

УТОЧНЕННЯ СПРОЩЕНИХ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ НА ОСНОВІ СИСТЕМНОГО ПІДХОДУ

А.М. СІЛЬВЕСТРОВ, Л.Ю. СПІНУЛ, О.В. ШЕФЕР

На основі системного підходу розглянуто декілька спрощених закономірностей електродинаміки, їх логічна несумісність і подальше узгодження шляхом введення та оптимального оцінювання малого параметру.

ВСТУП

При побудові математичних моделей фізичних об'єктів використовують спрощені лінійні стаціонарні відображення, які (з точністю до малих параметрів) відповідають динаміці процесів у об'єкті, що досліджується. Та існує безліч випадків, коли слід урахувати та експериментально визначити ці малі параметри.

Оцінювання малого параметру уточнених (квазінезлінійних, квазідинамічних) моделей реальних об'єктів — це специфічна задача, некоректності [1] якої можна позбутися лише використовуючи цілеорієнтовані експеримент і оптимальну обробку його результатів [2]. Як приклад, розглянемо найбільш поширені, досить прості об'єкти електродинаміки: конденсатор, котушка індуктивності, резистор. Фундаментальні рівняння Максвелла [2] для опису електромагнітних процесів в цих об'єктах не містять фізичних констант. Тому вони доповнюються відповідними матеріальними рівняннями. Для спрощених закономірностей (ізотропне, неферомагнітне, несегнетоелектричне середовище) це такі рівняння:

$$D = \varepsilon E, \quad B = \mu H, \quad j = \gamma E, \quad (1)$$

де D , E , H , B — відповідно вектори електричного зміщення, напруженості електричного і магнітного полів, магнітної індукції; ε , μ , γ — відповідно діелектрична і магнітна проникливість, електрична провідність середовища.

Реальність полягає в тому, що у матеріальному середовищі все взаємопов'язано і динамічно. Тому величини ε , μ , λ не будуть незмінними. Навіть у нескінченно малих об'ємах середовища, хоч слабко, але будуть залежати від змінних D , E , H , B . Тоді в конденсаторі ємність C як функція ε залежить від E чи від напруги U :

$$i = \frac{d}{dt}(CU) = \frac{dC}{dU} \frac{dU}{dt} U + C \frac{dU}{dt} = \left(C + \frac{dC}{dU} U \right) \frac{dU}{dt} = C(U) \frac{dU}{dt}. \quad (2)$$

У котушці індуктивності L як функція μ залежить від H або від струму i :

$$U = \frac{d}{dt}(Li) = \frac{dL}{di} \frac{di}{dt} i + L \frac{di}{dt} = \left(L + \frac{dL}{di} i \right) \frac{di}{dt} = l(i) \frac{di}{dt}. \quad (3)$$

В резисторі опір R як функція γ залежить від струму i , тому що від нього залежить температура t° , а від неї опір

$$U = (R_0 + dR(t^0(i)))i. \quad (4)$$

Малими параметрами у виразах (2), (3), (4) є: $\frac{dC}{dU}U$, $\frac{dL}{di}i$, $dR(t^0(i))$.

Далі як приклад розглянемо закони Ома, Джоуля — Ленца [2], рівняння термодинаміки резистора та їх несумісність, подолати яку можливо, якщо врахувати та оцінювати малий параметр dR .

АПРІОРНА МОДЕЛЬ

Як відомо [2], «Сила струму I на пасивній ділянці кола (резисторі) прямо пропорційна напрузі U на її кінцях».

$$I = GU. \quad (5)$$

Ця пряма пропорційність закону Ома ґрунтується на незмінності коефіцієнта (провідності) G , що залежить від γ .

Але в природі все взаємно пов'язано. За законом Джоуля — Ленца в резисторі з опором R за час t проходження постійного струму I електрична енергія переходить в тепло

$$Q = I^2 R t. \quad (6)$$

Якщо m — маса, c — коефіцієнт теплоємності, $K_{\text{ТВ}}$ — коефіцієнт тепловіддачі з площі S_0 охолодження резистора, то

$$dQ = P dt = cmd\theta^\circ + K_{\text{ТВ}} S_0 \Delta\theta^\circ dt, \quad (7)$$

де $\Delta\theta^\circ = \theta^\circ - \theta_0^\circ$ — різниця температур тіла і навколишнього середовища.

Для усталеного стану $\theta^\circ = \theta_\infty^\circ$, $dQ = 0$, $P_\infty = K_{\text{ТВ}} S_0 \Delta\theta_\infty^\circ$.

