УДК 518.9

# ОБ ОДНОЙ СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОГНОЗА ГОЛОСОВАНИЯ

**Е.Н. БЕЛЯЕВА, В.М. ПАНИН**

Формулируется упрощенная модель распределения финансовых средств по регионам некоторыми конкурирующими предвыборными объединениями в борьбе за получение как можно большего числа голосов избирателей. Модель сведена к отысканию точки равновесия по Нэшу. Для её определения используется численный метод решения монотонных вариационных неравенств с вырожденным оператором.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть некоторый регион (страна) является объединением $n$ более мелких территориальных единиц, количество избирателей в каждой из которых $T_j$, $j=1,\dots,n$ известно. Для определенности, $T_1$ — число избирателей в западном регионе (области), $T_2$ — в северном, $T_3$ — в центральном и т.д. Предвыборную борьбу ведут $m$ объединений, называемых далее партиями: $i=1$ — Народный фронт, $i=2$ — Партия зеленых и т.д. Каждая из партий имеет ограниченное финансирование $h_i$, $i=1,\dots,m$. Стратегия каждой $i$-й партии — распределить свои средства $x_{ij}$ по регионам $j=1,\dots,n$ так, чтобы набрать наибольшее число голосов.

Примем в качестве постулата, что функция выигрыша $f_{ij}(x_{ij})$ $i$-й партии в $j$-м регионе пропорциональна затраченным финансовым средствам $x_{ij}$, например, $f_{ij}(x_{ij}) = k_{ij}x_{ij}/h_i$ или $f_{ij}(x_{ij}) = 1 - e^{-k_{ij}x_{ij}/h_i}$, и число проголосовавших за неё в $j$-м регионе определяется как $T_j f_{ij}(x_{ij})$, $j=1,\dots,n$. Коэффициенты $k_{ij}$, называемые коэффициентами приоритета партий, постоянны и рассматриваются далее. Ясно, что общее число $f_i(x_{i1},\dots,x_{in})$ голосов, поданных за $i$-ю партию, определяется как их сумма по регионам:

$$f_i(x_{i1},\dots,x_{in}) = \sum_{j=1}^{n} T_j f_{ij}(x_{ij}), \quad i=1,\dots,m. \tag{1}$$

Обозначим $x_{(i)}^T = \left\{x_{i1},\dots,x_{in}\right\}$; $x^T = \left\{x_{(1)}^T,\dots,x_{(m)}^T\right\}$, где $T$ — символ транспонирования; $x_{(i)} \in R^n$, $x \in R^{mn}$ — вектор-столбцы. Для иллюстрации приведем следующую таблицу.

© *Е.Н. Беляева, В.М.Панин,* 2003

Распределение финансовых средств и поданных голосов

| Партии $(i)$ \ Регионы $(j)$ | | Количество избирателей | | | $\sum_{j=1}^{n}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | $j$ | $n$ | |
| | | $T_1$ | $T_j$ | $T_n$ | $M$ |
| 1 | Финансовые средства | $x_{11}$ | $x_{1j}$ | $x_{1n}$ | $h_1$ |
| | «За» | $T_1 f_{11}(x_{11})$ | $T_j f_{1j}(x_{1j})$ | $T_n f_{1n}(x_{1n})$ | $f_1(x_{(1)})$ |
| $i$ | Финансовые средства | $x_{i1}$ | $x_{ij}$ | $x_{in}$ | $h_i$ |
| | «За» | $T_1 f_{i1}(x_{i1})$ | $T_j f_{ij}(x_{ij})$ | $T_n f_{in}(x_{in})$ | $f_i(x_{(i)})$ |
| $m$ | Финансовые средства | $x_{m1}$ | $x_{mj}$ | $x_{mn}$ | $h_m$ |
| | «За» | $T_1 f_{m1}(x_{m1})$ | $T_j f_{mj}(x_{mj})$ | $T_n f_{mn}(x_{mn})$ | $f_m(x_{(m)})$ |

Здесь $M$ — общее число избирателей, «За» — количество проголосовавших «за».

Пояснения требуют лишь коэффициенты $k_{ij}$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$. Они учитывают известное предпочтение избирателей $j$-го региона в пользу той или иной партии. Например, при $m = 2$, $n = 3$ запись $\{k_{11}; k_{21}\} = \{1; 0{,}5\}$, $\{k_{12}; k_{22}\} = \{0{,}5; 1\}$, $\{k_{13}; k_{23}\} = \{0{,}8; 0{,}8\}$ означает, что в первом регионе предпочтение будет отдано первой партии, во втором — второй, в третьем — их шансы равны, но не так сильны как у первой или второй партии в соответствующих регионах.

