СДІТ

НОВІ МЕТОДИ В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ, ІНФОРМАТИЦІ ТА ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

УДК 519.9: 539.3: 681.3

ВОССТАНОВЛЕНИЕ МНОГОФАКТОРНЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ В УСЛОВИЯХ КОНЦЕПТУАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Н.Д. ПАНКРАТОВА, Е.Л. ОПАРИНА

Предложен методологический и математический аппарат решения задач восстановления многофакторных закономерностей в условиях концептуальной неопределенности взаимосвязей показателей области определения искомой функциональной зависимости. Восстановление многофакторных закономерностей базируется на разработанной иерархической многоуровневой системе моделей в классе мультипликативных функций.

В практических приложениях, в частности в автоматических системах испытаний летательных аппаратов, контроля функционирования сложных технических систем в реальном времени, автоматического управления пространственными конструкциями, технического диагностирования сложных машин и механизмов различного назначения, требуется обнаружение закономерностей и восстановление функциональных зависимостей по дискретным результатам измерений, наблюдений, испытаний. Для таких задач характерна концептуальная неопределенность взаимосвязей и взаимозависимостей различных детерминированных процессов, а также неконтролируемых внешних условий и факторов.

Непрерывно возрастает практическое значение и актуальность прикладных задач обнаружения закономерностей в реальных условиях неполноты, неопределенности, неточности и противоречивости исходной разнородной информации. Особенно актуальны такие задачи для новых сфер приложений: во-первых, для слабо структурированных прикладных областей (медицина, социология, техническое диагностирование нештатных ситуаций сложных систем и т.д.); во-вторых, для прикладных задач, трудно формализуемых в условиях искаженной и косвенной информации ограниченного объема или в условиях гигантских объемов информации. В этих случаях разнообразные оптимальные методы обработки данных (фильтрация, сглаживание, оценивание параметров и т.д.) либо оказываются неработоспособными, либо дают погрешности, неприемлемые на практике [1]. Поэтому для перечисленных областей практической деятельности при решении реальных задач построение адекватных математических моделей с целью выявления закономерностей исследуемых процессов связано с большими трудностями. В итоге модели оказываются либо избыточно упрощенными и потому непригодными для получения количественных и качественных выводов, либо настолько сложными, что для преодоления вычислительных трудностей приходится их упрощать настолько, что возможная адекватность модели оказывается чисто теоретической гипотезой, не допускающей проверки на практике [2].

Цель данной работы — предложить методологический и математический аппарат решения задач выявления многофакторных закономерностей в условиях концептуальной неопределенности, в том числе неопределенности взаимосвязей и взаимозависимостей показателей области определения искомой функциональной закономерности.

Математическая постановка задачи. Известна исходная информация в виде дискретного массива

$$M_0 = \left\langle Y_0, X_1, X_2, X_3 \right\rangle,$$

$$Y_0 = \left(Y_i \,\middle|\, i = \overline{1,m}\right), \quad Y_i = \left(Y_i[q_0] \,\middle|\, q_0 = \overline{1,k_0}\right),$$

$$X_1 = \left(X_{1j_1} \,\middle|\, j_1 = \overline{1,n_1}\right), \quad X_{1j_1} = \left(X_{1j_1}[q_1] \,\middle|\, q_1 = \overline{1,k_1}\right),$$

$$X_2 = \left(X_{2j_2} \,\middle|\, j_2 = \overline{1,n_2}\right), \quad X_{2j_2} = \left(X_{2j_2}[q_2] \,\middle|\, q_2 = \overline{1,k_2}\right),$$

$$X_3 = \left(X_{3j_3} \,\middle|\, j_3 = \overline{1,n_3}\right), \quad X_{3j_3} = \left(X_{3j_3}[q_3] \,\middle|\, q_3 = \overline{1,k_3}\right),$$

где множество Y_0 определяет дискретные численные значения $Y_i[q_0] \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left\langle X_{1j_1}[q_1], X_{2j_2}[q_2], X_{3j_3}[q_3] \right\rangle$ неизвестных функциональных зависимостей $y_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1,m}$, $x_1 = (x_{1j_1} \mid j_1 = \overline{1,n_1})$, $x_2 = (x_{2j_2} \mid j_2 = \overline{1,n_2})$, $x_3 = = (x_{3j_3} \mid j_3 = \overline{1,n_3})$, которые должны отображать свойства многофакторных закономерностей. Априорно неизвестно, являются ли компоненты векторов x_1, x_2, x_3 зависимыми или независимыми. Каждому значению $q_0 \in [1, k_0]$ соответствует определенный набор $q_0 \Leftrightarrow \langle q_1, q_2, q_3 \rangle$ значений $q_1 \in [1, k_1]$, $q_2 \in [1, k_2]$, $q_3 \in [1, k_3]$. Множество Y_0 состоит из k_0 различных значений $Y_i[q_0]$. В множествах X_1, X_2, X_3 определенная часть величин $X_{1j_1}[q_1]$, $X_{2j_2}[q_2]$, $X_{3j_3}[q_3]$ при некоторых значениях $q_1 = \hat{q}_1 \in \hat{Q}_1 \subset [1, k_1]$, $q_2 = \hat{q}_2 \in \hat{Q}_2 \subset \subset [1, k_2]$, $q_3 = \hat{q}_3 \in \hat{Q}_3 \subset [1, k_3]$ раздельно повторяется, но для различных $q_0 \in [1, k_0]$ не существует полностью совпадающих наборов $\left\langle X_{1j_1}[q_1], X_{2j_2}[q_2], X_{3j_3}[q_3] \right\rangle$. Здесь задано $n_1 + n_2 + n_3 = n_0$, $n_0 \le k_0$.

