НОВІ МЕТОДИ
В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ, ІНФОРМАТИЦІ
ТА ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

УДК 519.854.2

НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ «МИНИМИЗАЦИЯ СУММАРНОГО ВЗВЕШЕННОГО ОПОЗДАНИЯ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ НЕЗАВИСИМЫХ ЗАДАНИЙ С ДИРЕКТИВНЫМИ СРОКАМИ ОДНИМ ПРИБОРОМ»

А.А. ПАВЛОВ, Е.Б. МИСЮРА

На основании исследования свойств данной задачи предложен новый подход к ее решению и разработанный на его основе эффективный приближенный алгоритм. Сформулированы условия, при выполнении которых оптимальное решение достигается за полиномиальное время. При невыполнении этих условий предлагаются правила отсечений, позволяющие существенно сократить время решения задачи. Данный алгоритм позволил получить точные решения для ряда задач с числом переменных существенно большим 50-ти. Оптимальные значения функционала, полученные данным алгоритмом для тестовых примеров, совпали со значениями функционала, рассчитанными другими известными методами.

ПОСТАНОВКА И ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ЗАДАЧИ

Задано множество независимых заданий $J=\{j_1, j_2, ..., j_n\}$, каждое из которых состоит из одной операции. Для каждого задания известны l_j — длительность выполнения; ω_j — весовой коэффициент и D_j — директивный срок выполнения. Задания поступают в систему одновременно в момент времени $d_j=0,\ j=\overline{1,n}$. Прерывания не допускаются. Необходимо построить расписание выполнения заданий для одного прибора, минимизирующее суммарное взвешенное опоздание при выполнении заданий:

$$f=\sum_{j=1}^{n}\omega_j \max\left(0,\ C_j-D_j\right), \tag{1}$$

где C_j — момент завершения выполнения задания j.

Задача суммарного взвешенного опоздания привлекает внимание ученых на протяжении многих лет. Получение точного решения этой задачи усложнено чрезмерными вычислительными требованиями, ведь задача с 50 заданиями — это барьер, который практически невозможно преодолеть.

Лоулер [9] показал, что данная задача ($1||\sum \omega_i T_i$, где T_i — опоздание относительно директивного срока) является *NP*-трудной в сильном смысле и предложил псевдополиномиальный алгоритм для задачи суммарного опоздания $1||\sum T_i$ (все веса равны 1). Различные перечислительные методы решения были предложены как для взвешенных, так и для невзвешенных случаев. Эммонс [6] предложил несколько правил предпочтения, ограничивающих поиск оптимального решения в задаче $1||\sum T_i$. Правила Эммонса используются как в алгоритмах ветвей и границ, так и в алгоритмах динамического программирования (Фишер [7] и Поттс и Вассенгов [10, 11]). Ринной Кен и другие [13] расширили эти результаты на задачу взвешенного опоздания. Рачамадугу [12] определил условие, характеризующее смежные работы в оптимальной последовательности для задачи $1||\sum \omega_i T_i$.

Чемберс и др. [5] развили новые эвристические правила предпочтения и эвристику гибкой декомпозиции. В [3] показано, что наиболее эффективная нижняя граница при решении задачи взвешенного опоздания как по качеству, так и по потреблению времени — линейный метод нижней границы Поттса и Вассенгова [10], полученный из Лагранжевой релаксации ограничений на возможности машины. Хугевен и Ван де Вельд [8] переформулировали задачу, используя слабые переменные, и показали, что могут быть получены более эффективные Лагранжевы нижние границы.

Шварц [14] доказал существование специального упорядочения для задачи опоздания–опережения для одного прибора со штрафами, независящими от работ, в которых расстановка двух смежных работ в оптимальном расписании зависит от их времени запуска. Шварц и Лью [15] представили двухступенчатый механизм декомпозиции для задачи $1||\sum \omega_i T_i$, в которой штрафы за опоздание пропорциональны временам обработки. В [4] представлено новое правило предпочтения для наиболее общего случая задачи суммарного взвешенного опоздания. Предложенное правило охватывает и расширяет результаты Эммонса и обобщения Ринноя Кена и др., рассматривая упорядочения, зависящие от времени, между каждой парой работ.

Ниже предлагается новый подход к решению задачи $1||\sum \omega_i T_i$ и разработанный на его основе алгоритм, который позволил получить точные решения для ряда задач с числом переменных существенно большим 50-ти. Результаты исследования свойств задачи и алгоритмы ее решения, описанные ниже, являются развитием работ [1, 2]. Введем ряд определений.

Определение 1. Резервом времени $R_{j_{[g]}}$ задания $j_{[g]}$ называется величина $R_{j_{[g]}} = D_{j_{[g]}} - C_{j_{[g]}}$.

Определение 2. Перестановкой называется процедура переноса задания $j_{[g]}$ на позицию k ($k > g$) и, одновременно, заданий, занимающих позиции $g+1$, $g+2$,..., $k-1$, k на позиции g, $g+1$,..., $k-1$, соответственно.

Определение 3. Интервалом перестановки задания $j_{[g]}$ на позицию k называется множество заданий, находящихся на позициях $g+1$, $g+2$,..., $k-1, k$ до выполнения перестановки.

