УДК 519.86; 338.24

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЦЕН ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Ю.В. БОНДАРЕНКО

В работе представлена модель процесса изменения цен финансовых активов на рынке. Описан путь построения модели, ее экономическая интерпретация, найдены моменты процесса и исследовано его поведение в предельном случае. Для сравнения с данной моделью приведены примеры некоторых других существующих моделей.

ВВЕДЕНИЕ

Современные методы решения теоретических и эмпирических финансовых проблем основаны на использовании широкого спектра моделей, описывающих динамику изменения цен финансовых активов, и в первую очередь — цен акций. Наиболее известным примером модели непрерывного типа является модель геометрического броуновского движения [1] (диффузионная модель рынка):

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\},$$

где S_0, S_t — соответственно цена акции в начальный момент времени и в момент времени t; W_t — винеровский процесс; σ — коэффициент волатильности, который в общем случае может иметь стохастическую структуру (т.н. модели со стохастической волатильностью); μ — коэффициент сноса. Более современные работы, связанные с построением непрерывных моделей, можно найти, например, в [2, 3]. В эмпирических эконометрических расчетах используется ряд моделей, основанных на анализе временных рядов (модели ARCH, GARCH, и т.д.)

При построении стратегии инвестора на рынке с дискретным временем наиболее широкое распространение получила так называемая биномиальная модель, или модель Кокса–Росса–Рубинштейна [4]:

$$S_n = (1+\rho_1)\ldots(1+\rho_n)S_0,$$

где S_0, S_n — соответственно цена акции в моменты времени 0 и n; ρ_k — независимые биномиально распределенные случайные величины. В недавней работе [5] была предложена модель изменения цен финансовых активов, имеющая дискретную структуру:

$$p(t) = p(0) + \sum_{u=1}^{N(t)} Z_u ,$$

где $p(0)$, $p(t)$ — соответственно цена актива в (дискретные) моменты 0 и t ; $N(t)$ — считающий (пуассоновский) процесс, описывающий количество финансовых операций на рынке, имеющих своим следствием изменение цены рассматриваемого актива, к моменту времени t; Z_u — изменение цены актива (return), связанное с u-й операцией. Подобный подход тесно связан с известной моделью актуарной математики, описывающей процесс риска страховой компании при выплате страховых премий (см. [6]). Далее, авторами предложена следующая декомпозиция величин Z_u :

$$Z_u = A_u D_u S_u ,$$

где $A_u = \{0,1\}$, $D_u = \{-1,1\}$, $S_u = \{1,2,3,...\}$. Компонента A_u определяет активность цены: если $A_u = 0$, то u-я операция на рынке не влияет на цену актива, изменения цены не происходит (In-Active Proce Movement); если $A_u = 1$, цена в результате u-й операции меняется (Active Price Movement). В этом случае $Z_u = D_u S_u$. Компонента D_u представляет собой направление изменения цены: при $D_u = -1$ цена уменьшается, а при $D_u = 1$ — возрастает. Наконец, компонента S_u описывает величину изменения цены: $S_u = +1; +2;...$ (предполагается, что процесс S_u имеет строго положительные целые значения).

Помимо описанного выше подхода рассматривались и другие пути представления процесса Z_u: например, в [7] процесс Z_u моделируется в виде марковской цепи.

В настоящей работе используется альтернативный подход к построению непрерывной модели динамики цен финансовых активов, являющийся продолжением идеи, изложенной в [8].

1. АЛЬТЕРНАТИВНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА $S(t)$

1.1 Описание модели

Значение цены финансового актива $S(t)$ в момент времени t будем описывать с помощью следующего процесса:

$$S(t) = S(0) + \int_0^t (-1)^{N(s)} (1 - M(s)) v(s) ds ,$$

где $N(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью λ; $M(t)$ — случайная величина, принимающая значения 1 и 0, соответственно с вероятностями p и $1-p$, $0 < p < 1$; $v(t)$ — случайная величина, распределенная нормально с параметрами $\mu \neq 0$ и σ^2. Необходимо также отметить, что используемые при построении модели процессы $M(t)$, $v(t)$ должны быть синхронизованы с процессом $N(t)$ (значения всех трех процессов изменяются одновременно). Кроме того, предполагается, что процессы $N(t)$, $M(t)$ и $v(t)$ независимы. На рис. 1 представлена реализация описанного выше процесса $S(t)$.