Известно, что $x_1 \in D_1$, $x_2 \in D_2$, $x_3 \in D_3$, $X_1 \in \hat{D}_1$, $X_2 \in \hat{D}_2$, $X_3 \in \hat{D}_3$, где

$$D_s = \left\langle x_{sj_s} \,\middle|\, d^-_{sj_s} \le x_{sj_s} \le d^+_{sj_s},\ j_s = \overline{1,n_s} \right\rangle, \quad s = \overline{1,3},$$

$$\hat{D}_s = \left\langle \mathrm{X}_{sj_s} \,\middle|\, \hat{d}^-_{sj_s} \le \mathrm{X}_{sj_s} \le \hat{d}^+_{sj_s},\ j_s = \overline{1,n_s} \right\rangle, \quad s = \overline{1,3},$$

$$d^{-}_{s\,j_s} \le \hat{d}^{-}_{s\,j_s}\,,\; d^{+}_{s\,j_s} \ge \hat{d}^{+}_{s\,j_s}\,.$$

Требуется найти такие функции $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1,m}$, которые с практически приемлемой погрешностью будут характеризовать априорно неизвестные функциональные зависимости $y_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1,m}$ на множестве D_s.

Методологический и математический аппарат решения задачи. Выбор аппарата решения задачи зависит от ее особенностей и свойств. Данная задача является развитием идей и усложнением условий задачи, исследуемой в работе [3], где принято, что компоненты векторов x_1, x_2, x_3 являются независимыми. Она отличается принципиальной сложностью от типовых задач восстановления функциональной зависимости и задач обнаружения закономерностей [4–6]. Отличие обусловлено не только разнородностью исходной информации, но и самих свойств рассматриваемых групп факторов, которые определяются соответственно векторами x_1, x_2, x_3. Важной особенностью является также принципиальное различие факторов по уровню управляемости при принятии решений.

Действительно, значения компонент вектора x_1 — это собственный выбор Разработчика, и потому они могут изменяться в процессе проектирования изделия. Значения компонент вектора x_2 — требования, определяемые назначением изделия, и поэтому при его изменении могут корректироваться Заказчиком изделия. В любом случае Разработчик обязан выполнить требования Заказчика. Значения компонент вектора x_3 — требования, определяемые стандартами на условия эксплуатации изделия, и потому их выполнение обязательно для Разработчика.

Перечисленные отличия свойств компонент векторов определяют практическую необходимость оценивать раздельно степень влияния каждой группы факторов на свойства восстанавливаемых функций. Для этого искомые функции целесообразно формировать на основе иерархической многоуровневой системы моделей [3]. На верхнем уровне реализуется модель, определяющая зависимость от переменных x_1, x_2, x_3 функций $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1,m}$, аппроксимирующих неизвестные функциональные закономерности $y_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1,m}$. Особое значение имеет выбор структуры функций $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1,m}$. В работе [3] эти функции формируются в классе аддитивных функций и представляются в виде суперпозиции функций от переменных x_1, x_2, x_3.

Такой выбор вполне обоснован, поскольку принято, что компоненты векторов x_1, x_2, x_3 независимы. Однако для многих практических задач такой выбор недопустим, поскольку неизвестно, являются ли компоненты векторов x_1, x_2, x_3 зависимыми или независимыми. Наиболее сложным оказывается условие, в соответствии с которым компоненты векторов x_1, x_2, x_3 зависимы. При этом условии формирование структуры $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1,m}$ в классе аддитивных функций приведет к большим отклонениям полученных зависимостей от истинных многофакторных закономерностей, поскольку не будут учитываться взаимные воздействия компонент векторов x_1, x_2, x_3 на свойства $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$.

При формировании структуры моделей будем учитывать влияния на свойства искомых функций $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = \overline{1, m}$ не только группы компонент каждого вектора x_1, x_2, x_3, но и взаимные воздействия компонент разных векторов x_1, x_2, x_3. Поэтому для выявления многофакторных закономерностей предлагается формировать иерархическую многоуровневую систему моделей в классе мультипликативных функций. Представим систему моделей в виде последовательности следующих уровней:

$$[1+\Phi_i(x)] = \prod_{k=1}^{K_0}[1+\Phi_{ik}(x_k)]^{c_{ik}}, \tag{1}$$

$$[1+\Phi_{ik}(x_k)] = \prod_{j_k=1}^{n_k}\left[1+\Psi_{kj_k}\left(x_{kj_k}\right)\right]^{a_{ikj_k}}, \tag{2}$$

$$\left[1+\Psi_{kj_k}\left(x_{kj_k}\right)\right] = \prod_{p_{j_k}=1}^{P_{kj_k}}\left[1+\varphi_{p_{j_k}}\left(x_{kj_k}\right)\right]^{\lambda_{kj_k}}. \tag{3}$$

Для удобства дальнейших исследований и вычислений после несложных преобразований представим модели каждого уровня в форме аддитивных функций

$$\Phi_i(x) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{K_0} c_{ik}\ln[1+\Phi_{ik}(x_k)]\right\} - 1, \tag{4}$$

$$\Phi_{ik} = \exp\left\{\sum_{j_k=1}^{n_k} a_{ikj_k}\ln\left[1+\Psi_{kj_k}\left(x_{kj_k}\right)\right]\right\} - 1, \tag{5}$$

$$\Psi_{kj_k}\left(x_{kj_k}\right) = \exp\left\{\sum_{p_{j_k}=1}^{P_{kj_k}} \lambda_{kj_k}\ln\left[1+\varphi_{p_k}\left(x_{kj_k}\right)\right]\right\} - 1. \tag{6}$$

Здесь на высшем иерархическом уровне (4) реализуются модели, определяющие зависимость каждой функции $\Phi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ от переменных x_k, $k = \overline{1, K_0}$. На среднем уровне (5) формируются модели, определяющие раздельно зависимость каждой функции $\Phi_{ik}(x_k)$ соответственно от компонент x_{kj_k}, $k = \overline{1, K_0}$, $j_k = \overline{1, n_k}$ переменных x_k, $k = \overline{1, K_0}$. На третьем уровне (6) формируются модели, определяющие функции $\Psi_{kj_k}\left(x_{kj_k}\right)$, x_{kj_k}, $k = \overline{1, K_0}$, $j_k = \overline{1, n_k}$. Далее в примере полагаем $k = \overline{1, 3}$.