Определение 4. Встраиванием называется процедура переноса задания $j_{[g]}$ на позицию p $(g>p)$ и, одновременно, заданий p, $p+1$,..., $g-1$ на позиции $p+1, p+2,..., g-1, g$, соответственно.

Определение 5. Интервалом встраивания $I_{j_{[g]}}$ задания $j_{[g]}$ называется множество заданий, стоящих до встраивания на позициях p, $p+1$,..., $g-1$, где p определяется из условия

$$\sum_{i=p-1}^{g-1} l_{j_{[i]}} < \left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}\right) \le \sum_{i=p}^{g-1} l_{j_{[i]}}. \tag{2}$$

Если же условие (2) не выполняется ни для одной позиции, то $p = 1$. Таким образом, штраф по заданию j на позиции p должен быть равным нулю или минимальным.

Определение 6. Задание $j_{[g]}$ называется запаздывающим в последовательности σ, если для него выполняется условие $D_{j_{[g]}} < C_{j_{[g]}}$, где g — позиция, которую задание j занимает в последовательности σ.

Определение 7. Последовательностью $\sigma^{\text{уп}}$ (сигма упорядоченная) называется последовательность заданий множества J, $j=\overline{1,n}$, в которой задания упорядочены по убыванию приоритетов ω_j / l_j, т.е. $\forall\, j,i : \omega_j / l_j \ge$ $\ge \omega_i / l_i$, $j<i$.

Утверждение 1. Если в последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ запаздывающим заданиям не предшествуют задания с резервом времени, то не существует переносов заданий, приводящих к улучшению целевой функции.

Доказательство. Пусть в последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ для заданий, стоящих на позициях $i=\overline{1,s}$, выполняется $C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} \ge 0$, а для заданий, занимающих позиции $i=\overline{s+1,n}$, выполняется $C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} \le 0$. Очевидно, что переносы, которые могли бы привести к уменьшению целевой функции, возможны только для заданий, занимающих позиции $i=\overline{1,s}$.

Докажем, что не существует перестановок, приводящих к уменьшению f. Пусть в последовательности σ позиции $l, g \in [1, s]$, $l<g$. Выполним перестановку задания $j_{[l]}$ на позицию $[g]$. Значение целевой функции на интервале $[l, g]$ до перестановки равно:

$$f = \sum_{i=l}^{g} \omega_{j_{[i]}} \left(C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}}\right).$$

После перестановки с учетом предположения, что задания, занимавшие позиции $l+1, l+2, \ldots, g-1, g$, перестали запаздывать (т.е. пусть до перестановки выполнялось $C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} \le l_{j_{[l]}}, \quad i = \overline{l+1, g}$):

$$f' = \omega_{j_{[l]}} \left(C_{j_{[l]}} + \sum_{i=l+1}^{g} l_{j_{[i]}} - D_{j_{[l]}} \right),$$

$C_{j_{[l]}}$ — момент окончания выполнения задания $j_{[l]}$ до перестановки;

$C_{j_{[l]}} + \sum_{i=l+1}^{g} l_{j_{[i]}}$ — момент окончания выполнения задания $j_{[l]}$ после перестановки.

Необходимо доказать, что $f - f' \le 0$:

$$f - f' = \omega_{j_{[l]}} \left(C_{j_{[l]}} - D_{j_{[l]}} \right) + \sum_{i=l+1}^{g} \omega_{j_{[i]}} \left(C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} \right) -$$

$$- \omega_{j_{[l]}} \left(C_{j_{[l]}} + \sum_{i=l+1}^{g} l_{j_{[i]}} - D_{j_{[l]}} \right) = \sum_{i=l+1}^{g} \omega_{j_{[i]}} \left(C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} \right) - \sum_{i=l+1}^{g} \omega_{j_{[l]}} l_{j_{[i]}} \le$$

$$\le \sum_{i=l+1}^{g} \omega_{j_{[i]}} l_{j_{[l]}} - \sum_{i=l+1}^{g} \omega_{j_{[l]}} l_{j_{[i]}} = \sum_{i=l+1}^{g} \left(\omega_{j_{[i]}} l_{j_{[l]}} - \omega_{j_{[l]}} l_{j_{[i]}} \right) \le 0$$

в силу того, что $\dfrac{\omega_{j_{[i]}}}{l_{j_{[i]}}} \le \dfrac{\omega_{j_{[l]}}}{l_{j_{[l]}}}, \quad i = \overline{l+1, g}$.

Докажем, что не существует встраиваний, приводящих к увеличению f. Значение целевой функции до встраивания равно

$$f = \sum_{i=p}^{g} \omega_{j_{[i]}} \left(C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} \right), \quad g, p \in [1, s].$$

После встраивания задания $j_{[g]}$ на позицию p с учетом того, что после встраивания задание $j_{[g]}$ перестанет запаздывать, т.е. $\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}} \right) \le \sum_{i=p}^{g-1} l_{j_{[i]}}$, значение целевой функции равно:

$$f' = \sum_{i=p}^{g-1} \omega_{j_{[i]}} \left(C_{j_{[i]}} + l_{j_{[g]}} - D_{j_{[i]}} \right),$$

где $C_{j_{[i]}}$ — момент окончания выполнения заданий $j_{[i]}$ до выполнения процедуры встраивания задания $j_{[g]}$ $\forall i, \; i = \overline{p, g-1}$; $C_{j_{[i]}} + l_{j_{[g]}}$ — момент окончания выполнения заданий $j_{[i]}$ после выполнения процедуры встраивания задания $j_{[g]}$.

