

УДК 517.4

## ХАОТИЧЕСКАЯ АДВЕКЦИЯ В ДВУМЕРНОМ СТОКСОВОМ ТЕЧЕНИИ В КРУГЕ

Х. АРЕФ\*, Т. А. ДУНАЕВА\*\*, В. В. МЕЛЕШКО\*\*\*

\* Университет шт. Иллинойс, Урбана-Шампейн, США

\*\* Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев

\*\*\* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 28.12.1999

Рассматривается течение Стокса, обусловленное ротлетом в круге. Решение показывает, что для определенного положения ротлета течение имеет дополнительную неподвижную точку, симметрично расположенную внутри круга. Таким образом, может быть построена модель "мерцающих" ротлетов, в которой "выключенный" ротлет не возмущает поток. По-видимому, такая модель выглядит предпочтительней модели "мерцающих" вихрей при обсуждении процессов хаотической адвекции в Стоксовых течениях. Она может быть успешно применена для сравнения с экспериментальными и численными исследованиями данного явления в круглом цилиндрическом сосуде с двумя вращающимися цилиндрами.

Розглядається течія Стокса у крузі, яка зумовлена рухом ротлета. Як показує розв'язок, для визначеного положення ротлету течія має додаткову нерухому точку, яка симетрично розташована всередині круга. Таким чином, може бути побудована модель "блимаючих" ротлетів, у якій "виключений" ротлет не збурює потік. Очевидно, така модель переважає модель "блимаючих" вихорів при обговоренні процесів хаотичної адвекції у Стоксових течіях. Вона може бути з успіхом використана для порівняння з експериментальними та численними дослідженнями даного явища в круглому циліндричному посуді з двома циліндрами, які обертаються.

The Stokes flow due to a rotlet in a circle is determined. The solution shows that for a certain position of the rotlet, the flow has a second stagnation point symmetrically placed inside the circle. Thus, a "blinking rotlet" model can be constructed in which the rotlet that is "off" does not disturb the flow. This model seems preferable to the "blinking vortex" flow when discussing chaotic advection by a Stokes flow, and is useful for comparisons with experimental and computational investigations of this phenomenon in a cylindrical tank with two rotating cylinders.

### ВВЕДЕНИЕ

Известно [1, 2, 8, 11], что двумерные нестационарные ламинарные течения жидкости могут генерировать хаотические траектории индивидуальных жидких частиц. В последнее время к этому явлению, получившему название "хаотическая адвекция" [1], проявляется большой интерес исследователей [2, 3, 12, и ссылки в них]. Анализ задачи об адвекции в общем случае встречает ряд трудностей, которые, в первую очередь, связаны с трудностью описания поля течения жидкости и последующего анализа особенностей поля скорости и свойств траекторий движения отдельных жидких частиц. В этой связи анализ проблемы на упрощенных модельных течениях, в которых поле скорости может быть представлено достаточно простыми соотношениями, представляет несомненный интерес с научной точки зрения и открывает дополнительные возможности в понимании тех процессов, которые приводят к хаотизации движения пассивной жидкости в реальных гидродинамических системах.

Одним из примеров модельных течений жидкости, которые проявляют хаотические свойства, могут служить квазипериодические течения. Существенной особенностью таких течений является последовательность стационарных режимов, которые сменяются через определенный промежуток времени без каких-либо инерционных эффектов [1, 7]. Примером таких течений могут быть так называемые "мерцающие вихри": генерируемое поле скорости определяется последовательностью во времени "работы" отдельных вихрей. В течение каждого временного интервала течение жидкости является стационарным.

Другим примером течения, проявляющим хаотические свойства, является течение жидкости при малых числах Рейнольдса, при котором влиянием инерционных эффектов можно пренебречь (приближение Стокса). Другими словами, все происходящее внутри замкнутой области течения определяется мгновенным значением скорости на границе. Такие модельные течения хорошо согласуются с экспериментальными данными (например [1, 11]).