Решение задачи. Для выявления многофакторных закономерностей на основе заданной в массиве M_0 дискретной информации, прежде всего, необходимо решить задачи формирования функций, определяющих модели (4), (5), (6). Перейдем к формализации и решению этих задач. Для системы моделей главное — это выбор структуры и компонент функций. При выборе функций φ_{p_k} необходимо учитывать такие требования.

Во-первых, эти функции являются основными структурообразующими функциональными элементами всех моделей [3]. Поэтому они должны обладать экстремальными свойствами для соответствующих переменных x_{sj_s}, $j_s=\overline{1,n_s}$, $s=\overline{1,3}$, которые определяются на заданных отрезках дискретным массивом M_0.

Во-вторых, функции должны обеспечить возможность реализации равномерного приближения истинных функциональных зависимостей на множестве D_s и взаимные соответствия экстремальных свойств функций $\Phi_i(x_1,x_2,x_3)$ и $f_i(x_1,x_2,x_3)$, $\forall i=\overline{1,m}$ [7,8] на границах интервалов D_1, D_2, D_3.

Принимаем во внимание, что для большинства введенных переменных физически выполняется условие $x_{sj_s} \geq 0$, поэтому переменные x_{sj_s}, $\forall j_s=\overline{1,n_s}$, $s=\overline{1,3}$ можно нормировать к [0,1]. В соответствии с принятой структурой системы моделей исходными элементами для функций $\Psi_{kj_k}\left(x_{kj_k}\right)$ являются функции $\varphi_{p_k}\left(x_{k\,j_k}\right)$. Поэтому задачу построения функций $\Phi_i(x)$, $i=\overline{1,m}$ на основе информации массива M_0 целесообразно выполнять на основе последовательности

$$\left\langle \varphi_p \middle| \, p=\overline{1,P_k} \right\rangle \to \langle \, \Psi_1,\Psi_2,\Psi_3 \, \rangle \to \langle \, \Phi_{i1},\Phi_{i2},\Phi_{i3} \, \rangle \to \left\langle \, \Phi_i \middle| \, i=\overline{1,m} \, \right\rangle, \qquad (7)$$

а конечный результат формировать путем агрегирования соответствующих решений. Такой подход позволяет процедуру формирования искомых функциональных зависимостей свести к последовательности чебышевских задач приближения для несовместных систем линейных уравнений [3]. Методы решения таких задач известны [9, 10]. В частности, такие чебышевские задачи сводятся к задаче линейного программирования [10].

Рассмотрим задачу формирования функций φ_p. Данная задача является наиболее ответственной и наиболее сложной. Ответственной по значимости, поскольку допущенные недостатки не могут в полной мере устраняться на последующих уровнях системы моделей, и, более того, могут усугубляться, например, неудачным выбором для φ_p количества и степени смещенных полиномов Чебышева. Сложной для описания, поскольку к искомым функциям предъявляются противоречивые требования.

Во-первых, функции должны отражать с достаточной точностью экстремальные свойства, характерные в целом для множества искомых функциональных зависимостей.

Во-вторых, они должны в достаточной степени учитывать индивидуальные особенности экстремальных свойств каждой функции и обеспечивать возможность адаптации к ним на последующих уровнях.

Для реализации указанных выше требований и особенностей функций $\varphi_{p_k}(x_{k\,j_k})$ целесообразно применять смещенные полиномы Чебышева [11]. Тогда модель (6) преобразуется к виду

$$\Psi_{kj_k}\left(x_{kj_k}\right)=\exp\left\{\varphi_{0j_k}+\sum_{p_{j_k}=1}^{P_{kj_k}}\lambda_{kj_k}\ln\left[1+\varphi_{p_k}\left(x_{kj_k}\right)\right]\right\}-1,\qquad(8)$$

где

$$\varphi_{0j_k}=\lambda_{0j_k}\ln(1+\mathrm{T}_0^*)=\lambda_{0j_k}\ln 1{,}5;\quad T_0^*=0{,}5;\quad j_k=\overline{1,n_k};$$

$$\varphi_{p_k}\left(x_{kj_k}\right)=\mathrm{T}_{p_k}^*\left(x_{kj_k}\right);\quad p_k=\overline{1,P_{kj_k}}.$$

Функции $\Psi_{1j_1}(x_{j_1}),\Psi_{2j_2}(x_{j_2}),\Psi_{3j_3}(x_{j_3})$ должны быть согласованы с моделями (5). Для этого требуется обеспечить следующее соответствие:

$$\Psi_1\to\left\langle\Phi_{i1}\,\middle|\,i=\overline{1,m}\right\rangle,\ \Psi_2\to\left\langle\Phi_{i2}\,\middle|\,i=\overline{1,m}\right\rangle,\ \Psi_3\to\left\langle\Phi_{i3}\,\middle|\,i=\overline{1,m}\right\rangle,$$

$$\Psi_1=\left\langle\Psi_{1j_1}\,\middle|\,j_1=\overline{1,n_1}\right\rangle,\ \Psi_2=\left\langle\Psi_{2j_2}\,\middle|\,j_2=\overline{1,n_2}\right\rangle,\ \Psi_3=\left\langle\Psi_{3j_3}\,\middle|\,j_3=\overline{1,n_3}\right\rangle.$$