Определение коэффициентов $k_{ij}$ — сложная социологическая проблема. Для простоты можно предположить, что все $k_{ij}$ принимают значения из $m$ фиксированных чисел $k_1,\dots,k_m$, где $1 \ge k_1 \ge \dots \ge k_m \ge 0$; $k_1$ означает наивысший приоритет, $k_m$ — самый низкий. При отсутствии информации о приоритете партий значения $k_{ij}$ можно полагать равными, например, $k_{ij} = 1$ для всех $i, j$. Модель в этом случае называется моделью без приоритета (или с равным приоритетом) партий.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ

Стратегия поведения каждой партии заключается (при отсутствии компромисса) в максимизации поданных за нее голосов $f_i(x_{(i)})$:

$$\max_{x_{(i)}} f_i(x_{(i)}), \quad i = 1, \dots, m \tag{2}$$

на допустимом множестве. Допустимое множество определяется следующими условиями.

Во-первых, необходимо соблюсти требование ограниченности финансовых средств:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le h_i, \quad i=1,\dots,m, \quad x_{ij} \ge 0 \quad \forall i,j. \tag{3}$$

Во-вторых, количество проголосовавших «за» в каждом $j$-м регионе не может превышать числа избирателей $j$-го региона:

$$\sum_{i=1}^{m} T_j f_{ij}(x_{ij}) \le C_j T_j, \quad j=1,\dots,n,$$

где $C_j$ — коэффициент участия в голосовании избирателей $j$-го региона. Предполагая $C_j = 1, \quad j=1,\dots,n$, вместо предыдущего условия запишем

$$\sum_{i=1}^{m} f_{ij}(x_{ij}) \le 1, \quad j=1,\dots,n. \tag{4}$$

Соотношения (3), (4) определяют допустимое множество $\Omega$ значений аргумента $x \in R^{nm}$, на котором рассматриваются задачи (2).

Формулировка (2)–(4) представляет собой известную запись равновесия по Нэшу с $m$ «игроками» (партиями) и их функциями полезности $f_i(x)$, когда $f_i(x) = f_i(x_{(i)})$ — выпуклые функции, $i=1,\dots,m$. Решением по Нэшу принято считать так называемую точку равновесия $(x^*)^T = \left\{(x^*_{(1)})^T,\dots,(x^*_{(m)})^T\right\}$, компоненты $x^*_{(i)}$ которой объявляются решениями соответствующих задач (2). По определению равновесия при выборе другими «игроками» (например, $i=1,\dots,m-1$) неоптимальных значений $y_{(i)} \ne x^*_{(i)}, \quad i=1,\dots,m-1$ последний $m$-й игрок может даже превысить значение $f_m^* = f_m(x^*_{(m)})$, максимизируя функцию $f_m(x_{(m)})$ в (2) при ограничениях (3), (4), в которых значения $x_{(i)} = y_i, \; i=1,\dots,m-1$ фиксированы. Гарантированный же выигрыш $i$-го «игрока» составляет величина $f_i^* = f_i(x^*_{(i)})$, для чего и необходимо найти $x^*_{(i)}$.

Отыскание точки равновесия $x^*$ легко свести ( [1, 2] и др.) к решению вариационного неравенства (ВН)

$$\left\langle F(x^*), x - x^* \right\rangle \ge 0 \quad \forall x \in \Omega, \tag{5}$$

где $F(x): R^{mn} \to R^{mn}$. Действительно, согласно необходимым условиям экстремума первого порядка для задачи (2), имеет место

$$\left\langle \frac{df_i(x^*_{(i)})}{dx_{(i)}}, \; x_{(i)} - x^*_{(i)} \right\rangle \le 0, \quad i=1,\dots,m,$$

где $\langle\, , \rangle$ — символ скалярного произведения векторов; $x_{(i)}$ — компоненты произвольного допустимого вектора $x \in \Omega$. Обозначая $F_i(x) =$

$= -\,df_i(x_{(i)})\big/dx_{(i)}$, $\; i=1,\ldots,m$, приходим к ВН (5), в котором $F^T(x) =$ $= \left\{ F_1^T(x), \ldots, F_m^T(x) \right\} \in R^{mn}$.

Обозначим $X^+ = \left\{ x \in R^{mn} \;\middle|\; x_{ij} \ge 0, \quad i=1,\ldots,m; \; j=1,\ldots,n \right\}$,

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - h_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$g_{m+j}(x) = \sum_{i=1}^{m} f_{ij}(x_{ij}) - 1, \quad j = 1, \ldots, n \tag{6}$$

и сформулируем задачу окончательно.