Необходимо доказать, что $f - f' \le 0$:

$$f - f' = \omega_{j_{[g]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}\right) + \sum_{i=p}^{g-1}\left(C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}}\right) -$$

$$-\sum_{i=p}^{g-1}\omega_{j_{[i]}}\left(C_{j_{[i]}} + l_{j_{[g]}} - D_{j_{[i]}}\right) =$$

$$= \omega_{j_{[g]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}\right) - \sum_{i=p}^{g-1}\omega_{j_{[i]}} l_{j_{[g]}} \le \omega_{j_{[g]}}\sum_{i=p}^{g-1} l_{j_{[i]}} - \sum_{i=p}^{g-1}\omega_{j_{[i]}} l_{j_{[g]}} =$$

$$= \sum_{i=p}^{g-1}\left(\omega_{j_{[g]}} l_{j_{[i]}} - \omega_{j_{[i]}} l_{j_{[g]}}\right) \le 0$$

в силу того, что

$$\frac{\omega_{j_{[g]}}}{l_{j_{[g]}}} \le \frac{\omega_{j_{[i]}}}{l_{j_{[i]}}} \quad \forall\, i = \overline{p, g-1}\,.$$

Утверждение 2. Встраивание запаздывающего задания $j_{[g]}$ на позицию $f < p$ не может привести к улучшению целевой функции.

Доказательство. В соответствии с определением 5, позиция p определяется как позиция, на которой штраф по заданию $j_{[g]}$ становится равным нулю. Встраивание задания $j_{[g]}$ на любую позицию $f < p$ приводит к увеличению его резерва и перемещает задания, стоящие на позициях f, $f+1, ..., p-1$, на позиции $f+1, f+2, ..., p$. Такое перемещение приводит к увеличению целевой функции, если для какого-либо задания на $\overline{f, p-1}$ выполняется хотя бы одно из условий:

1) для задания $j_{[i]}$, $i \in \overline{f, p-1}$ выполняется $C_{j_{[i]}} \ge D_{j_{[i]}}$, т.е. задание $j_{[i]}$ является запаздывающим и в результате встраивания штраф по нему увеличивается на величину $\omega_{j_{[i]}} l_{j_{[g]}}$;

2) для задания $j_{[i]}$, $i \in \overline{f, p-1}$ выполняется $C_{j_{[i]}} < D_{j_{[i]}}$ и $D_{j_{[i]}} - C_{j_{[i]}} < l_{j_{[g]}}$, т.е. задание $j_{[i]}$ до встраивания задания $j_{[g]}$ не запаздывало, но в результате встраивания станет запаздывать со штрафом $\omega_{j_{[i]}}\left(C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} + l_{j_{[g]}}\right)$.

Если ни для одного из заданий $j_{[i]}$, $i \in \overline{f, p-1}$ не выполняется ни одно из перечисленных условий, то целевая функция не ухудшается, но и не может быть улучшена в результате встраивания $j_{[g]}$ на позицию $f < p$, т.к. штраф на позиции p по заданию $j_{[g]}$ равен нулю.

Утверждение 3. Пусть в последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ $\forall j_{[i]}$, $i = \overline{1, p-1}$ $R_{j_{[i]}} \le 0$. Обозначим ее $\sigma^{\text{уп}1}$. Запаздывающее задание $j_{[g]}$ в последовательности $\sigma^{\text{уп}1}$ в результате выполнения встраивания ($I_{j_{[g]}} = \overline{p, g-1}$) может занять более раннюю позицию, что приведет к улучшению целевой функции только в том случае, если в последовательности $\sigma^{\text{уп}1}$ хотя бы у одного из заданий на интервале встраивания $I_{j_{[g]}}$ есть резерв времени, больший нуля.

Доказательство. Для доказательства данного утверждения выведем условия, при выполнении которых в результате процедуры встраивания значение целевой функции уменьшается, т.е. выполняется $f - f' > 0$.

Пусть для задания $j_{[z]}$ ($p < z < g$) выполняется неравенство $D_{j_{[z]}} > C_{j_{[z]}}$, для остальных заданий $i \in I_{j_{[g]}}$ $D_{j_{[i]}} \le C_{j_{[i]}}$. Согласно утверждениям 1 и 2, встраивание, которое может улучшить *f*, должно быть выполнено на позицию z. Встроим задание $j_{[g]}$ на позицию *z*:

$$f = \sum_{i=p}^{z-1} \omega_{j_{[i]}} \left(C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} \right) + \sum_{i=z+1}^{g} \omega_{j_{[i]}} \left(C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} \right);$$

$$f' = \omega_{j_{[g]}} \max\left(0, C_{j_{[g]}} - \sum_{i=z}^{g-1} l_{j_{[i]}} - D_{j_{[g]}} \right) + \sum_{i=p}^{z-1} \omega_{j_{[i]}} \left(C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} \right) +$$