З виразу (3) отримаємо

$$P = \frac{cmd\Delta\theta^\circ}{dt} + K_{\text{ТВ}} S_0 \Delta\theta^\circ \quad (8)$$

або якщо для спрощення прийняти $P = P_\infty$, то

$$\frac{\tau_T d\theta^\circ}{dt} + \Delta\theta^\circ = \Delta\theta_\infty^\circ, \quad (9)$$

де $\tau_T = cm/K_{\text{ТВ}} S_0$ — теплова стала часу резистора.

Розв'язок рівняння (9)

$$\theta^\circ(t) = \theta_\infty^\circ - (\theta_\infty^\circ - \theta_0^\circ)e^{-\frac{t}{\tau_T}}, \quad \theta_\infty^\circ = \frac{I^2 R_\infty}{K_{\text{ТВ}} S_0}. \quad (10)$$

Тобто температура резистора $\theta^\circ(t)$ змінюється у часі внаслідок проходження через нього струму I .

Відома [2] спрощена залежність опору R від температури для усталеного теплового режиму

$$R(\theta_\infty) = R(\theta_0)[1 + \alpha \Delta\theta_\infty]. \quad (11)$$

Як бачимо з (5), (6), (10), (11), встановлюється зворотний зв'язок: струм створює тепло, тепло змінює опір і струм.

Опір R як функція струму I

$$I^2 R_\infty = I^2 R(\theta_0)(1 + \alpha \Delta\theta_\infty) = K_{\text{ТВ}} S_0 \Delta\theta_\infty. \quad (12)$$

Звідси

$$\Delta\theta_\infty = \frac{1}{\frac{K_{\text{ТВ}} S_0}{I^2 R(\theta_0)} - \alpha}. \quad (13)$$

Далі

$$R(I) = R(\theta_0) \left(1 + \frac{\alpha}{\frac{K_{\text{ТВ}} S_0}{I^2 R(\theta_0)} - \alpha} \right) = R_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{K_{\text{ТВ}} S_0}{\alpha I R(\theta_0)} - 1} \right). \quad (14)$$

Практично $\frac{K_{\text{ТВ}} S_0}{\alpha I^2 R(\theta_0)} \gg 1$, тому

$$R(I) \cong R(\theta_0) \left[1 + \frac{\alpha R(\theta_0) I^2}{K_{\text{ТВ}} S_0} \right] = R(\theta_0) [1 + \beta I^2], \quad (15)$$

де $\beta = \frac{\alpha R(\theta_0)}{K_{\text{ТВ}} S_0}$ — малий параметр, що враховує залежність $R(I^2)$.

Таким чином, отримаємо уточнені залежності законів Ома

$$I(t) = G(\theta^\circ(t, I^2))U \quad (16)$$

і Джоуля–Ленца

$$Q(t) = \int_0^t R(\theta^\circ(I^2, \tau)) I^2(\tau) d\tau. \quad (17)$$

У динаміці, якщо резистор з опором $R(\theta_0^\circ)$ ввімкнено до постійної напруги U ,

$$I(t) = \frac{U}{R(\theta^\circ(I^2, t))}, \quad (18)$$

де $R(t) = R(0) \left[1 + \alpha(\theta_\infty^\circ - \theta_0^\circ)(1 - e^{-\frac{t}{\tau_T}}) \right]$, $\theta_\infty^\circ = \theta^\circ(I^2)$.

Враховуючи, що $\alpha \Delta\theta \ll 1$, наближено маємо експоненціальний характер зміни струму і опору (рис. 1)

$$I(t) = I(0) \left[1 - \alpha \Delta\theta_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\Gamma}}} \right) \right]. \quad (19)$$

Опір $R(t)$ як відношення U до $I(t)$

$$R(t) = R(0) \left[1 + \alpha \Delta\theta_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_{\Gamma}}} \right) \right]. \quad (20)$$

Рівнянню (20) відповідає модель (рис. 2) резистора, ввімкненого на постійну напругу U .