В настоящей работе рассматривается двухмерное течение стоксовой жидкости в круговой области, обусловленное двумя периодически медленно вращающимися круговыми цилиндрами конечного радиуса - аналог “мерцающих” вихрей. При этом простые аналитические выражения для описания поля скорости позволяют достаточно просто провести изучение особенностей поля скорости и их влияние на движение окружающей пассивной жидкости. В настоящей работе приводятся данные о сечениях Пуанкаре, характеризующие процесс перемешивания, предлагается эффективный алгоритм поиска периодических точек в таком течении.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Рассматривается двумерное течение несжимаемой очень вязкой жидкости внутри круга безразмерного радиуса  $a = 1$ . Движение генерируется точечным ротлетом с интенсивностью  $\sigma$ , расположенном в точке с полярными координатами  $r = b$ ,  $\theta = 0$ . Двумерное поле скорости в цилиндре задается функцией тока  $\psi(r, \theta)$ , причем

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (1)$$

и  $\psi$  удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta \Delta \psi = 0, \quad (2)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (3)$$

является оператором Лапласа в полярных координатах  $(r, \theta)$ . Функция тока  $\psi$  содержит логарифмически-сингулярный член  $\psi^{(\sigma)}$ :

$$\psi^{(\sigma)}(r, \theta) = \frac{\sigma}{2} \ln(r^2 - 2br \cos \theta + b^2), \quad (4)$$

определяющий движение ротлета. Условия на границе при  $r = a$  имеют вид

$$u_r = 0, \quad u_\theta = 0 \quad \text{при} \quad r = a \quad (5)$$

или, что эквивалентно,

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = a. \quad (6)$$

Для бигармонического уравнения (2) и граничных условий (6) имеется точное решение [8] для

функции тока  $\psi(r, \theta)$ :

$$\psi(r, \theta) = \frac{\sigma}{2} \left[ \ln \frac{r^2 - 2br \cos \theta + b^2}{a^2 - 2br \cos \theta + b^2 r^2 / a^2} + \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \frac{a^2 - b^2 r^2 / a^2}{a^2 - 2br \cos \theta + b^2 r^2 / a^2} \right]. \quad (7)$$

Логарифмический член решения (7) представляет гармоническую функцию тока, обусловленную движением точечного вихря и его “зеркального” отображения с интенсивностью  $\pm \sigma$ , расположенных в точках  $(b, 0)$  и  $(a^2/b, 0)$  соответственно для невязкой жидкости с условием отсутствия прилипания на границе  $u_r = 0$  при  $r = a$ , а второй член решения выражает условие (5) полного прилипания на границе.

Обнаружено [8], что линией  $\psi = 0$  течение делится на две области. Точки раздела на границе находятся из уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0 \quad \text{при} \quad r = a, \quad (8)$$

что выражает условие равенства нулю напряжения сдвига на вогнутой стенке.

Как было показано в работе [8], в течении имеется критическая точка, положение которой  $(b_0, \pi)$  точно симметрично положению ротлета в точке  $(b_0, 0)$ , где  $b_0 = a [(17^{1/2} - 3)/4]^{1/2} = 0.53a$ . Эта особенность идеально подходит для модели течения с двумя “мерцающими” ротлетами.

Мы полагаем, что в цилиндре с радиусом  $a$  находятся два ротлета с интенсивностью  $\sigma_r(t)$  и  $\sigma_l(t)$ , расположенных в точках  $(b_0, 0)$  и  $(b_0, \pi)$  соответственно. Вращение ротлетов происходит попеременно с периодом  $T$ :

$$\begin{aligned} \sigma_r(t) = \sigma_r, \quad \sigma_l(t) = 0 \\ \text{при} \quad kT \leq t \leq (k+1)T, \\ \sigma_r(t) = 0, \quad \sigma_l(t) = \sigma_l \\ \text{при} \quad (k+1/2)T \leq t \leq (k+1)T, \end{aligned} \quad (9)$$

( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) с постоянными значениями  $\sigma_r$  и  $\sigma_l$ .