$$+ \sum_{i=z+1}^{g-1} \omega_{j_{[i]}} \left(C_{j_{[i]}} + l_{j_{[g]}} - D_{j_{[i]}} \right) + \omega_{j_{[z]}} \max\left(0, C_{j_{[z]}} + l_{j_{[g]}} - D_{j_{[z]}} \right);$$

$$f - f' = \sum_{i=p}^{z-1} \omega_{j_{[i]}} \left(C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} \right) + \sum_{i=z+1}^{g} \omega_{j_{[i]}} \left(C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} \right) -$$

$$- \sum_{i=p}^{z-1} \omega_{j_{[i]}} \left(C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} \right) - \sum_{i=z+1}^{g-1} \omega_{j_{[i]}} \left(C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} \right) - \sum_{i=z+1}^{g-1} \omega_{j_{[i]}} l_{j_{[g]}} -$$

$$- \omega_{j_{[z]}} \max\left(0, C_{j_{[z]}} + l_{j_{[g]}} - D_{j_{[z]}} \right) - \omega_{j_{[g]}} \max\left(0, C_{j_{[g]}} - \sum_{i=z}^{g-1} l_{j_{[i]}} - D_{j_{[g]}} \right) =$$

$$= - \sum_{i=z+1}^{g-1} \omega_{j_{[i]}} l_{j_{[g]}} + \omega_{j_{[g]}} \left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}} \right) -$$

$$-\omega_{j_{[g]}} \max\left(0, C_{j_{[g]}} - \sum_{i=z}^{g-1} l_{j_{[i]}} - D_{j_{[g]}}\right) - \omega_{j_{[z]}} \max\left(0, C_{j_{[z]}} + l_{j_{[g]}} - D_{j_{[z]}}\right) =$$

$$= \omega_{j_{[g]}} \min\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}, \sum_{i=z}^{g-1} l_{j_{[i]}}\right) - \sum_{i=z+1}^{g-1} \omega_{j_{[i]}} l_{j_{[g]}} -$$

$$-\omega_{j_{[z]}} \max\left(0, C_{j_{[z]}} + l_{j_{[g]}} - D_{j_{[z]}}\right) =$$

$$= \omega_{j_{[g]}} \min\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}, \sum_{i=z}^{g-1} l_{j_{[i]}}\right) - \sum_{i=z}^{g-1} \omega_{j_{[i]}} \max\left[0, \min\left(l_{j_{[g]}} - R_{j_{[i]}}, l_{j_{[g]}}\right)\right].$$

Таким образом, в результате выполнения процедуры встраивания задания $j_{[g]}$ на позицию z значение целевой функции изменяется на величину:

$$f - f' = \omega_{j_{[g]}} \min\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}, \sum_{i=z}^{g-1} l_{j_{[i]}}\right) -$$

$$-\sum_{i=z}^{g-1} \omega_{j_{[i]}} \max\left[0, \min\left(l_{j_{[g]}} - R_{j_{[i]}}, l_{j_{[g]}}\right)\right]. \tag{3}$$

Следовательно, улучшение целевой функции возможно только в том случае, если на интервале встраивания $I_{j_{[g]}}$ есть резерв, больший нуля. В случае отсутствия резервов выражение (3) принимает отрицательное значение, т.к. приоритет задания $j_{[g]}$ ниже приоритета заданий на интервале встраивания.

Заметим, что если существует несколько заданий z_k с резервами времени на $[p, g–1]$, то выражение (3) при встраивании задания $j_{[g]}$ на одну из позиций z_k примет вид:

$$f - f' = \omega_{j_{[g]}} \min\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}, \sum_{i=z_k}^{g-1} l_{j_{[i]}}\right) -$$

$$-\sum_{i=z_k}^{g-1} \omega_{j_{[i]}} \max\left[0, \min\left(l_{j_{[g]}} - R_{j_{[i]}}, l_{j_{[g]}}\right)\right]. \tag{4}$$

Утверждение 4. Если в последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ ни для одного из запаздывающих заданий $j_{[g]}$ нет предшествующих заданий $j_{[i]}$, $i = \overline{1, g-1}$, для которых выполняется

$$D_{j_{[i]}} - C_{j_{[i]}} > 0\,, \quad D_{j_{[i]}} > D_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}}\,,$$

то не существует перестановок и встраиваний, приводящих к улучшению целевой функции.

Доказательство. Встраивание. Встроим задание $j_{[g]}$ на позицию p (см. определение 5). Учитывая условие утверждения, что не существует предшествующих заданий $j_{[s]}$, для которых $D_{j_{[s]}} - C_{j_{[s]}} > 0$ и $D_{j_{[s]}} >$ $> D_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}}$, получим, что встраивание $j_{[g]}$ произойдет на интервале $\overline{p, g-1}$, на котором для любого задания $j_{[i]}$ выполняется

$$C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} \geq 0\,,\ i = \overline{p, g-1}\,.$$