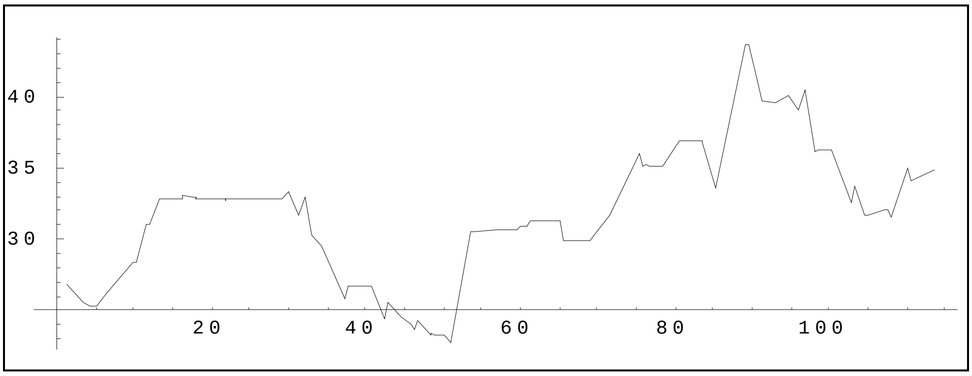

Рис. 1. Процесс $S(t)$ при $S(0)=2,5$

Рассмотрим предложенный подход к построению модели более подробно. Пусть τ_{k-1} и τ_k — случайные моменты $(k-1)$-й и k-й финансовой операции на рынке соответственно. Будем предполагать, что между этими моментами цена изменяется как $v(\tau_k-\tau_{k-1})$, где v может принимать любые значения (положительные, отрицательные, нулевые). Это выражение может быть записано как интеграл $\int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}(-1)^{N(y)}(1-M(y))v(y)dy$, где $N(y)$, $M(y)$ и $v(y)$ — соответственно значения процессов $N(t)$, $M(t)$ и $v(t)$ на отрезке $[\tau_{kt-1},\tau_k)$.

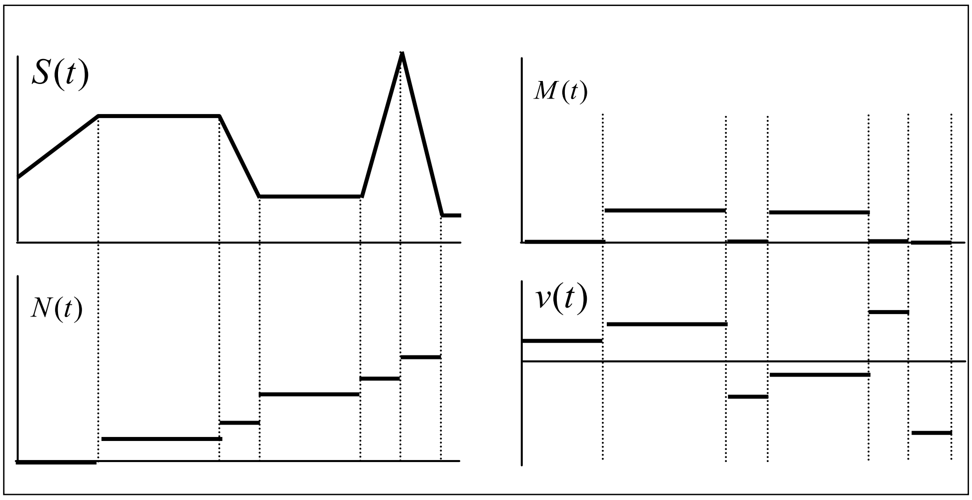

Рис. 2. Графики процесса $S(t)$ и формирующих его процессов $N(t)$, $M(t)$, $v(t)$

Следовательно, в момент времени t в силу аддитивности интеграла цена актива будет

$$S(t)=S(0)+\int_0^{\tau_1}(-1)^{N(y)}(1-M(y))v(y)dy+\ldots+\int_{\tau_{k+j}}^{t}(-1)^{N(y)}(1-M(y))v(y)dy=$$

$$=S(0)+\int_0^{t}(-1)^{N(y)}(1-M(y))v(y)dy\,,\quad k,j\in I.$$

Приведенные на рис. 2 графики наглядно демонстрируют связь между процессами $N(t)$, $M(t)$, $v(t)$ и $S(t)$.