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (10)$$

с начальными условиями  $r = r_{in}$ ,  $\theta = \theta_{in}$  при  $t = 0$  описывает движение отдельной пассивной (Лагранжевой) частицы. Рассматриваемая частица находится в точке  $(r, \theta)$  в момент времени  $t$  в Эйлеровом поле скорости, которое описывается функцией тока  $\psi(r, \theta, t)$ :

$$\psi(r, \theta, t) = \sigma_r(t) \psi_r(r, \theta) + \sigma_l(t) \psi_l(r, \theta), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned}\psi_r(r, \theta) &= \frac{\sigma_r}{2} \left[ \ln \frac{r^2 - 2b_0 r \cos \theta + b_0^2}{a^2 - 2b_0 r \cos \theta + b_0^2 r^2 / a^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \frac{a^2 - b_0^2 r^2 / a^2}{a^2 - 2b_0 r \cos \theta + b_0^2 r^2 / a^2} \right], \\ \psi_l(r, \theta) &= \frac{\sigma_l}{2} \left[ \ln \frac{r^2 + 2b_0 r \cos \theta + b_0^2}{a^2 + 2b_0 r \cos \theta + b_0^2 r^2 / a^2} + \right. \\ &\quad \left. + \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \frac{a^2 - b_0^2 r^2 / a^2}{a^2 + 2b_0 r \cos \theta + b_0^2 r^2 / a^2} \right]. \quad (12)\end{aligned}$$

Внутри временных интервалов  $(kT, kT + T/2)$  и  $(kT + T/2, kT + T)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), где функция тока  $\psi$  явно не зависит от времени, система (10) является интегрируемой и обладает двумя первыми интегралами движения  $\psi_r(r, \theta) = \text{const}$  или  $\theta_l(r, \theta) = \text{const}$ . Следовательно, частица  $(r_{in}, \theta_{in})$  движется вдоль линии тока  $\psi_r(r, \theta) = \psi_r(r_{in}, \theta_{in}) = \text{const}$  на протяжении первого полупериода  $(0, T/2)$ . В момент времени  $t = T/2$  картина мгновенно изменяется, и частица движется вдоль новой линии тока  $\psi_l(r, \theta) = \text{const}$  на протяжении второго полупериода  $(T/2, T)$ , и т. д. Пространственное положение частицы непрерывно, но ее скорость разрывна в каждый момент времени  $t_k = kT/2$ .

Исследуемые уравнения адвекции имеют гамильтонову структуру. Если перейти к прямоугольным координатам  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , системе (10) можно записать в традиционном виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \psi_c}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = - \frac{\partial \psi_c}{\partial x}, \quad (13)$$

где

$$\psi_c(x, y, t) \equiv \psi \left( (x^2 + y^2)^{1/2}, \arctg \frac{y}{x}, t \right),$$

и она может быть преобразована в систему

$$\begin{aligned}\frac{d(r^2)}{dt} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}, & \frac{d\theta}{dt} &= - \frac{\partial \psi_1}{\partial (r^2)}, \\ \psi_1(r^2, \theta, t) &\equiv 2\psi \left( (r^2)^{1/2}, \theta, t \right)\end{aligned} \quad (14)$$

с  $r^2$  и  $\theta$  сопряженными величинами. Следовательно, для таких вычислений удобно применять метод симплектического интегрирования [6, 10].

## 2. АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТОЧЕК ТЕЧЕНИЯ

Важным моментом в понимании характера движения жидкости в периодическом течении является знание периодических точек течения. Зная

периодические точки, можно понять как ведет себя поток в целом. Точка  $p$  называется периодической, если материальная частица, помещенная в момент времени  $t = 0$  в точку  $p$ , займет в момент времени  $t = T$  то же положение, т.е. если  $\mathbf{F}(p) = p$ , где  $\mathbf{F}$  - отображение области течения на себя, соответствующее движению жидкости за полный период. Вводится [11] понятие о периодической точке порядка  $n$ . Так, точка  $q$  является периодической порядка  $n$ , если  $\mathbf{F}^n(q) = q$  и в то же время для любых  $m$ , таких, что  $1 \leq m \leq n$ , справедливо  $\mathbf{F}^m(q) \neq q$ . Ограничимся рассмотрением периодических точек первого и второго порядков. Поскольку в общем случае для нахождения периодических точек пришлось бы проанализировать всю область течения, особый интерес представляет любая методика, позволяющая заметно сузить область поиска и облегчающая отыскание периодических точек рассматриваемого течения.