Функции $\Phi_{ik}(x_k)$ должны быть согласованы с моделями (4). Полагаем, что $\forall\, i\in[1,m]$ и $k=\overline{1,3}$ степень влияния функций $\Phi_{i1}(x_1),\Phi_{i2}(x_2),\Phi_{i3}(x_3)$ на свойства соответствующей функции $\Phi_i(x_1,x_2,x_3)$ одинакова. Такое допущение обусловлено отсутствием априорной информации. Вместе с тем допущение позволяет раздельно формировать функции $\Phi_{i1}(x_1),\Phi_{i2}(x_2)$, $\Phi_{i3}(x_3)$. Тогда степень влияния каждой из них на уровне (4) иерархии моделей можно определять на основе условий

$$\left\langle\Phi_{i1}(x_1),\Phi_{i2}(x_2),\Phi_{i3}(x_3)\,\middle|\,i=\overline{1,m}\right\rangle\to\left\langle\Phi_i(x_1,x_2,x_3)\,\middle|\,i=\overline{1,m}\right\rangle.$$

Отметим, что количество и состав функций $\varphi_{p_k}\left(x_{kj_k}\right)$ в модели (8) зависит от особенностей конкретной задачи. В частности, для функциональных зависимостей с медленно изменяющимися переменными x_1,x_2,x_3 достаточно принять $P_{kj_k}\in[2,4]$. Для быстро изменяющихся переменных x_1,x_2,x_3 может потребоваться в (8) достаточно широкий интервал для значений $p_k=\overline{1,8}$. Построение моделей (4), (5) и (8) сводится к определению соответственно коэффициентов c_{ik}, a_{ikj_k}, λ_{kj_k} из несовместных систем линейных уравнений в соответствии с последовательностью (7) в обратном порядке λ_{kj_k}, a_{ikj_k}, c_{ik}. Метод решения таких уравнений в классе аддитивных функций предложен в работе [3]. Используя модели (4), (5) и (8), данный метод адаптируется для класса мультипликативных функций.

В качестве примера рассмотрим задачу выявления закономерностей $y_i(x_1,x_2,x_3)$, $i=\overline{1,4}$ по заданным дискретным значениям $X_s, s=\overline{1,3}$ и $Y_i[X_1,X_2,X_3]$, $i=\overline{1,4}$ выборки, приведенным в таблице. В данном примере заданы: размерности векторов X_1,X_2,X_3 соответственно $n_1=2$, $n_2=2$, $n_3=3$; объем выборки $q_0=\overline{1,45}$; количество целевых функций $m=4$.

Исходные дискретные данные

$X_1[X_{11}, X_{12}]$, $X_2[X_{21}, X_{22}]$, $X_3[X_{31}, X_{32}, X_{33}]$ и $Y_i[X_1, X_2, X_3]$, $i = \overline{1,4}$