Примечание 1. Нормальное распределение случайной величины $v(t)$ следует из эмпирических и логических заключений. Действительно, $v(t)=\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}$ (отношение изменения цены актива к временному интервалу, где $\Delta t=t_k-t_{t-1}$, $\Delta S(t)=S(t_k)-S(t_{k-1})$, $t\in[t_{t-1},t_k)$). Если $\Delta t\to\infty$, то вероятность $P\left(\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}<x\right)\to 1$; при $\Delta t\to 0$, соответственно, имеем $P\left(\dfrac{\Delta S(t)}{\Delta t}<x\right)\to 0$. Вероятность принимает значения между 0 и 1 на относительно среднем временном интервале.

Примечание 2. Конечно, теоретически значение процесса $S(t)$ в какой-то момент времени может стать отрицательным. Однако, как и во всех моделях подобного типа, вероятностью этого события можно принебречь в силу того, что частота финансовых операций на рынке достаточно высока.

1.2 Некоторые числовые характеристики процесса

Прежде всего, рассчитаем первый и второй моменты рассматриваемого процесса:

$$ES(t)=S(0)+E\left(\int_0^{t}(-1)^{N(s)}(1-M(s))v(s)ds\right)=$$

$$=S(0)+\int_0^{t}E(-1)^{N(s)}E(1-M(s))Ev(s)ds=S(0)+\frac{\left(1-e^{-2\lambda t}\right)(1-p)\mu}{2\lambda};$$

$$ES^2(t)=E\left(S(0)+\int_0^{t}(-1)^{N(s)}(1-M(s))v(s)ds\right)^2=$$

$$=S^2(0)+2S(0)E\left(\int_0^{t}(-1)^{N(s)}(1-M(s))v(s)ds\right)+$$

$$+E\left(\int_0^t\int_0^t(-1)^{N(s_1)}(1-M(s_1))v(s_1)(-1)^{N(s_2)}(1-M(s_2))v(s_2)ds_1ds_2\right)=$$

$$=S^2(0)+\frac{S(0)\left(1-e^{-2\lambda t}\right)(1-p)\mu}{\lambda}+$$

$$+\int_0^t\int_0^t E(-1)^{N(s_1)+N(s_2)}E[(1-M(s_1))(1-M(s_2))]E[v(s_1)v(s_2)]ds_1ds_2=$$

$$=S^2(0)+\frac{S(0)\left(1-e^{-2\lambda t}\right)(1-p)\mu}{\lambda}+$$

$$+(1-p)\left(\sigma^2+\mu^2\right)\int_0^t\int_0^{s_2}2e^{-2\lambda(s_2-s_1)}ds_1ds=S^2(0)+$$

$$+\frac{S(0)\left(1-e^{-2\lambda t}\right)(1-p)\mu}{\lambda}+\frac{(1-p)\left(\sigma^2+\mu^2\right)\left(2\lambda t+e^{-2\lambda t}-1\right)}{2\lambda^2}.$$

Располагая информацией о значении моментов процесса, мы можем оценить вероятность того, что цена актива превысит уровень $A>S(0)$ в некоторый момент времени T. По неравенству Чебышева

$$P\{|S(T)|\ge A\}\le\frac{E(S(T))^2}{A^2}=\frac{S^2(0)}{A^2}+\frac{S(0)\left(1-e^{-2\lambda t}\right)(1-p)\mu}{\lambda A^2}+$$

$$+\frac{(1-p)\left(\sigma^2+\mu^2\right)\left(2\lambda T+e^{-2\lambda T}-1\right)}{2\lambda^2A^2}.$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РАССМАТРИВАЕМОГО ПРОЦЕССА

Теорема. Пусть $\lambda\to\infty$, $p\to 0$ и $\dfrac{\sigma^2+\mu^2}{\lambda^2}\to 1$. Тогда процесс $\xi(t)=\int_0^t(-1)^{N(y)}(1-M(y))v(y)dy$ — винеровский процесс.