Предложенный алгоритм поиска периодических точек [9] позволяет находить не только устойчивые (эллиптические), но и неустойчивые (гиперболические) периодические точки, а также сводит двумерную задачу к одномерной, позволяя находить только те значения точек, которые находятся на горизонтальной оси  $OX$ . Как правило, таких точек в квазипериодических течениях много. Их положение (расстояние от ротлета) можно достаточно надежно определить из простых кинематических соображений полного оборота вокруг активного ротлета за время  $T/2$  (очевидно, что влияние ротлета за вторую половину периода в этом случае будет весьма мало). Тем не менее, разработанный алгоритм позволяет точно определить положение и этих точек. Из симметрии поля скорости следует, что периодическая точка первого периода пересекает ось  $OX$  в строго определенные моменты времени  $(T/4$  и  $3T/4)$ , а именно - когда закон движения ротлетов также симметричен (9).

Пусть точка  $(r_{T/4}, 0)$  в начальный момент времени  $t = T/4$  находится на горизонтальной оси  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi$  с координатами  $(r_1, \theta_1)$  и  $(r_1, 2\pi - \theta_1)$  соответственно. Если в момент времени  $t = 3T/4$  эта точка опять окажется на горизонтальной оси с координатами  $(r_{3T/4}, 0)$  или  $(r_{3T/4}, \pi)$ , то в моменты времени  $t = T/2$  и  $t = T$  она опять вернется в свое начальное положение  $(r_1, 2\pi - \theta_1)$  и  $(r_1, \theta_1)$  соответственно. Следовательно, точка  $(r_1, \theta_1)$  является периодической точкой первого периода и сценарий поиска можно записать следующим образом: систему уравнений адвекции (10) интегрируем только для точек, принадлежащих оси  $OX$  в момент времени  $t = T/4$   $(r_{T/4}, 0)$  и выбираем те из них  $(r_{3T/4}, \theta_{3T/4})$ , которые в момент  $t = 3T/4$

вновь принадлежат оси  $OX$ . Таким образом, если  $r^*$  является корнем уравнения

$$\theta_{(T/4, 3T/4)}(r^*, 0) = 0, \quad (15)$$

тогда точка  $(r_1, \theta_1)$  с координатами  $r_1 = r_{T/4, T/2}(r^*, 0)$ ,  $\theta_1 = 2\pi - \theta_{T/4, T/2}(r^*, 0)$  будет периодической точкой первого периода. Здесь и дальше нижний индекс обозначает интервал интегрирования системы (10), Геометрически эта периодическая точка находится на пересечении двух линий тока  $\psi_r(r, \theta) = C_r$  и  $\psi_l(r, \theta) = C_l$ , соответствующих движению правого и левого ротлетов. Только по этим двум траекториям периодическая точка может вернуться в свое начальное положение.

Следующим шагом после нахождения положения периодической точки является анализ ее устойчивости и определение типа. Устойчивость линеаризованного отображения определяется решением задачи на собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  матрицы Якобиана  $[M]$ , собственные значения которой комплексные величины  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются корнями характеристического уравнения

$$\det([M] - \lambda[I]) = 0, \quad (16)$$

где

$$[M] = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial x}{\partial \varepsilon_y} \\ \frac{\partial y}{\partial \varepsilon_x} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon_y} \end{bmatrix}_{(x_*, y_*)}. \quad (17)$$

Здесь  $\varepsilon(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$  - малое возмущение, вносимое в координаты исследуемой периодической точки  $(x_*, y_*)$ , а  $I$  - единичная матрица. Значения элементов матрицы  $[M]$  оцениваются в точке  $(x_*, y_*)$ .