q_0	X_{11}	X_{12}	X_{21}	X_{22}	X_{31}	X_{32}	X_{33}	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
1	5,050	2,015	7,050	8,015	10,000	1,000	5,100	254,621	98,145	119,406	117,683
2	5,150	2,100	7,150	9,109	15,800	2,100	4,200	198,163	73,368	92,651	90,123
3	5,200	2,125	7,192	9,125	22,500	2,500	3,500	187,411	71,084	87,691	83,576
4	5,250	2,175	7,250	9,175	25,000	3,510	2,720	167,197	63,567	78,793	74,789
5	5,325	2,200	7,325	9,198	32,500	4,200	2,530	166,547	63,813	79,497	74,316
6	5,350	2,250	7,350	9,251	35,000	5,020	2,100	153,789	61,378	77,082	72,817
7	5,400	2,400	7,411	9,395	40,700	8,200	1,150	110,926	55,579	67,758	77,425
8	5,500	2,500	7,505	9,498	51,800	10,100	0,720	151,381	60,432	71,956	89,519
9	5,600	2,600	7,610	9,598	65,000	12,800	0,540	187,364	76,283	91,123	121,374
10	5,700	2,700	7,695	9,699	72,000	14,400	0,120	236,123	93,657	112,859	149,173
11	5,750	2,750	7,750	9,748	75,400	14,700	1,250	292,341	118,624	153,717	184,136
12	5,800	2,775	7,804	9,775	82,800	15,500	1,760	288,324	114,324	117,965	179,152
13	5,850	2,800	7,850	9,798	85,000	16,300	2,230	326,939	128,926	155,912	201,239
14	5,907	2,850	8,050	9,850	90,780	16,700	2,610	377,128	148,675	169,359	225,482
15	5,910	2,855	7,910	9,855	91,000	16,900	4,160	405,327	159,367	192,924	240,976
16	5,925	2,865	7,925	9,865	92,500	17,500	5,250	458,386	180,567	218,549	275,846
17	5,929	2,885	8,011	9,875	92,900	17,700	6,370	518,859	183,932	247,354	316,124
18	5,933	2,915	7,933	9,899	93,500	18,200	7,260	595,737	235,124	284,167	363,928
19	5,935	2,950	7,935	9,951	94,580	19,100	7,510	506,168	261,946	316,375	403,153
20	5,950	2,975	7,950	9,975	95,400	19,500	7,740	685,761	281,387	341,326	431,195
21	5,010	1,995	6,950	9,015	11,500	21,000	8,140	790,639	310,519	375,651	471,588
22	5,050	2,975	7,108	9,975	10,500	19,560	8,350	723,784	285,142	344,856	436,847
23	5,150	2,950	7,151	9,950	15,800	19,300	8,580	731,438	288,125	348,314	441,842
24	5,200	2,900	7,204	9,915	21,500	18,700	8,740	721,321	283,435	344,716	439,425
25	5,250	2,875	7,248	9,875	26,400	17,560	8,850	691,845	272,834	329,942	422,147
26	5,325	2,865	7,325	9,865	32,500	17,100	9,210	708,614	280,562	349,316	435,954
27	5,350	2,855	7,351	9,855	35,300	16,700	9,520	729,956	287,987	348,231	450,492
28	5,400	2,850	7,408	9,850	41,700	16,200	9,750	730,129	288,951	347,987	454,897
29	5,500	2,775	7,495	9,775	50,200	15,700	10,100	717,152	285,494	342,967	458,289
30	5,600	2,750	7,607	9,750	62,700	15,360	0,100	278,654	111,209	132,856	172,164
31	5,700	2,710	7,697	9,697	69,800	14,700	1,150	242,145	96,197	115,632	153,356
32	5,750	2,603	7,750	9,605	75,100	13,340	1,360	186,243	77,325	93,135	127,168
33	5,800	2,495	7,798	9,495	80,520	11,720	1,750	162,345	64,615	77,824	106,123
34	5,850	2,394	7,850	9,415	85,200	8,900	2,130	132,879	52,534	63,453	82,659
35	5,907	2,245	7,913	9,255	90,760	7,740	2,570	167,156	65,178	79,167	93,834
36	5,910	2,192	7,910	9,205	91,100	6,360	2,750	170,531	66,176	80,836	91,345
37	5,925	2,175	7,925	9,175	92,500	5,700	3,260	184,243	70,364	87,192	96,841
38	5,929	2,125	7,929	9,125	92,900	3,750	3,790	181,956	70,428	85,834	93,952
39	6,010	2,105	7,933	9,091	93,300	3,650	4,120	216,829	83,475	101,985	109,463
40	5,935	2,010	7,935	8,985	94,500	3,520	4,360	273,329	104,924	128,591	133,415
41	5,950	2,110	7,950	9,115	98,600	2,720	3,850	219,421	84,183	102,861	108,613
42	5,020	2,115	6,995	9,115	110,00	2,340	2,340	225,356	86,324	105,817	107,319
43	6,050	2,128	7,950	9,120	95,260	2,560	1,680	176,578	66,457	78,473	82,263
44	5,935	2,131	7,935	9,130	93,520	2,760	1,320	170,948	65,814	81,417	84,132
45	5,925	2,135	7,925	9,135	92,800	2,980	1,160	168,334	64,549	78,653	81,953

Задача решается для случая, когда априорно неизвестно, являются ли переменные x_1, x_2, x_3 зависимыми или независимыми величинами. При этом условии целесообразно иерархическую многоуровневую систему моделей (7) формировать на основе мультипликативных функций (4), (5), (8), где функции $\varphi_{p_k}\left(x_{kj_k}\right)$ строятся на базе смещенных полиномов Чебышева.

Восстановленные в классе мультипликативных функций функциональные закономерности $\Phi_i(x_1, x_2, x_3)$, $i=\overline{1,4}$ получены агрегированием соответствующих решений на основании выражений (4), (5), (8) и представлены в следующем виде:

$$\psi_{11}(x_{11}) = (1{,}5)^{0{,}0777295}\ (3{,}12\,x_{11} + 15{,}03)^{0{,}114941}(9{,}7344\,x_{11}^2 + 86{,}5072\,x_{11} +$$

$$+ 192{,}831)^{0{,}146933}(37{,}1205\,x_{11}^3 + 485{,}628\,x_{11}^2 + 2114{,}29\,x_{11} + 3065{,}28)^{0{,}118541} - 1\,;$$

$$\psi_{12}(x_{12}) = (1{,}5)^{0{,}0777295}\,(2{,}94\,x_{12} + 5{,}985)^{0{,}602141}(8{,}6436\,x_{12}^2 + 28{,}3318\,x_{12} +$$

$$+ 23{,}8552)^{0{,}329136}(31{,}0593\,x_{12}^3 + 144{,}545\,x_{12}^2 + 220{,}983\,x_{12} + 112{,}869)^{-0{,}079337} - 1;$$

$$\psi_{21}(x_{21}) = (1{,}5)^{0{,}103405}\,(3{,}3\,x_{21} + 20{,}85)^{-0{,}32523}\,(10{,}89\,x_{21}^2 + 129{,}91\,x_{21} +$$

$$+ 388{,}073)^{0{,}389109}(43{,}923\,x_{21}^3 + 775{,}671\,x_{21}^2 + 4562{,}41\,x_{21} + 8940{,}01)^{-0{,}0834892} - 1;$$

$$\psi_{22}(x_{22}) = (1{,}5)^{0{,}103405}(5{,}88\,x_{22} + 24{,}045)^{0{,}392262}\,(34{,}5744\,x_{22}^2 + 269{,}049\,x_{22} +$$

$$+ 524{,}057)^{0{,}370097}\,(248{,}475\,x_{22}^3 + 2867{,}7\,x_{22}^2 + 11025{,}7\,x_{22} + 14124{,}2)^{0{,}197783} - 1;$$