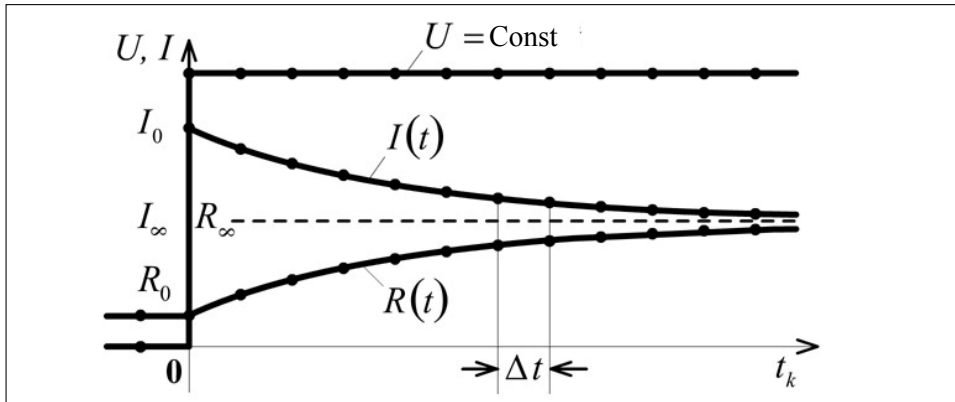


Рис. 1. Залежності $I(t)$, $R(t)$, $U(t)$

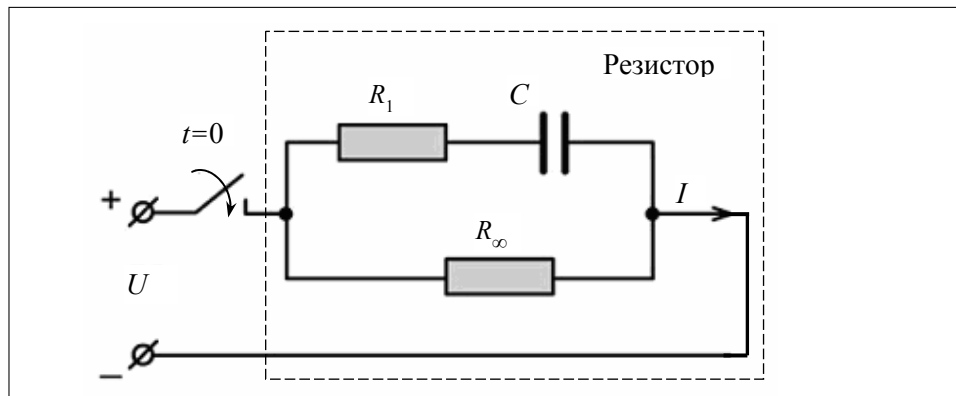


Рис. 2. Модель резистора при $U=\text{const}$

Тут $R_0 = \frac{U}{I(0)} = \frac{R_1 R_{\infty}}{R_1 + R_{\infty}}$. Звідси опір $R_1 = \frac{R_0 R_{\infty}}{R_0 - R_{\infty}}$, ємність $C = \frac{\tau_{\Gamma}}{R}$.

Враховуючи (20), резистор можна розглядати, як безінерційний лінійний елемент тільки в тих випадках, коли α або βI^2 прямує до нуля. Остаточне рішення відносно незмінності отримаємо з експерименту.

АПОСТЕРІОРНА МОДЕЛЬ

Оцінювання теплової сталої τ_T . В момент $t=0$ підключимо резистор до постійної напруги. З кроком Δt будемо вимірювати стале $U(t_k)$, змінний $I(t_k)$, $t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, $n\Delta t = (3 \dots 5)\tau_T$.

$$\hat{R}(t_k) = \frac{\hat{U}_k}{\hat{I}_k} = R_\infty - (R_\infty - R_0)e^{-\frac{t}{\tau_T}} + \delta \hat{R}_k, \quad (21)$$

де $\delta \hat{R}_k$ — статично незалежні похибки відношень $\frac{\hat{R}_k}{\hat{I}_k}$.

Для отримання оцінки $\hat{\tau}_T$ прологарифмуємо (21).

$$\ln(-R(t_k) + R_\infty + \delta R_k) = \frac{-t_k}{\tau_T} + \ln(R_\infty - R_0) \quad (22)$$

або

$$y_k + \delta y_k = a_0 + a_1 t_k, \quad (23)$$

де $a_0 = \ln(R_\infty - R_0)$, $a_1 = -\frac{1}{\tau_T}$.

