УДК 621.38

М. В. Синьков[1], Є. Г. Станішевський[2]
[1]Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна
[2]Національний технічний університет України «КПІ»
проспект Перемоги, 37, 03056 Київ, Україна

Розрахунок цифрових фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами третьої вимірності

Розроблено методику розрахунку рекурсивного цифрового фільтру 1-го порядку з гіперкомплексними коефіцієнтами третьої вимірності, що реалізує рекурсивний фільтр 3-го порядку з дійсними коефіцієнтами. Визначено умову реалізації цифрового фільтра. На прикладі фільтра низьких частот Батерворта розраховано гіперкомплексні коефіцієнти і показано кращу параметричну чутливість частотної характеристики фільтра з гіперкомплексними коефіцієнтами.

Ключові слова: *цифрові фільтри, гіперкомплексні числові системи, передавальна функція, коефіцієнти передавальної функції.*

Цифрова фільтрація є одним з найбільш могутніх інструментальних засобів цифрової обробки інформації. Підкреслимо, що в реальних системах цифрової обробки змінні та коефіцієнти запам'ятовуються у двійковій формі в регістрах, які мають обмежену кількість розрядів, що може призводити до значних викривлень вихідних даних. Тому існує актуальна задача забезпечення низької чутливості цифрових систем до можливих коливань власних параметрів. У той же час можлива побудова цифрових фільтрів (ЦФ) з гіперкомплексними коефіцієнтами. Найбільш значущі переваги використання гіперкомплексних чисел — це зниження порядку ЦФ і краща параметрична чутливість, що показується в багатьох роботах [1–3]. Метою даної роботи є розробка методики розрахунку ЦФ із гіперкомплексними коефіцієнтами третьої вимірності, яка може слугувати альтернативою методиці, викладеній в [1].

Використання гіперкомплексних чисел при побудові цифрових фільтрів

Широке застосування цифрових фільтрів призвело в останнє десятиріччя до створення структур цифрових рекурсивних фільтрів із гіперкомплексними коефіцієнтами. При створенні таких структур використовується та особливість, що передавальна функція у вигляді дрібно-раціонального виразу в гіперкомплексній області може бути перетворена в гіперкомплексну функцію з дрібно-раціональними компонентами більш високих степенів із дійсними коефіцієнтами. Крім того, наукові публікації свідчать про інтерес до цієї актуальної теми в таких країнах, як Німеччина, Японія та інших.

Водночас не треба забувати про збільшення обчислювальної складності ЦФ при використанні гіперкомплексних чисел. Для подолання цієї проблеми успішно застосовують різні підходи [1–3].

Розв'язання задачі побудови цифрових фільтрів з коефіцієнтами–тричислами

Для розв'язання поставленої задачі в рамках даного підходу обрана система гіперкомплексних чисел третьої вимірності (тричисел). Таблиця множення цієї асоціативно-комутативної системи (будемо позначати її C_3) наведена нижче.

Таблиця множення C_3

	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_2	e_3
e_2	e_2	e_3	e_1
e_3	e_3	e_1	e_2

Відповідно до таблиці, добуток двох тричисел $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ та $Y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ становить $X\,Y = (x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2)e_1 + (x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_3)e_2 + (x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1)e_3$.

Норма числа $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ дорівнює $|X| = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$, а спряженим до числа X є число $\overline{X} = (x_1^2 - x_2x_3)e_1 + (x_3^2 - x_1x_2)e_2 + (x_2^2 - x_1x_3)e_3$.

Нехай передавальна функція ЦФ 3-го порядку з дійсними коефіцієнтами має вигляд:

$$H_r = \frac{a + b\cdot z^{-1} + c\cdot z^{-2} + d\cdot z^{-3}}{1 + o\cdot z^{-1} + p\cdot z^{-2} + q\cdot z^{-3}}.$$

Реалізуємо її за допомогою передавальної функції 1-го порядку з коефіцієнтами-тричислами:

$$H_h(z) = \frac{g + h\cdot z^{-1}}{e_1 + k\cdot z^{-1}},$$

де $g = g_1e_1 + g_2e_2 + g_3e_3$; $h = h_1e_1 + h_2e_2 + h_3e_3$; $k = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3$.