В дальнейшем условии  $\det[M] = M_{xx}M_{yy} - M_{xy}M_{yx} = 1$  необходимо использовать для проверки вычислений. Если собственные значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  комплексно сопряженные, или иными словами

$$|M_{xx} + M_{yy}| \leq 2, \quad (18)$$

то периодическая точка  $(x_*, y_*)$  будет эллиптической или линейно устойчивой. Если же  $\lambda_1$  и  $\lambda_2 = 1/\lambda_1$  являются вещественными, т. е.

$$|M_{xx} + M_{yy}| \geq 2. \quad (19)$$

периодическая точка  $(x_*, y_*)$  будет гиперболической или линейно неустойчивой. Для нахождения периодических точек периода - 2 предлагается следующий алгоритм:

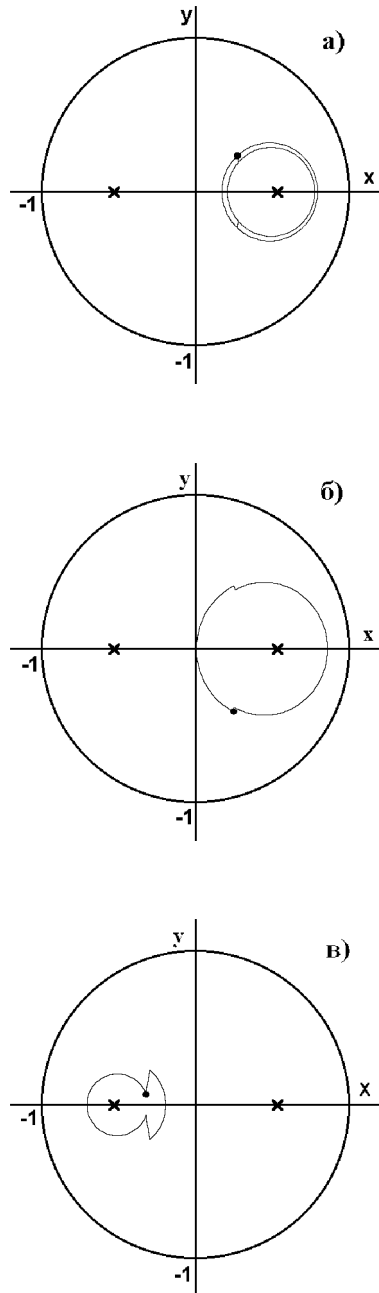


Рис. 1. Периодические точки периода -2:  
 а -  $\sigma_l = 0.25$ ,  $\sigma_r = 1.17$ ,  
 гиперболическая точка  $(0.217, 0.193)$ ;  
 б - эллиптическая точка  $(0.246, -0.408)$ ;  
 в - гиперболическая точка  $(-0.322, 0.064)$

- сценарий поиска  $[T/4 - 5T/4]$ : если  $r^{**}$  - корень уравнения  $\theta_{(T/4, 5T/4)}(r^{**}, 0) = 0$ , тогда точка  $(r_2, \theta_2)$  с координатами  $r_2 = r_{(T/4, T/2)}(r^{**}, 0)$ ,  $\theta_2 = -\theta_{(T/4, T/2)}(r^{**}, 0)$  будет периодической точкой;