Позбавимось a_0 в (23)

$$\left(y_k + \delta y_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = a_1 \left(t_k - \frac{t_n}{2} \right) \right). \quad (24)$$

МНК-оцінка [3] \hat{a}_1 , невідомої a_1

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{k=1}^n \left[y_k + \delta y_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right] \left(t_k - \frac{t_n}{2} \right)}{\sum_{k=1}^n \left(t_k - \frac{t_n}{2} \right)^2}. \quad (25)$$

Її математичне очікування дорівнює τ_T^{-1} , дисперсія

$$\sigma_{\hat{a}_1}^2 = \frac{\sigma_{\delta y}^2}{\sum_{k=1}^n \left(t_k - \frac{t_n}{2} \right)^2}. \quad (26)$$

Оцінювання малого параметру β_1 . Статична нелінійна залежність $R(I)$

$$\hat{R}(I_k) = \frac{\hat{U}_k}{\hat{I}_k} = R_0(1 + \beta_1 I_k^2) + \delta \hat{R}_k. \quad (27)$$

В стандартному вигляді

$$y_k + \delta y_k = \beta_0 + \beta_1 I_k^2, \quad (28)$$

де $\delta y_k \approx \frac{\delta U_k - R \delta I_k}{I_k}$; $M\{\delta y_k\} = 0$, $\sigma_{\delta y_k}^2 = \frac{\sigma_{U_k}^2 + R^2 \sigma_{I_k}^2}{I_k^2}$; $\sigma_{\delta y_k \delta y_c}^2 = 0$, $k \neq l$.

Якщо прийняти однакову точність вимірів \hat{U}_k і \hat{I}_k , то

$$\sigma_{\delta y_k}^2 = \frac{\sigma^2}{I^2}. \quad (29)$$

При зменшенні I_k до нуля похибка (29) зростає до нескінченності. Тому оптимальною оцінкою вектора $\beta = (\beta_0, \beta_1)$ буде марківська [4]

$$\hat{\beta} = \arg \min \delta y^T Q^{-1} \delta y, \quad Q^{-1} = \text{diag} \{ \sigma_{y_k}^{-2} \}. \quad (30)$$

Реалізація (25) полягає у зважуванні змінних рівняння (28):

$$\frac{I_k}{\sigma} y_k = \beta_0 \frac{I_k}{\sigma} + \beta_1 \frac{I_k^3}{\sigma}, \quad k = 1, n. \quad (31)$$

Скоротимо на σ і врахуємо, що $I_k y_k = U_k$. Тоді замість рівняння для опору (26) отримаємо рівняння для напруги

$$U_k = \beta_0 I_k + \beta_1 I_k^2, \quad (32)$$

а марківська оцінка (29) для (30) стає для (27) МНК-оцінкою [4]

$$\beta = \arg \min \varepsilon^T \varepsilon, \quad (33)$$

де ε — вектор-стовпець нев'язок $\varepsilon_k = U_k - \beta_0 I_k - \beta_1 I_k^2$.

Неточність вимірів U_k і I_k приводить до зміщення і розкиду компонентів β_0 і β_1 вектора β . Це особливо стосується β_1 , як малого параметра [1].

ЦІЛЕОРІЄНТАЦІЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

Проведемо цілеспрямований на визначення β_1 експеримент [3]. Сутність його планування полягає у використанні додаткової інформації про те, що залежність $U(I)$ проходить через точку $(0;0)$ координат (U, I) . Обмеженість на потужність резистора дає другу точку плану (U_{\max}, I_{\max}) . Щоб визначити третю точку доповнимо нелінійну модель (32) $U_n(I)$ лінійною

$$U_{\text{л}} = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} I = (\beta_0 + \beta_1 I_{\max}^2) I, \quad (34)$$

яка співпадає з (32) у точках $(0;0)$ і (U_{\max}, I_{\max}) . Позбавимося від β_0

$$U_{\text{л}}(I) - U_{\text{н}}(I) = \beta_1(I_{\max}^2 - I^2). \quad (35)$$

Третя точка I (рис. 3) оптимального плану

$$I^* = \arg \max |U_{\text{л}}(I) - U_{\text{н}}(I)| = \frac{I_{\max}}{\sqrt{3}}, \quad I \in [0, I_{\max}]. \quad (36)$$