Необходимо найти точку $x^* \in \Omega$, являющуюся решением следующего ВН:

$$\left\langle F(x^*),\, x - x^* \right\rangle \ge 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

$$\Omega = \left\{ x \in X^+ \;\middle|\; g_r(x) \le 0, \quad r = 1, \ldots, m+n \right\}. \tag{7}$$

Примем для исследования линейную форму функции выигрыша и $k_{ij} = 1$ для всех $i, j$, т.е.

$$f_{ij}(x_{ij}) = x_{ij} h_i^{-1}, \quad f_i(x_{(i)}) = h_i^{-1} \sum_{j=1}^{n} T_j x_{ij}. \tag{8}$$

Тогда функции ограничений $g_r(x)$ линейны по $x$, а оператор $F(x) = F$ является постоянным с компонентами $F_i^T = h_i^{-1}\{ T_1, \ldots, T_n \}$, $i = 1, \ldots, m$. Представив ограничения (7) в виде $g(x) = Ax - b \le 0$, легко убедиться, что матрица $A$ и вектор $b$ имеют следующую структуру:

$$A = \{a_{rl}\} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{n}} & \quad & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{n}} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ m \\ m+1 \\ \vdots \\ m+n \end{array} & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ h_1^{-1} & & & \cdots & h_m^{-1} & & \\ & \ddots & & \cdots & & \ddots & \\ & & h_1^{-1} & \cdots & & & h_m^{-1} \end{bmatrix}}_{nm} \end{array}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \\ b_{m+1} \\ \vdots \\ b_{m+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Строки $a_r = g_r'^{\,T}(x)$ матрицы $A$ при $r = 1, \ldots, m$ имеют вид $a_r =$ $= \left\{ 0_{(1)}^T, \ldots, 0_{(r-1)}^T, 1_{(r)}^T, 0_{(r+1)}^T, \ldots, 0_{(m)}^T \right\}$, где $0_{(i)}$ и $1_{(i)}$ — $n$-мерные вектор-столбцы с координатами соответственно 0 и 1. Строки $a_r = g_{m+j}'^{\,T}(x)$,

$j=1,\ \ldots,n$ матрицы $A$ образуют (см. структуру $A$) подматрицу $(n\times nm)$ с ненулевыми диагональными отрезками $\left\{h_i^{-1},\ldots,h_i^{-1}\right\}\in R^n$, $i=1,\ \ldots,m$.

**АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ**

Перейдем к численному решению вариационного неравенства (7) с указанными $F(x),\ g_r(x)$. Необходимые условия первого порядка для него хорошо известны:

$$F(x^*)+\sum_{r=1}^{m+n}\lambda_r^* g_r'(x^*)=0,\quad \lambda_r^* g_r(x^*)=0,$$

$$\lambda_r^*\geq 0,\quad r=1,\ \ldots,m+n,\quad x_{ij}^*\geq 0. \tag{9}$$

Вследствие линейности функций $g_r(x)$ условия (9) являются также и достаточными, т.е. отыскание точки $x^*$ сводится к решению системы (9). Отметим, что оператор $F(x)$ для ВН (7) не является сильно монотонным, $F(x)=\text{const}$. Метод Пшеничного [3], как и другие методы проекционного типа [2] для решения вырожденного ВН (7), является достаточно трудоемким, так как требует решения вспомогательной задачи квадратичного программирования. Чтобы избежать этого, перейдем от ВН (7) к другому ВН.

Обозначим $\Lambda^+=\left\{\lambda\in R^{m+n}\ \middle|\ \lambda_r\geq 0,\quad r=1,\ \ldots,m+n\right\}$,

$$z=\begin{pmatrix}x\\ \lambda\end{pmatrix},\quad L_z(z)=\begin{pmatrix}L_x(z)\\ -L_\lambda(z)\end{pmatrix},\quad L_x(z)=F+A^T\lambda,$$

$$L_\lambda(z)=g(x)=\begin{pmatrix}g_1(x)\\ \ldots\\ g_{m+n}(x)\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Отметим, что векторы $z$ и $L_z(z)$ имеют размерность $mn+m+n$, $z^*\in\Omega\times\Lambda^+$. Как показано в работе [2], оператор $L_z(z)$ является монотонным, т.е. $\left\langle L_{zz}(\tilde z)z,\ z\right\rangle\geq 0$ при любых $\tilde z\in R^{mn}\times\Lambda^+$, $z\in R^{mn+m+n}$, и на основании (7), (9) имеет место следующее ВН:

$$\left\langle L_z(z^*),\ z-z^*\right\rangle\geq 0,\quad \forall z\in X^+\times\Lambda^+. \tag{11}$$

Хотя его размерность гораздо выше, чем у ВН (7), решать ВН (11) проще, чем (7), поскольку проектирование на множество $Z^+=X^+\times\Lambda^+$ осуществляется просто.

Применим для решения ВН (11) экстраградиентный метод Корпелевич [4] $z^{k+1}=\Pi_{Z^+}\left(z^k-\alpha\,L_z(\bar z^k)\right)$, где $\bar z^k=\Pi_{Z^+}\left(z^k-\alpha L_z(z^k)\right)$, $\alpha\leq 1/L$;

$L$ — константа Липшица для оператора $L_z(z)$; $\Pi_{Z^+}$ — оператор проектирования на множество $Z^+$.