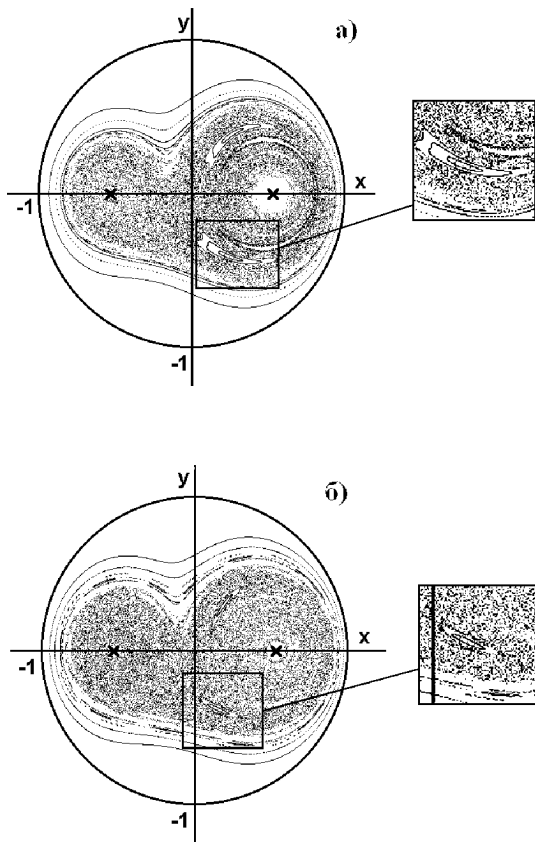


Рис. 2. Сечение Пуанкаре  
 а -  $\sigma_l = 0.25, \sigma_r = 1.17$ ; б -  $\sigma_l = 0.4, \sigma_r = 1.17$

- сценарий поиска  $[3T/4 - 7T/4]$ : если  $r^{**}$  - корень уравнения  $\theta_{(3T/4, 7T/4)}(r^{**}, 0) = 0$ , тогда точка  $(r_2, \theta_2)$  с координатами  $r_2 = \theta_{(3T/4, 3T/2)}(r^{**}, 0)$ ,  $\theta_2 = -\theta_{(3T/4, 3T/2)}(r^{**}, 0)$  является периодической точкой периода - 2.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Численные результаты приведены для случая, когда интенсивность правого ротлета была  $\sigma_r = 1.17a^2/T$ , а интенсивность левого ротлета  $\sigma_l$  менялась в диапазоне  $0.25 - 0.4a^2/T$ . Выбор значения  $\sigma_r$  обусловлен, в основном, согласованием с окружающей скоростью конечного цилиндра радиуса  $0.25a$ , примененном в экспериментах [7]. Как отмечено в [8] выбор  $\sigma_r = \sigma_l = 1.17a^2/T$  обеспечивает хорошее согласование данных о перемешивании пятна изначально расположенного в центре цилиндра с многочисленными экспериментальными данными, приведенными в работе [7].

На рис.1 представлены положения и траектории

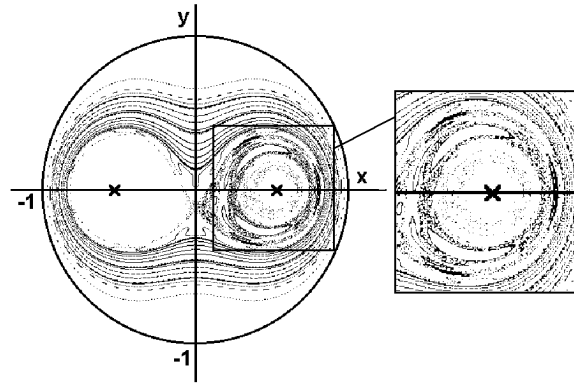


Рис. 3. Сечение Пуанкаре для  $\sigma_l = \sigma_r = 0.3$

нескольких периодических точек периода - 2 для  $\sigma_l = 0.25a^2/T$ , расположенных достаточно далеко от ротлетов и найденных по описанным выше алгоритмам. Следует отметить, что все найденные периодические точки первого периода в данном случае являются гиперболическими.

На рис. 2, а совмещены результаты вычислений для различных маркеров (было выбрано 24 маркера, изначально расположенные в различных точках поля) в моменты времени  $Tn$ , где  $n = 1, \dots, 2000$ . Отчетливо видны регулярные похожие на лежащую грушу, кривые, отвечающие регулярным движениям. Внутри находится хаотическое "море", содержащее ряд эллиптических островов с точками, лежащими на нескольких гладких кривых (см. выноску на рисунке). Отметим, что эти острова соответствуют найденным эллиптическим точкам (одна из которых представлена на рис. 1, б). Два узких острова вблизи правого ротлета отвечают эллиптическим периодическим точкам более высокого порядка. Они также могут быть найдены по данной методике. Изменение интенсивности левого ротлета приводит к практическому исчезновению эллиптических островов (см. выноску) по сути при той же картине регулярных кривых, окружающих хаотическое "море". Отметим, что структура пограничной кривой в обоих случаях пока недостаточна ясна и ее исследование представляет особый интерес.