Пусть $C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} = 0\,,\ i = \overline{p, g-1}$. Тогда

$$f = \omega_{j_{[g]}} \left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}} \right),$$

$$f' = \sum_{i=p}^{g-1} \omega_{j_{[i]}} \left(C_{j_{[i]}} + l_{j_{[g]}} - D_{j_{[i]}} \right) = \sum_{i=p}^{g-1} \omega_{j_{[i]}} l_{j_{[g]}}\,,$$

$$f - f' = \omega_{j_{[g]}} \left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}} \right) - \sum_{i=p}^{g-1} \omega_{j_{[i]}} l_{j_{[g]}} \leq \omega_{j_{[g]}} \sum_{i=p}^{g-1} l_{j_{[i]}} - \sum_{i=p}^{g-1} \omega_{j_{[i]}} l_{j_{[g]}} =$$

$$= \sum_{i=p}^{g-1} \left(\omega_{j_{[g]}} l_{j_{[i]}} - \omega_{j_{[i]}} l_{j_{[g]}} \right) \leq 0\,, \quad \text{т.к.} \quad \frac{\omega_{j_{[i]}}}{l_{j_{[i]}}} \geq \frac{\omega_{j_{[g]}}}{l_{j_{[g]}}} \quad \forall i < g\,.$$

Доказательство для случая $C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} > 0$ аналогично.

Перестановки. Возможны перестановки задания с нулевым резервом времени и задания с ненулевым резервом. Рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть $D_{j_{[s]}} - C_{j_{[s]}} > 0\,,\ D_{j_{[s]}} \leq D_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}}$ и задание $j_{[g]}$ после перестановки запаздывает, т.е. $C_{j_{[g]}} - l_{j_{[s]}} > D_{j_{[g]}}$. В этом случае

$$f = \omega_{j_{[g]}} \left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}} \right)\,,$$

$$f' = \omega_{j_{[g]}} \left(C_{j_{[g]}} - l_{j_{[s]}} - D_{j_{[g]}} \right) + \omega_{j_{[s]}} \left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[s]}} \right).$$

$$f - f' = \omega_{j_{[g]}} \left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}} \right) - \omega_{j_{[g]}} \left(C_{j_{[g]}} - l_{j_{[s]}} - D_{j_{[g]}} \right) - \omega_{j_{[s]}} \left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[s]}} \right) =$$

$$=\omega_{j_{[g]}} l_{j_{[s]}} - \omega_{j_{[s]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[s]}}\right) \le \omega_{j_{[g]}} l_{j_{[s]}} - \omega_{j_{[s]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}} + l_{j_{[g]}}\right) \le$$

$$\le \omega_{j_{[g]}} l_{j_{[s]}} - \omega_{j_{[s]}} l_{j_{[g]}} \le 0, \quad \text{т.к.} \quad \frac{\omega_{j_{[g]}}}{l_{j_{[g]}}} \le \frac{\omega_{j_{[s]}}}{l_{j_{[s]}}}, \quad s < g\,.$$

2. Пусть $D_{j_{[s]}} - C_{j_{[s]}} > 0$, $D_{j_{[s]}} \le D_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}}$ и задание $j_{[g]}$ после перестановки не запаздывает, т.е. $C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}} \le l_{j_{[s]}}$. Здесь

$$f' = \omega_{j_{[s]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[s]}}\right).$$

$$f - f' = \omega_{j_{[g]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}\right) - \omega_{j_{[s]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[s]}}\right) \le$$

$$\le \omega_{j_{[g]}}\left(C_{j_{[g]}} - \left(C_{j_{[g]}} - l_{j_{[s]}}\right)\right) - \omega_{j_{[s]}}\left(C_{j_{[g]}} - \left(D_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}}\right)\right) =$$

$$= \omega_{j_{[g]}} l_{j_{[s]}} - \omega_{j_{[s]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}} + l_{j_{[g]}}\right) \le \omega_{j_{[g]}} l_{j_{[s]}} - \omega_{j_{[s]}} l_{j_{[g]}} \le 0,$$

т.к. $\dfrac{\omega_{j_{[g]}}}{l_{j_{[g]}}} \le \dfrac{\omega_{j_{[s]}}}{l_{j_{[s]}}}$, $s < g$.

3. Пусть $D_{j_{[s]}} - C_{j_{[s]}} = 0$, $D_{j_{[s]}} \le D_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}}$ и задание $j_{[g]}$ после перестановки запаздывает. Тогда

$$f - f' = \omega_{j_{[g]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}\right) - \omega_{j_{[g]}}\left(C_{j_{[g]}} - l_{j_{[s]}} - D_{j_{[g]}}\right) - \omega_{j_{[s]}} \sum_{i=s+1}^{g} l_{j_{[i]}} =$$

$$= \omega_{j_{[g]}} l_{j_{[s]}} - \omega_{j_{[s]}} l_{j_{[g]}} - \omega_{j_{[s]}} \sum_{i=s+1}^{g-1} l_{j_{[i]}} \le$$

$$\le \omega_{j_{[g]}} l_{j_{[s]}} - \omega_{j_{[s]}} l_{j_{[g]}} \le 0, \quad \text{т.к.} \quad \frac{\omega_{j_{[g]}}}{l_{j_{[g]}}} \le \frac{\omega_{j_{[s]}}}{l_{j_{[s]}}}, \; s < g\,.$$

4. Пусть $D_{j_{[s]}} - C_{j_{[s]}} = 0$, $D_{j_{[s]}} \le D_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}}$ и задание $j_{[g]}$ после перестановки не запаздывает, т.е. $C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}} \le l_{j_{[s]}}$. В этом случае

$$f - f' = \omega_{j_{[g]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}\right) - \omega_{j_{[s]}} \sum_{i=s+1}^{g} l_{j_{[i]}} \le \omega_{j_{[g]}} l_{j_{[s]}} - \omega_{j_{[s]}} \sum_{i=s+1}^{g} l_{j_{[i]}} \le 0$$

аналогично п.3.