$$\psi_{31}(x_{31}) = (1{,}5)^{0{,}0351869}(300\,x_{31} + 30)^{0{,}085386}\,(90000\,x_{31}^2 + 17300\,x_{31} +$$

$$+ 832)^{0{,}0502533}(0{,}07\,x_{31}^3 + 0{,}06\,x_{31}^2 + 897900\,x_{31} + 28490)^{0{,}0280712} - 1\,;$$

$$\psi_{32}(x_{32}) = (1{,}5)^{0{,}0351869}\,(60\,x_{32} + 3)^{0{,}47717}\,(3600\,x_{32}^2 + 220\,x_{32} +$$

$$+ 4)^{0{,}0268206}\,(264000\,x_{32}^3 + 20800\,x_{32}^2 + 408\,x_{32} + 5)^{-0{,}00681945} - 1;$$

$$\psi_{33}(x_{33}) = (1{,}5)^{0{,}0351869}(30\,x_{33} + 0{,}3)^{0{,}582053}\,(900\,x_{33}^2 - 52\,x_{33} +$$

$$+ 1{,}39)^{-0{,}0204128}(33000\,x_{33}^3 - 3710\,x_{33}^2 + 105{,}9\,x_{33} + 1{,}463)^{-0{,}0215009} - 1;$$

$$\Phi_{11}(x_1) = (\psi_{11} + 1)^{0{,}637338}\,(\psi_{12} + 1)^{0{,}0930169} - 1\,;$$

$$\Phi_{12}(x_2) = (\psi_{21} + 1)^{0{,}107742}\,(\psi_{22} + 1)^{-0{,}066333} - 1\,;$$

$$\Phi_{13}(x_3) = (\psi_{31} + 1)^{0{,}106661}\,(\psi_{32} + 1)^{0{,}5654043}\,(\psi_{33} + 1)^{0{,}74188} - 1\,;$$

$$\Phi_{21}(x_1) = (\psi_{11}+1)^{0,4387406}(\psi_{12}+1)^{0,173249} - 1;$$

$$\Phi_{22}(x_2) = (\psi_{21}+1)^{0,0599518}(\psi_{22}+1)^{-0,448568} - 1;$$

$$\Phi_{23}(x_3) = (\psi_{31}+1)^{0,132208}(\psi_{32}+1)^{0,566331}(\psi_{33}+1)^{0,792533} - 1;$$

$$\Phi_{31}(x_1) = (\psi_{11}+1)^{0,46741}(\psi_{12}+1)^{0,188974} - 1;$$

$$\Phi_{32}(x_2) = (\psi_{21}+1)^{0,074937}(\psi_{22}+1)^{-0,46837} - 1;$$

$$\Phi_{33}(x_3) = (\psi_{31}+1)^{0,115089}(\psi_{32}+1)^{0,529878}(\psi_{33}+1)^{0,806946} - 1;$$

$$\Phi_{41}(x_1) = (\psi_{11}+1)^{0,125671}(\psi_{12}+1)^{0,0591671} - 1;$$

$$\Phi_{42}(x_2) = (\psi_{21}+1)^{0,0508546}(\psi_{22}+1)^{-0,00753406} - 1;$$

$$\Phi_{43}(x_3) = (\psi_{31}+1)^{0,0850168}(\psi_{32}+1)^{0,707902}(\psi_{33}+1)^{0,838657} - 1;$$

$$\Phi_1(x_1,x_2,x_3) = 679{,}713\left[\Phi_{11}(x_1)+1\right]^{1,06018}\left[\Phi_{12}(x_2)+1\right]^{1,46359}\times$$

$$\times\left[\Phi_{13}(x_3)+1\right]^{0,961271} + 109{,}926;$$

$$\Phi_2(x_1,x_2,x_3) = 257{,}985\left[\Phi_{21}(x_1)+1\right]^{1,28673}\left[\Phi_{22}(x_2)+1\right]^{1,4494}\times$$

$$\times\left[\Phi_{23}(x_3)+1\right]^{0,946762} + 51{,}534;$$

$$\Phi_3(x_1,x_2,x_3) = 312{,}198\left[\Phi_{31}(x_1)+1\right]^{1,28158}\left[\Phi_{32}(x_2)+1\right]^{1,49631}\times$$

$$\times\left[\Phi_{33}(x_3)+1\right]^{0,951132} + 62{,}453;$$

$$\Phi_4(x_1,x_2,x_3) = 398{,}771\left[\Phi_{41}(x_1)+1\right]^{1,56375}\left[\Phi_{42}(x_2)+1\right]^{1,75381}\times$$

$$\times\left[\Phi_{43}(x_3)+1\right]^{0,889233} + 71{,}817.$$

Восстановленная в классе мультипликативных функций функциональная зависимость $\Phi_2(x_1,x_2,x_3)$ и график функции $Y_2[X_1,X_2,X_3]$, построенной по дискретным значениям ее выборки, показаны на рис. 1.