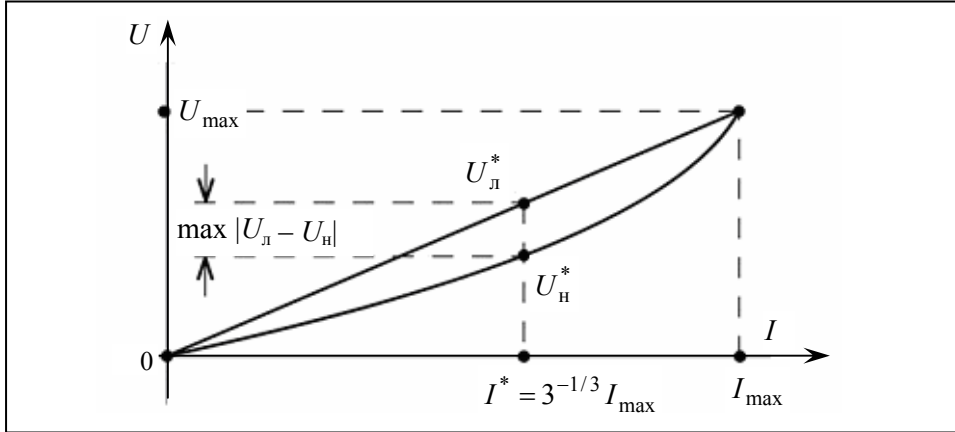


Рис. 3. Оптимальний план

Для точки (U^*, I^*)

$$\beta_1 = \frac{U_{\text{л}}^* - U_{\text{н}}^*}{(I_{\max}^2 - I^{*2})I^*} = \frac{3[U_{\max} - \sqrt{3}U_{\text{н}}^*]}{2I_{\max}^3}. \quad (37)$$

Відносна похибка δI_{\max} значно менша відносної похибки різниці $U_{\max} - \sqrt{3}U_{\text{н}}^*$.

Тому

$$\delta \hat{\beta}_1 \approx \frac{\partial \hat{\beta}_1}{\partial U_{\max}} \delta U_{\max} + \frac{\partial \hat{\beta}_1}{\partial U_{\text{н}}^*} \delta U_{\text{н}}^* = \frac{3}{2} I_{\max}^{-3} \delta U_{\max} - \frac{3\sqrt{3}}{2} I_{\max}^{-3} \delta U_{\text{н}}^*. \quad (38)$$

Дисперсія оцінки β_1

$$\sigma_{\beta_1}^2 = I_{\max}^{-6} \left(\frac{9}{4} \sigma_{U_{\max}}^2 + \frac{27}{4} \sigma_{U_{\text{н}}^*}^2 \right). \quad (39)$$

Якщо U_{\max} вимірюється γn разів, а $U_{\text{н}}^*$ $(1-\gamma)n$ разів ($\gamma < 1$) і похибки вимірів U мають однакову дисперсію σ_U , то дисперсії усереднених значень будуть менше відповідно в $u n$ і $(1-\gamma)n$ разів:

$$\sigma_{U_{\max}}^2 = \frac{\sigma_U^2}{\gamma n}, \quad \sigma_{U_{\text{н}}^*}^2 = \frac{\sigma_U^2}{(1-\gamma)n}. \quad (40)$$

Тоді

$$\sigma_{\beta_1}^2 = \frac{9}{4} \frac{\sigma_U^2 (1+2\gamma)}{I_{\max}^6 \gamma n (1-\gamma)}. \quad (41)$$

Звідси оптимальне співвідношення γ^* , за якого дисперсія (41) мінімальна, дорівнює $\gamma^* \cong 0,366$.

Для заданого значення дисперсії (36) за умови, що $\gamma = \gamma^*$, розрахуємо необхідну кількість n^* статично незалежних дослідів.

$$n^* \cong 16,8 \frac{\sigma_U^2}{\sigma_{\beta_1}^2} I_{\max}^{-6}. \quad (42)$$

Чим лінійніша залежність $U(I)$, тим менший коефіцієнт β_1 і, відповідно, його допустима дисперсія $\sigma_{\beta_1}^2$. І тим більша величина n^* . За умови однакових n^* оцінка (37) β_1 , якщо $\gamma^* \cong 0,366$, має суттєво меншу дисперсію (41), ніж компонент β_1 оцінки (33).

ВИСНОВКИ

Розглянуто процес уточнення законів Ома і Джоуля–Ленца. При цьому виникла проблема виміру малого параметра, яку було вирішено шляхом цілеспрямованого планування експерименту і оптимального оцінювання його результатів. У природі не існує лінійних стаціонарних залежностей внаслідок узагальненого взаємозв'язку елементів будь-якої реальної системи та руху матерії. Урахування цих фундаментальних закономірностей вказує на необхідність розв'язання задачі оцінювання малих параметрів більш точних моделей шляхом цілеорієнтації експерименту та оптимальної обробки його результатів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 286 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. Электричество. — М.: Физматлит МФТИ, 2002. — 654 с.
3. Сильвестров А.Н., Чинаев П.И. Идентификация и оптимизация автоматических систем. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 200 с.
4. Сэйдж Э.П., Мелса Дж. Теория оценивания и ее применение в теории связи и управления. — М.: Связь, 1976. — 300 с.

Надійшла 25.06.2003