В случае слабых, но одинаковых ротлетов рис. 3, картина сечений Пуанкаре имеет более регулярную структуру. Обращает внимание наличие (см. выноску) большего числа эллиптических островов вблизи правого ротлета. Отметим также практически регулярный характер (на рисунке не показан) сечений Пуанкаре вблизи левого ротлета.

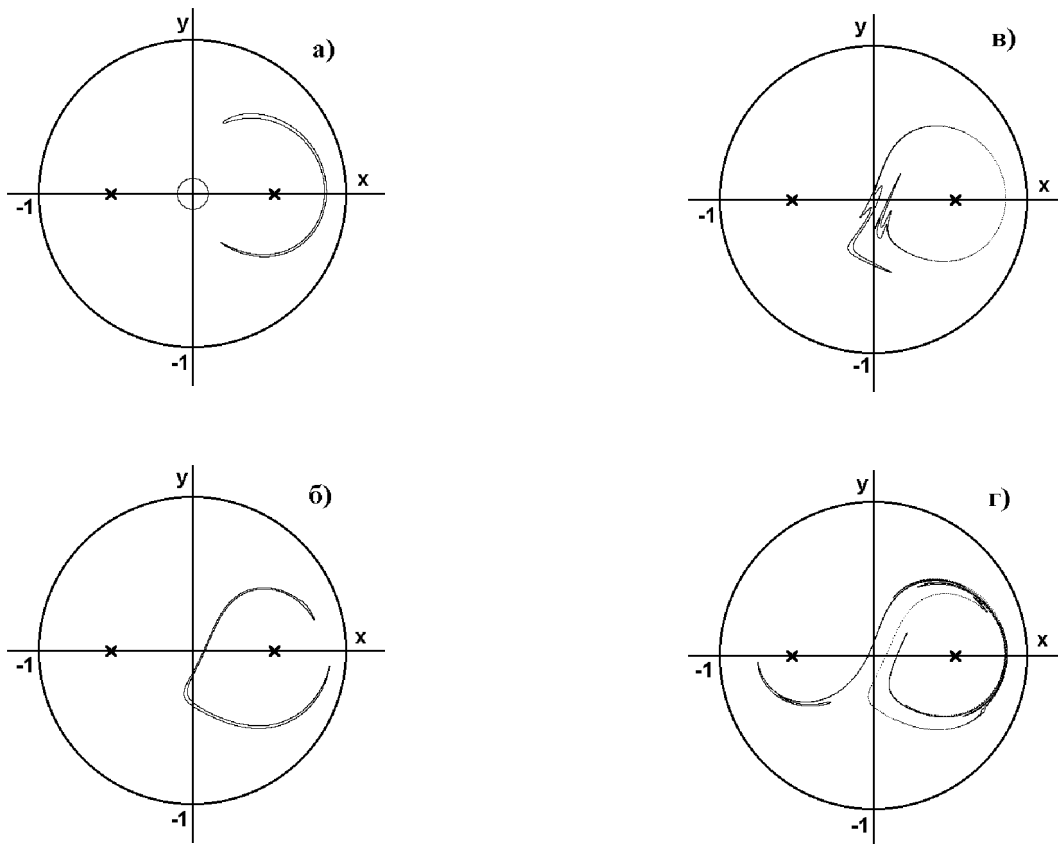


Рис. 4. Размешивание пятна, расположенного между ротлетами в центре круга с радиусом  $r_0 = 0.1a$  после  $T$  периодов времени. Интенсивность ротлетов  $\sigma_r = 1.17$ ,  $\sigma_l = 0.25$  соответственно: а -  $T = 1$ ; б -  $T = 2$ ; в -  $T = 3$ ; г -  $T = 4$  периодов