Оценим $L$. Для произвольных $z^1$, $z^2$ согласно обозначениям (10) имеем $\| L_z(z^1) - L_z(z^2) \| \le \| L_{zz}(z) \| \| z^1 - z^2 \|$, где $L_{zz}(z) = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ -A & 0 \end{bmatrix}$. Так как $\| z \|$ — евклидова норма вектора $z$, то $\| L_{zz}(z) \|$ — согласованная с ней спектральная норма (несимметричной) матрицы $L_{zz}(z)$, которую сложно вычислять. Как известно из линейной алгебры, $\| L_{zz}(z) \| \le \| L_{zz}(z) \|_E$, где $\| L_{zz}(z) \|_E$ — легко вычисляемая евклидова норма матрицы $L_{zz}(z)$. Поэтому в качестве $L$ можно взять

$$L = \| L_{zz}(z) \|_E = \left( 2 \sum_{r=1}^{m+n} \sum_{l=1}^{mn} a_{rl}^2 \right)^{1/2} .$$

Учитывая структуру матрицы $A$, окончательно находим

$$L = \sqrt{2} \left[ nm + n \sum_{i=1}^{m} (h_i^{-1})^2 \right]^{1/2} . \qquad (12)$$

**ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА**

Обозначим $z_\rho^k$ компоненты вектора $z^k \in Z^+$, $\rho = 1, \dots, mn + m + n$, $\left(z^k\right)^T = \left\{ \left(x_{(1)}^k\right)^T, \dots, \left(x_{(m)}^k\right)^T, \lambda_1^k, \dots, \lambda_{m+n}^k \right\}$. Пусть $z^0$ — произвольное начальное приближение из $Z^+$, найдено $\alpha = 1/L$ с учетом (12) и задана точность окончания расчета $\varepsilon$. Опишем $k$-ю итерацию метода в точке $z_k \in Z^+$, $k = 0, 1, \dots$.

<u>Шаг 1.</u> Вычислить согласно (10) компоненты $\left(L_z(z^k)\right)_\rho$ вектора $L_z(z^k)$, $\rho = 1, \dots, mn + m + n$, учитывая, что $g_r(x^k) = \left\langle a_r, x^k \right\rangle - b_r$ и $A^T \lambda^k = \sum_r \lambda_r^k a_r^T$, $r = 1, \dots, m + n.$

<u>Шаг 2.</u> Найти компоненты $\bar{z}_\rho^k$ вектора $\bar{z}^k$.

$$\bar{z}_\rho^k = \max\left\{ 0;\ z_\rho^k - \alpha \left(L_z(z^k)\right)_\rho \right\}, \quad \rho = 1, \dots, mn + m + n .$$

<u>Шаг 3.</u> Аналогично шагу 1 вычислить $L_z(\bar{z}^k)$.

<u>Шаг 4.</u> Найти $z^{k+1}$.

$$z_\rho^{k+1} = \max\left\{ 0;\ z_\rho^k - \alpha \left(L_z(\bar{z}^k)\right)_\rho \right\}, \quad \rho = 1, \dots, mn + m + n .$$

Шаг 5. Если $\left| z_\rho^{k+1} - z_\rho^k \right| \le \varepsilon, \quad \forall \rho = 1, \dots, mn + m + n$, то принять $z^k \approx z^*$. Расчет окончен. В противном случае обозначить $k := k + 1$. Конец итерации.

Алгоритм легко обобщается на случай, когда $k_{ij} \le 1$ и $C_j \le 1$, $i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$. Если $f_{ij}(x_{ij})$ — любые выпуклые функции, то несложно распространить алгоритм и на этот случай. Однако если $f_{ij}(x_{ij}) = 1 - e^{-k_{ij} x_{ij} / h_i}$, то модель становится невыпуклой, ограничения (4) могут определять несвязное допустимое множество, условия (9) перестают быть достаточными, и задача отыскания $x^*$ усложняется.

**ЛИТЕРАТУРА**


1. *Nagurney A.* Network economics: a variational inequality approach. — Norwell: Kluwer academ. publ., 1993. — 326 p.
2. *Панин В.М., Скопецкий В.В., Лаврина Т.В.* Модели и методы конечномерных вариационных неравенств // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 6. — С. 47–64.
3. *Пшеничный Б.Н., Калжанов М.У.* Метод решения вариационных неравенств // Кибернетика и системный анализ. — 1992. — № 6. — С. 48–55.
4. *Корпелевич Г.М.* Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. — 1976. — **12**, № 4. — С. 747–756.


*Поступила 21.04.2003*