Следовательно, так как для запаздывающего задания $j_{[g]}$ нет предшествующих заданий, имеющих резервы на интервале переноса задания $j_{[g]}$, то не существует перестановок, приводящих к уменьшению значения функционала.

На основании доказанных утверждений сформулируем необходимые условия для перемещения запаздывающих заданий на более ранние позиции, при котором значение функционала уменьшается за счет использования существующих резервов.

Утверждение 5. Пусть в последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ $j_{[g]}$ — запаздывающее задание. Уменьшение значения функционала при перемещении $j_{[g]}$ на более ранние позиции в результате перестановок и встраиваний возможно только при выполнении одного из следующих условий:

1. $\exists\, j_{[i]}$, $P_{\min} \le i \le g \mid r_{j_{[i]}} > 0$. На интервале переноса задания $j_{[g]}$ есть задания с резервами времени, где $P_{\min}$ — позиция, на которой штраф по заданию $j_{[g]}$ минимален (или равен нулю).

2. $\exists\, j_{[q]}$, $q < g$, $D_{j_{[q]}} > C_{j_{[g]}}$. В последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ на позиции q, предшествующей позиции g, есть задание с резервом времени, перестановка которого после задания $j_{[g]}$ уменьшает штраф по заданию $j_{[g]}$. Задание $j_{[q]}$ остается незапаздывающим.

3. $\exists\, j_{[q]}$, $q < g$, $C_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}} < D_{j_{[q]}} < C_{j_{[g]}}$. Существует незапаздывающее задание $j_{[q]}$, директивный срок которого больше момента начала выполнения задания $j_{[g]}$, но меньше момента окончания задания $j_{[g]}$. При этом

$$\min\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}},\ l_{j_{[q]}}\right)\omega_{j_{[g]}} - \left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[q]}}\right)\omega_{j_{[q]}} > 0\,.$$

Следовательно, перестановка задания $j_{[q]}$ после задания $j_{[g]}$ приведет к уменьшению значения функционала, за счет использования резерва задания $j_{[q]}$.

4. $\forall i \mid P_{\min} \le i \le g \mid r_{j_{[i]}} \le 0$, но $\exists\, j_{[k]}$, $k < P_{\min} \mid D_{j_{[k]}} > C_{j_{[P_{\min}]}}$. На интервале перестановки задания $j_{[g]}$ резервы отсутствуют, но существует задание $j_{[k]}$, $k < P_{\min}$, директивный срок которого больше $C_{j_{[P_{\min}]}}$, следовательно, при перестановке задания $j_{[k]}$на позицию $P_{\min}$ образуется резерв на интервале переноса задания $j_{[g]}$.

Условие 4 не выполняется и $\forall i \mid P_{\min} \le i \le g \mid r_{j_{[\mathrm{i}]}} \le 0$, но $\exists\, j_{[\mathrm{k}]}$, $k < P_{\min} \mid D_{j_{[k]}} > C_{j_{[k]}}$, $D_{j_{[k]}} > C_{j_{[P_{\min}]}} - l_{j_{[P_{\min}]}}$, $D_{j_{[k]}} > D_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}}$. На интервале переноса задания $j_{[g]}$ резервы отсутствуют, но существует незапаздывающее задание $j_{[k]}$, $k < P_{\min}$ с директивным сроком, большим самого позднего момента начала выполнения задания $j_{[g]}$, при котором задание $j_{[g]}$ станет незапаздывающим, и, следовательно, существуют перестановки и встраивания, которые могут привести к образованию резервов на интервале переноса задания $j_{[g]}$.

В соответствии с утверждением 3, уменьшение значения функционала при встраивании задания $j_{[g]}$ на более раннюю позицию возможно только при наличии резервов на интервале встраивания.

Выполнение одного из условий 1–5 означает, что на интервале встраивания задания $j_{[g]}$ существуют резервы (условия 1–3) или они будут образованы в результате перестановок (условия 4, 5). При невыполнении условий 4, 5 перестановка заданий, занимающих позиции $\overline{1, P_{\min}-1}$, на интервал встраивания задания $j_{[g]}$, приведет к запаздыванию этих заданий, и т.к. они имеют более высокий приоритет, чем $j_{[g]}$, то встраивание задания $j_{[g]}$ приведет к увеличению значения функционала. Следовательно, если не выполняется ни одно из условий 1–5, то не существует встраиваний задания $j_{[g]}$ на более ранние позиции, приводящих к улучшению целевой функции.

Следствие. Пусть в последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ число запаздывающих заданий $n_{\text{з}} > 1$. Тогда, если в последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ ни для одного из запаздывающих заданий $j_{[g]}$ нет предшествующих заданий $j_{[s]}$, $s < g$, для которых выполняется хотя бы одно из условий 1–5, то последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ отвечает оптимальное значение функционала.