На рис. 4 показан процесс растяжения и деформации полем скорости пятна отмеченных частиц после нескольких периодов времени (при  $t = T, 2T, 3T$  и  $4T$ ). В качестве исходного контура была выбрана окружность с безразмерным радиусом  $r_0 = 0.1a$ , центр которой расположен в точке с координатами  $(0, 0)$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере рассматриваемой задачи можно проследить, как сравнительно простое эйлерово поле скоростей порождает нелинейную динамическую систему, описывающую движение индивидуальных частиц жидкости и приводящую к сложному их поведению в потоке. Аналитическое решение задачи открывает дополнительные возможности анализа структуры течения: анализа периодических точек, их типа. Используя по-

лученные в ходе численного эксперимента результаты, можно указать в потоке области эффективного и слабого перемешивания, связанные с периодическими точками потока. Наличие эллиптических точек способствует образованию регулярных островов в сечении Пуанкаре и, как результат, приводит к регулярным режимам перемешивания пассивной жидкости. Эллиптические точки представляют собой препятствие для перемешивания. Напротив, гиперболические точки - источники хаотизации движения. Наличие гиперболических точек приводит к появлению областей эффективного перемешивания. Эти области хорошо видны на сечении Пуанкаре.

По сравнению с существующими методами и алгоритмами поиска периодических точек данный алгоритм имеет несколько преимуществ. Его достоинство состоит в том, что он позволяет найти неустойчивые точки, определение которых другим способом, например из сечения Пуанкаре, не

представляется возможным. Для поиска периодических точек исследуется не двумерная область, а лишь одна линия - размерность множества, в котором производится поиск, снижена на единицу.

Была решена задача об адвекции пассивной примеси в поле скорости двух периодически действующих ротлетов (рис. 4). Результаты подтверждают анализ периодических точек и сечения Пуанкаре. Если контур попадает в область хаотическую (зоны гиперболических точек), то происходит интенсивное его растяжение (например, область, близлежащая к точке с координатами  $(0, 0)$ ). И наоборот, в зоне эллиптических точек растяжение регулярное, т.е. практически линейное во времени (например, область, близлежащая к ротлетам).

1. Aref H. Stirring by chaotic advection // J. Fluid Mech.- 1984.- **143**.- P. 1-23.
2. Aref H., Balachandrar S. Chaotic advection in a Stokes flow // Phys. Fluids.- 1986.- **29**.- P. 3515-3521.
3. Aref H., El Naschie M. S., Eds. Chaos Applied to Fluid Mixing.- Oxford: Pergamon, 1995.- 380 p.
4. Bouasse H. Tourbillons.- Delagrave, Paris: 1931, Vol 1.- 125-140 p.
5. Chaiken J., Chevray R., Tabor M., Tan Q. M. Experimental study of Lagrangian turbulence in Stokes flow // Proc. R. Soc. London (Ser. A).- 1986.- **408**.- P. 165-183.
6. Channel P. J., Scovel J. C. Symplectic integration of Hamiltonian systems // Nonlinearity.- 1990.- **3**.- P. 231-259.
7. Jana S. C., Metcalfe G., Ottino J. M. Experimental and computational studies of mixing in complex Stokes flows: the vortex mixing flow and multicellular cavity flows // J. Fluid Mech.- 1994.- **269**.- P. 199-210.
8. Meleshko V. V., Aref H. A blinking rotlet model for chaotic advection // Phys. Fluids.- 1996.- **8**.- P. 3215-3217.
9. Meleshko V. V., Peters G. W. M. Periodic points for two-dimensional Stokes flow in a rectangular cavity // Physics Letters.- **A**.- 1996.- P. 87-96.
10. Ruth R. A canonical integration technique // IEEE Trans. Nucl. Sci.- 1983.- **30**.- P. 2669-2671.
11. Ottino J. M. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport.- Cambridge: Cambridge University Press, 1989.- 683 p.
12. Ottino J. M. Mixing, Chaotic Advection, and Turbulence // Annu. Rev. Fluid Mec.- 1990.- **22**.- P. 207-253.