Дополнительно по данным таблицы вычислен вариант восстановленных функциональных закономерностей $\Phi_i(x_1,x_2,x_3)$, $i=\overline{1,4}$ на основе системы моделей в классе аддитивных функций, предложенных в работе [3]. Эти функциональные закономерности, реализованные на базе смещенных полиномов Чебышева, имеют вид

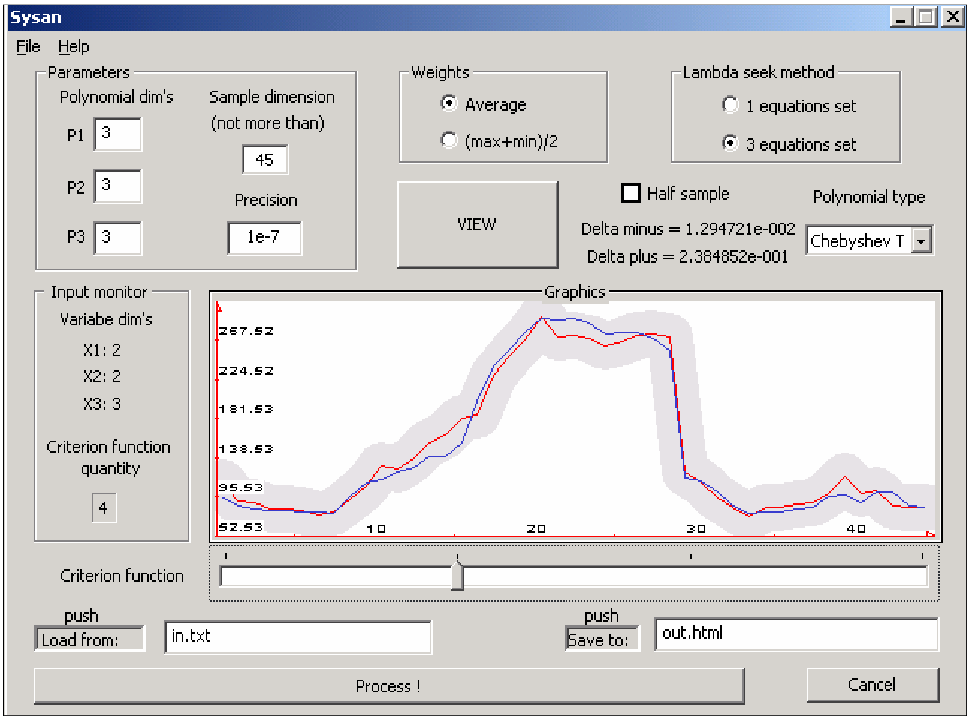

Рис. 1. Восстановленная функциональная зависимость $\Phi_2[x_1, x_2, x_3]$ в классе мультипликативных функций и график функции $Y_2[X_1, X_2, X_3]$

$$\Phi_1(x_1, x_2, x_3) = 0{,}013\, T_0^*(x_{11}) - 0{,}008\, T_1^*(x_{11}) - 0{,}007\, T_2^*(x_{11}) + 0{,}012\, T_0^*(x_{12}) +$$

$$+ 0{,}019\, T_1^*(x_{12}) + 0{,}027\, T_2^*(x_{12}) - 0{,}003\, T_0^*(x_{21}) + 0{,}006\, T_1^*(x_{21}) -$$

$$- 0{,}005\, T_2^*(x_{21}) - 0{,}003\, T_0^*(x_{22}) - 0{,}010\, T_1^*(x_{22}) - 0{,}004\, T_2^*(x_{22}) +$$

$$+ 0{,}166\, T_0^*(x_{31}) + 0{,}028\, T_1^*(x_{31}) + 0{,}020\, T_2^*(x_{31}) + 0{,}132\, T_0^*(x_{32}) +$$

$$+ 0{,}210\, T_1^*(x_{32}) + 0{,}099\, T_2^*(x_{32}) + 0{,}137\, T_0^*(x_{33}) + 0{,}325\, T_1^*(x_{33}) + 0{,}107\, T_2^*(x_{33});$$

$$\Phi_2(x_1, x_2, x_3) = 0{,}020\, T_0^*(x_{11}) - 0{,}012\, T_1^*(x_{11}) - 0{,}010\, T_2^*(x_{11}) + 0{,}021\, T_0^*(x_{12}) +$$

$$+ 0{,}034\, T_1^*(x_{12}) + 0{,}046\, T_2^*(x_{12}) - 0{,}010\, T_0^*(x_{21}) + 0{,}020\, T_1^*(x_{21}) -$$

$$- 0{,}016\, T_2^*(x_{21}) - 0{,}009\, T_0^*(x_{22}) - 0{,}033\, T_1^*(x_{22}) - 0{,}013\, T_2^*(x_{22}) +$$

$$+ 0{,}136\, T_0^*(x_{31}) + 0{,}023\, T_1^*(x_{31}) + 0{,}016\, T_2^*(x_{31}) + 0{,}148\, T_0^*(x_{32}) +$$

$$+ 0{,}236\, T_1^*(x_{32}) + 0{,}111\, T_2^*(x_{32}) + 0{,}141\, T_0^*(x_{33}) + 0{,}334\, T_1^*(x_{33}) + 0{,}110\, T_2^*(x_{33});$$

$$\Phi_3(x_1,x_2,x_3)=0{,}021T_0^*(x_{11})-0{,}013\,T_1^*(x_{11})-0{,}011T_2^*(x_{11})+0{,}022\,T_0^*(x_{12})+$$

$$+0{,}036\,T_1^*(x_{12})+0{,}049T_2^*(x_{12})-0{,}010\,T_0^*(x_{21})+0{,}021\,T_1^*(x_{21})-$$

$$-0{,}017T_2^*(x_{21})-0{,}010T_0^*(x_{22})-0{,}035\,T_1^*(x_{22})-0{,}014T_2^*(x_{22})+$$

$$+0{,}139T_0^*(x_{31})+0{,}023T_1^*(x_{31})+0{,}016T_2^*(x_{31})+0{,}145T_0^*(x_{32})+$$

$$+0{,}231T_1^*(x_{32})+0{,}109T_2^*(x_{32})+0{,}143T_0^*(x_{33})+0{,}338T_1^*(x_{33})+0{,}112T_2^*(x_{33});$$