Розпишемо вираз для $H_h(z)$ більш докладно:

$$H_h(z) = \frac{g + h\cdot z^{-1}}{e_1 + k\cdot z^{-1}} = \frac{(g + h\cdot z^{-1})\overline{(e_1 + k\cdot z^{-1})}}{|\,e_1 + k\cdot z^{-1}\,|},$$

де $|e_1+kz^{-1}| = 1 + 3k_1z^{-1} + 3(k_1^2-k_2k_3)z^{-2}+|k|z^{-3}$ і $\overline{e_1 + kz^{-1}} = [1 + 2k_1z^{-1} +(k_1^2 - k_2k_3)z^{-2}]e_1 + [-k_2z^{-1} +(k_3^2 - k_1k_2)z^{-2}]e_2 + [-k_3z^{-1} +(k_2^2 - k_1k_3)z^{-2}]e_3$.

Прирівнюючи вирази при однакових степенях z знаменників $H_r(z)$ і $H_h(z)$, отримаємо систему рівнянь, з якої

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{o}{3}; \\ k_{2,3} = \sqrt[3]{0{,}5\left(q + \dfrac{2o^3}{27} - \dfrac{op}{3} \pm \sqrt{D}\right)}; \\ D = q^2 + \dfrac{4qo^3}{27} - \dfrac{2qop}{3} + \dfrac{4p^3}{27} - \dfrac{o^2p^2}{27}. \end{cases}$$

Позначимо чисельник $H_h(z)$ як $H_1(z)e_1 + H_2(z)e_2 + H_3(z)e_3$. Розпишемо більш докладно перший множник: $H_1(z) = g_1 + [h_1 + 2g_1k_1 - g_2k_3 - g_3k_2]z^{-1} + [g_1(k_1^2 - k_2k_3) + g_2(k_2^2 - k_1k_3) + g_3(k_3^2 - k_1k_2) + 2h_1k_1 - h_2k_3 - h_3k_2]z^{-2} + [h_1(k_1^2 - k_2k_3) + h_2(k_2^2 - k_1k_3) + h_3(k_3^2 - k_1k_2)]z^{-3}$.

Знову прирівнюючи вирази при однакових степенях z множника $H_l(z)$ і чисельника $H_r(z)$, отримуємо систему чотирьох лінійних рівнянь з шістьма невідомими. Прийнявши $g_2 = g_3 = 0$ і зробивши позначення $l_1 = k_1^2 - k_2k_3$, $l_2 = k_2^2 - k_1k_3$, $l_3 = k_3^2 - k_1k_2$, отримаємо розв'язок:

$$\begin{cases} g_1 = a; \\ h_1 = b - 2ak_1; \\ h_2 = +\dfrac{cl_2 - 2bk_1l_2 + 4ak_1^2l_2 - al_1l_2 + dk_2 + 2al_1k_1k_2 - bl_1k_2}{k_2l_3 - l_2k_3}; \\ h_3 = -\dfrac{cl_3 - 2bk_1l_3 + 4ak_1^2l_3 - al_1l_3 + dk_3 + 2al_1k_1k_3 - bl_1k_3}{k_2l_3 - l_2k_3}. \end{cases}$$

При розв'язанні системи рівнянь одночасно ми отримали головну умову реалізації ЦФ (параметр D має бути невід'ємним).

Приклад розрахунку цифрових фільтрів

Для прикладу візьмемо фільтр низьких частот Батерворта 3-го порядку, що визначається наступним різницевим рівнянням: $y_n = x_{n-3} + 3x_{n-2} + 3x_{n-1} + x_{n-0} + 0{,}6041096995y_{n-3} - 2{,}1152541270y_{n-2} + 2{,}4986083447y_{n-1}$.

Визначимо коефіцієнти ЦФ при реалізації шляхом запропонованого підходу: $k = -0{,}8328694482\ e_1 + 0{,}1391882026\ e_2 - 0{,}0819982655\ e_3$, $g = e_1$, $h = 4{,}6657388964 \times e_1 + 282{,}0253983937\ e_2 + 93{,}8209934466\ e_3$.

На рис. 1 зображено три АЧХ: ідеального фільтра (M); ЦФ з квантованими до трьох десяткових розрядів дійсними коефіцієнтами (Mr); ЦФ з квантованими до трьох десяткових розрядів гіперкомплексними коефіцієнтами (Mh). Можна побачити, що АЧХ ЦФ із гіперкомплексними коефіцієнтами менше відхиляється від ідеальної АЧХ. У смузі заглушення всі АЧХ майже співпадають.