Доказательство. Иными словами, необходимо показать, что при сформулированных условиях приращения процесса $\xi(t)-\xi(s)$ независимы и распределены нормально с дисперсией $t-s$. Если $\varphi_{(\xi(s)-\xi(u))+(\xi(t)-\xi(s))}(t)$ — характеристическая функция суммы приращений, $u<s<t$, то

$$\varphi_{(\xi(s)-\xi(u))+(\xi(t)-\xi(s))}(x) = E\exp\{ix(\xi(s)-\xi(u))+(\xi(t)-\xi(s))\} =$$

$$= E\exp\left\{ix\int_u^s (-1)^{N(y)}(1-M(y))v(y)dy + ix\int_s^t (-1)^{N(y)}(1-M(y))v(y)dy\right\} =$$

$$= E\exp\left\{ix\int_u^s (-1)^{N(y)}(1-M(y))v(y)dy\right\}E\exp\left\{ix\int_s^t (-1)^{N(y)}(1-M(y))v(y)dy\right\} =$$

$$= \varphi_{(\xi(s)-\xi(u))}(x)\varphi_{(\xi(t)-\xi(s))}(x).$$

Далее, поскольку

$$E(\xi(t)-\xi(s))^2 = \frac{\left(2\lambda(t-s)+e^{-2\lambda(t-s)}-1\right)(1-p)\left(\sigma^2+\mu^2\right)}{2\lambda^2} -$$

$$-\left(\frac{(1-p)\mu\left(e^{-2\lambda s}-e^{-2\lambda t}\right)}{2\lambda}\right)^2 \underset{\substack{\lambda\to\infty \\ p\to 0 \\ \frac{\sigma^2+\mu^2}{\lambda^2}\to 1}}{\longrightarrow} t-s,$$

то следует утверждение теоремы.

ВЫВОДЫ

Предложенную в работе модель можно отнести к «типу Башелье» (см. [9]). Безусловный интерес для последующего теоретического и практического исследования представляет расчет стоимостей конкретных опционов относительно риск-нейтральной (мартингальной) меры, соответствующей данному процессу. Представленный процесс смоделирован с помощью программных средств Mathematica 4.0.

ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Samuelson P.A.*, Rational Theory of Warrant Pricing // Industrial Management Review — 1965. — **6**. — P. 13–31.
2. *Ait-Sahalia Y.* Non-parametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities // Econometrica. — 1996. — **64**. — P. 527–560.
3. *Duffie D*. Dyndmic Asset Procing Theory. — New Jersey: Princeton University Press. — 1992.
4. *Ross S.A*. The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing // Journal of Economic Theory. — 1976. — **13**. — P. 341–360.
5. *Rydberg T. H., Shephard N.* A Modelling Framework for the Prices and Times of Trades Made on the NYSE. In W. J. Fitzgerald, R. L. Smith, A. T. Walden, and

P. C. Young (Eds.), Non-linear and Non-stationary Signal Processing. Cambridge: Isaac Newton Institute and Cambridge University Press. Forthcoming. — 2000.

6. *Grandell J*. Aspects of Risk Theory. — Berlin: Springer. — 1991.
7. *Rogers, L. C. G., Zane O*. Designing and estimating models of high frequency data. Unpublished paper: Department of Mathematics. University of Bath. Presented at Workshop on Mathematical Finance. University of Bremen, Germany, February 1998.
8. *Бондаренко Ю.В*. Вероятностная модель описания эволюции финансовых индексов // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 4.
9. *Bacheliér L*. Theórie de la Spéculation // Ann. Ecoll. Norm. Sup. — 1900. — **17**. — P. 21–86 (Reprinted in: The Random Character of Stock market prices. MIT Press, 1967. — P. 17–78).

Поступила 20.07.2002