним зв'язком з експертом / В.В. Циганок / Реєстрація, зберігання і оброб. даних. — 2000. — Т. 2, № 2. — С. 92–102.
6. *Миллер Г.* Магическое число семь плюс или минус два: о некоторых пределах нашей способности перерабатывать информацию / Г. Миллер. — М.: Инженерная психология. Прогресс, 1964.
7. *Saaty T.L.* Relative Measurement and Its Generalization in Decision Making. Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors. The Analytic Hierarchy/Network Process / T.L. Saaty; Statistics and Operations Research. — 2008. — 102 (2). — P. 251–318.

Надійшла до редакції 01.06.2009