На рис. 2 зображені аналогічні графіки ФЧХ. У лівій частині графіка (у смузі пропускання фільтра) ФЧХ ЦФ із квантованими дійсними коефіцієнтами (*Fr*) значно відрізняється від ідеальної ФЧХ (*F*), у той час як ФЧХ ЦФ із квантованими гіперкомплексними коефіцієнтами (*Fh*) майже співпадає з ідеальною характеристикою. ФЧХ у смузі заглушення має незначний вклад у формування вихідного сигналу, тому гірша на цьому інтервалі ФЧХ ЦФ із гіперкомплексними коефіцієнтами не суттєва.

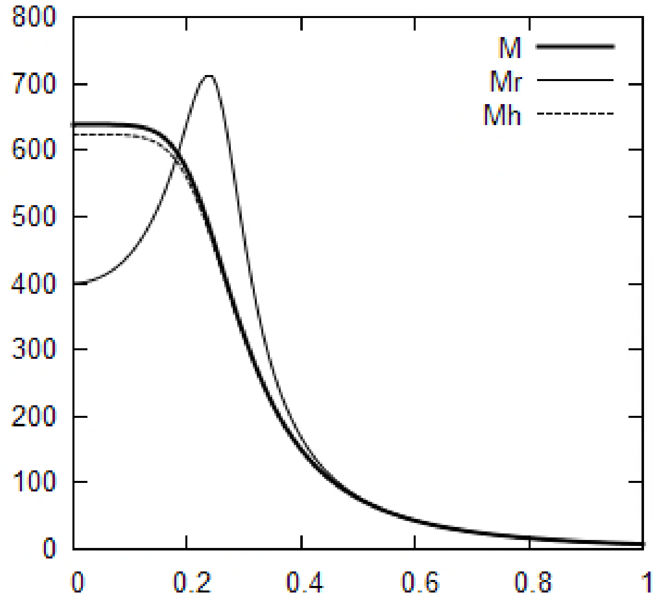

Рис. 1. АЧХ різних реалізацій фільтра

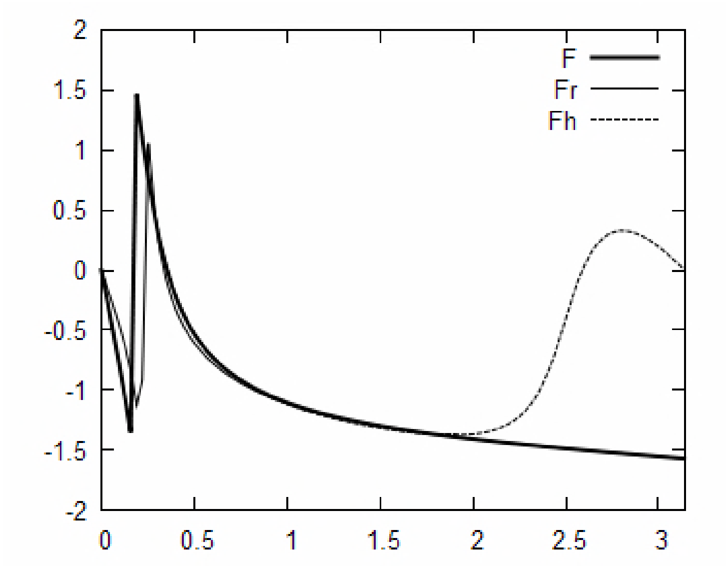

Рис. 2. ФЧХ різних реалізацій фільтра

Висновки

У даній роботі отримано розрахункові формули для переходу від рекурсивного ЦФ 3-го порядку з дійсними коефіцієнтами до еквівалентного йому ЦФ 1-го порядку з гіперкомплексними коефіцієнтами третьої вимірності. Встановлено головну умову, за якої можлива реалізація ЦФ у системі тричисел. На прикладі низькочастотного фільтра продемонстровано кращу параметричну чутливість ЦФ з гіперкомплексними коефіцієнтами третьої вимірності.

1. *Федоренко О.В.* Автоматизоване проектування цифрових фільтрів з гіперкомплексними коефіцієнтами: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн.. наук.: спец. 05.13.12 «Системи автоматизації проектувальних робіт» / О.В. Федоренко. — К.: НТУУ «КПІ», 2008. — 20 с.

2. *Toyoshima H.* Complex IIR Digital Filters Composed of Hypercomplex All-Pass Filters // Proc. 1995 IEEE Singapore Int. Conf. Signal Processing, Circuits & Systems. — 1995. — С. 178–183.

3. *Toyoshima H.* Design of Hypercomplex All-Pass Filters to Realize Complex Transfer Functions / H. Toyoshima, S. Higuchi // Proc. Second Int. Conf. Information, Communucations and Signal Processing. — 1999. — С. 1–5.

Надійшла до редакції 12.03.2009