Пусть в последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ запаздывающее задание $j_{[g]}$ в результате встраивания заняло позицию $P_{\min} = m$. Пометим его $j^*_{[m]}$, а полученную последовательность $\sigma(j_{[g]})$.

Утверждение 6. Запаздывающее задание $j_{[k]}$, $k = \overline{m+1, g}$ в последовательности $\sigma(j_{[g]})$ может быть встроено на более раннюю позицию, что приведет к улучшению целевой функции только в том случае, если хотя бы у одного предшествующего задания есть резерв времени, либо (в случае отсутствия резервов) только в результате перестановки $j^*_{[m]}$ после задания $j_{[k]}$.

Доказательство. Доказательство в случае наличия резервов приведено в утверждениях 3 и 5. Рассмотрим случай, когда в последовательности $\sigma(j_{[g]})$ нет резервов.

Очевидно, что среди заданий на интервале $\overline{1, k-1}$ перестановка на позицию k возможна только для задания $j^*_{[m]}$, т.к. $\forall\, i = \overline{1, k-1}$ $D_{j_{[i]}} - C_{j_{[i]}} \le 0$, а для всех непомеченных заданий $\dfrac{\omega_{j_{[i]}}}{l_{j_{[i]}}} \ge \dfrac{\omega_{j_{[k]}}}{l_{j_{[k]}}}$, $i = \overline{1, k-1}$.

Выполним перестановку на позицию k задания $j^*_{[m]}$.

Значение целевой функции до переноса:

$$f=\sum_{i=m}^{k}\omega_{j_{[i]}}\max\left(0,C_{j_{[i]}}-D_{j_{[i]}}\right)=\sum_{i=m}^{k}\omega_{j_{[i]}}\left(C_{j_{[i]}}-D_{j_{[i]}}\right).$$

После переноса $j_{[m]}^{*}$ на позицию k:

$$f'=\omega_{j_{[m]}}\left(C_{j_{[m]}}+\sum_{i=m+1}^{k}l_{j_{[i]}}-D_{j_{[m]}}\right)+\sum_{i=m+1}^{k}\omega_{j_{[i]}}\max\left(0,C_{j_{[i]}}-D_{j_{[i]}}-l_{j_{[m]}}\right),$$

где $C_{j_{[m]}}$ — момент окончания выполнения задания $j_{[m]}^{*}$ до перестановки.

Докажем, что $f-f'$ может быть больше нуля:

$$f-f'=\left[\omega_{j_{[m]}}\left(C_{j_{[m]}}-D_{j_{[m]}}\right)+\sum_{i=m+1}^{k}\omega_{j_{[i]}}\left(C_{j_{[i]}}-D_{j_{[i]}}\right)\right]-$$

$$-\left[\omega_{j_{[m]}}\left(C_{j_{[m]}}+\sum_{i=m+1}^{k}l_{j_{[i]}}-D_{j_{[m]}}\right)+\sum_{i=m+1}^{k}\omega_{j_{[i]}}\max\left(0,\ C_{j_{[i]}}-D_{j_{[i]}}-l_{j_{[m]}}\right)\right]=$$

$$=\omega_{j_{[m]}}\left(C_{j_{[m]}}-D_{j_{[m]}}-C_{j_{[m]}}-\sum_{i=m+1}^{k}l_{j_{[i]}}+D_{j_{[m]}}\right)+$$

$$+\sum_{i=m+1}^{k}\omega_{j_{[i]}}\left[\left(C_{j_{[i]}}-D_{j_{[i]}}\right)-\max\left(0,C_{j_{[i]}}-D_{j_{[i]}}-l_{j_{[m]}}\right)\right]=$$

$$=\sum_{i=m+1}^{k}\left(\omega_{j_{[i]}}\min\left(l_{j_{[m]}},C_{j_{[i]}}-D_{j_{[i]}}\right)-\omega_{j_{[m]}}l_{j_{[i]}}\right). \qquad (5)$$

Проанализируем выражение (5). Разобьем сумму (5) на две части.

Пусть P — множество заданий на $\overline{m+1,k}$, которые после перестановки $j_{[m]}^{*}$ перестали запаздывать. Следовательно,

$$P\colon\ \left\{l_{j_{[m]}}\geq C_{j_{[i]}}-D_{j_{[i]}}\right\}.$$

Пусть Q — множество заданий на $\overline{m+1,k}$, которые после перестановки $j_{[m]}^{*}$ остались запаздывающими. Следовательно,

$$Q\colon\ \left\{l_{j_{[m]}}<C_{j_{[i]}}-D_{j_{[i]}}\right\}.$$

Тогда выражение (5) примет вид

$$\sum_{j_{[i]}\in P}\left(\omega_{j_{[i]}}\left(C_{j_{[i]}}-D_{j_{[i]}}\right)-\omega_{j_{[m]}}l_{j_{[i]}}\right)+\sum_{j_{[i]}\in Q}\left(\omega_{j_{[i]}}l_{j_{[m]}}-\omega_{j_{[m]}}l_{j_{[i]}}\right). \qquad (6)$$

Разделим обе части выражения (6) на $l_{j_{[i]}} l_{j_{[m]}}$:

$$\sum_{j[i]\in P}\left(\frac{\omega_{j_{[i]}}}{l_{j_{[i]}}}\xi_{j[i]}-\frac{\omega_{j_{[m]}}}{l_{j_{[m]}}}\right)+\sum_{j[i]\in Q}\left(\frac{\omega_{j_{[i]}}}{l_{j_{[i]}}}-\frac{\omega_{j_{[m]}}}{l_{j_{[m]}}}\right), \qquad (7)$$

где $\xi_{j_{[i]}}=\dfrac{C_{j_{[i]}}-D_{j_{[i]}}}{l_{j_{[m]}}}$, причем $\forall j_{[i]}:\xi_{j_{[i]}}\in[0,1]$.