$$\Phi_4(x_1,x_2,x_3)=-0{,}004\,T_0^*(x_{11})+0{,}002T_1^*(x_{11})+0{,}002T_2^*(x_{11})-0{,}004T_0^*(x_{12})-$$

$$-0{,}007\,T_1^*(x_{12})-0{,}009T_2^*(x_{12})+0{,}002\,T_0^*(x_{21})-0{,}004\,T_1^*(x_{21})+$$

$$+0{,}003T_2^*(x_{21})+0{,}002T_0^*(x_{22})+0{,}008\,T_1^*(x_{22})+0{,}003T_2^*(x_{22})+$$

$$+0{,}129T_0^*(x_{31})+0{,}022T_1^*(x_{31})+0{,}015T_2^*(x_{31})+0{,}174T_0^*(x_{32})+$$

$$+0{,}277T_1^*(x_{32})+0{,}131T_2^*(x_{32})+0{,}148T_0^*(x_{33})+0{,}350T_1^*(x_{33})+0{,}116T_2^*(x_{33}).$$

Восстановленная в классе аддитивных функций функциональная зависимость $\Phi_2(x_1,x_2,x_3)$ и график функции $Y_2[X_1,X_2,X_3]$, построенной по дискретным значениям ее выборки, показаны на рис. 2.

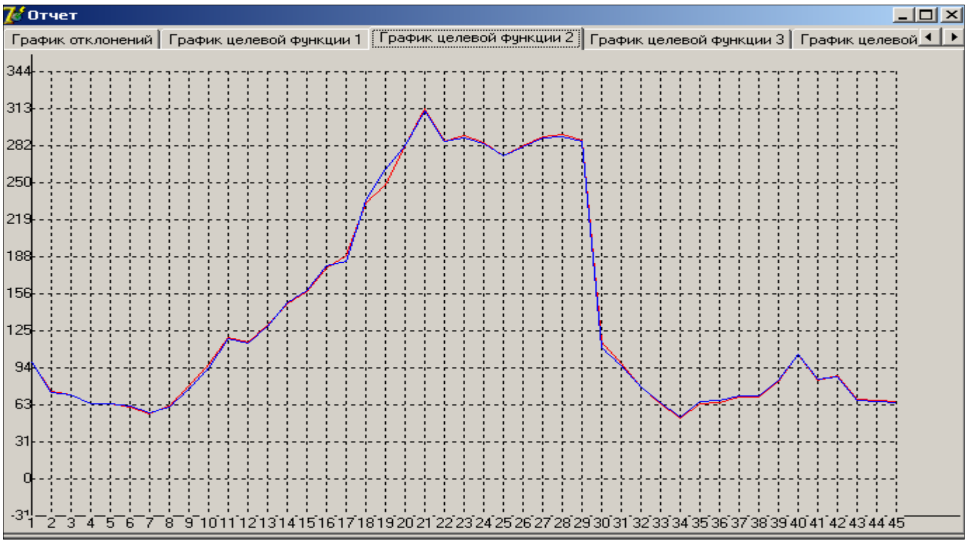

Рис. 2. Восстановленная функциональная зависимость $\Phi_2[x_1,x_2,x_3]$ в классе аддитивных функций и график функции $Y_2[X_1,X_2,X_3]$

Незначительное различие функциональных зависимостей, полученных в классе мультипликативных функций (рис. 1) и в классе аддитивных функций (рис. 2), свидетельствует о независимости компонент векторов x_1,x_2,x_3 и о достоверности восстановленных функциональных закономерностей.

В заключение отметим, что предложенный подход восстановления функциональных закономерностей на основе системы моделей в классе мультипликативных функций позволяет оценивать и корректировать достоверность восстановления по дискретным данным, независимо от свойств показателей области определения искомых функций.

Приведенные примеры показывают, что возможно обеспечить практически необходимую достоверность восстановления функциональных зависимостей по дискретным данным на основе предлагаемых систем моделей, реализованных на базе мультипликативных (1)–(3) и аддитивных [3] функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З.* Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Техническая кибернетика. Т. 32. Информационные системы и управление. — М.: ВИНИТИ, 1991. — **316**, № 4. — С. 842–846.
2. *Журавлев Ю.И., Рудаков К.В., Гуров С.И. и др.* Состояние и перспективы развития исследований в области обработки и распознавания видеоинформации // Информационные технологии. — 1998. — № 4. — С. 22–26.
3. *Панкратова Н.Д* Формирование целевых функций в системной задаче концептуальной неопределенности // Доповіді НАНУ. — 2000. — № 9. — С. 68–73.
4. *Вапник В.Н.* Восстановление зависимости по эмпирическим данным. — М.: Наука, 1979. — 448 с.
5. *Васильев В.И., Суровцев И.В.* Индуктивные методы обнаружения закономерностей, основанные на теории редукции // УСиМ. — 1998. — № 5. — С. 3–13.
6. *Васильев В.И.* Единство задач обучения распознаванию образов, восстановлению зависимостей и функций принадлежности // УСиМ. — 2002. — № 6. — С. 3–9.
7. *Колмогоров А.Н.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения //Доклады АН СССР. — 1957. — **114**, № 5. — С. 953–956.
8. *Корнейчук Н.П.* О методах исследования экстремальных задач теории наилучшего приближения // Успехи матем. наук. — 1974. — **29**, № 3. — С. 9–41.
9. *Ремез Е.Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. — Киев: Наук. думка. — 1969. — 624 с.
10. *Зуховицкий С.И. Авдеева А.И.* Линейное и выпуклое программирование. — М.: Наука, 1967. — 460 с.
11. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. — М.: Физматгиз, 1961. — 524 с.

Поступила 26.02.2004