Задания на интервале $\overline{m+1,k}$ имеют более высокий (или равный) приоритет, чем приоритет задания $j^*_{[m]}$, и следовательно, полученное значение выражения (7) может быть больше нуля и перестановка задания $j^*_{[m]}$ на позицию k может привести к уменьшению f.

Определение 8. Процедурой свободной перестановки называется процедура перестановки задания $j_{[k]}$ на позицию q ($k<q$) при условии $D_{j_{[k]}}\ge C_{j_{[q]}}$, $D_{j_{[k]}}<C_{j_{[q+1]}}$ и хотя бы для одного задания на интервале $\overline{k+1,q}$ выполняется

$$D_{j_{[i]}}<C_{j_{[i]}},\ \ i=\overline{k+1,q}\,.$$

Таким образом, свободная перестановка задания k выполняется на позицию с максимальным номером, на которой задание k не будет запаздывать. Очевидно, что в результате выполнения всех свободных перестановок в последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ значение целевой функции уменьшается.

При выполнении одной свободной перестановки значение целевой функции уменьшается на величину $\sum_{i\in z}\omega_{j_{[i]}}\min\left(l_{j_{[k]}},C_{j_{[i]}}-D_{j_{[i]}}\right)$, где

$$Z=\left\{j_{[i]}\middle|C_{j_{[i]}}>D_{j_{[i]}},\ i=\overline{k+1,q}\right\}.$$

Примечание к определению 8.

При выполнении нескольких свободных перестановок, во избежание зацикливания, начинать следует с задания, имеющего максимальный директивный срок, т.е. просматривать незапаздывающие задания по убыванию их директивных сроков.

Определение 9. Последовательность заданий, полученную в результате выполнения всех свободных перестановок в последовательности $\sigma^{\text{уп}}$, назовем $\sigma^{\text{сп}}$.

Утверждение 7. Утверждения 1–5 справедливы для последовательности $\sigma^{\text{сп}}$.

Доказательство. Выделим различия между последовательностями $\sigma^{\text{уп}}$ и $\sigma^{\text{сп}}$ и покажем, что эти различия не нарушают доказательств приведенных выше утверждений. При доказательстве утверждений 1–5 основными приемами являлись перестановки и встраивания.

Для перестановок доказательства утверждений аналогичны, если вместо $\sigma^{\text{уп}}$ использовать $\sigma^{\text{сп}}$, по таким причинам:

- все задания на интервале перестановки сдвигаются на более ранние позиции и, следовательно, штраф их уменьшается. При этом, задания, нарушающие последовательность $\sigma^{\text{уп}}$ (перенесенные в результате свободных перестановок), имеют штраф, равный нулю и поэтому могут быть исключены из рассмотрения как в f, так и в f';
- для запаздывающих заданий в последовательности $\sigma^{\text{сп}}$ приоритетная упорядоченность сохраняется и, следовательно, приоритет задания, которое переставляется, больше приоритета любого из заданий на интервале перестановки.

Процедура встраивания для последовательности $\sigma^{\text{сп}}$ аналогична процедуре встраивания для последовательности $\sigma^{\text{уп}}$, т.к. приоритет встраиваемого задания в $\sigma^{\text{сп}}$ всегда ниже или равен приоритету любого из заданий на интервале встраивания, что обусловливает необходимость для выполнения процедуры встраивания наличия резервов у заданий, занимающих более ранние позиции.

Таким образом, утверждения 1–5 верны и для последовательности $\sigma^{\text{сп}}$.

На интервале встраивания в последовательности $\sigma^{\text{сп}}$ могут находиться задания, перенесенные в результате свободных перестановок и нарушающие приоритетную упорядоченность. Поэтому все задания, следующие за встраиваемым заданием, необходимо переупорядочить в соответствии с их приоритетами и для запаздывающих заданий в этой последовательности в свою очередь проверять возможность переноса на более ранние позиции за счет резервов незапаздывающих заданий.

Таким образом, условие встраивания $\sigma^{\text{уп}}$ (3), справедливое для последовательности $\sigma^{\text{уп}}$, в последовательности $\sigma^{\text{сп}}$ не выполняется.

Утверждение 8. Для последовательности $\sigma^{\text{сп}}$ не существует перестановок и встраиваний, приводящих к улучшению целевой функции, если выполняется хотя бы одно из условий:

а) $D_{j_{[i]}} - C_{j_{[i]}} \ge 0,\ \forall i = \overline{1, n}$;

б) $D_{j_{[i]}} - C_{j_{[i]}} \le 0,\ \forall i = \overline{1, l}$, $D_{j_{[i]}} - C_{j_{[i]}} \ge 0,\ \forall i = \overline{l+1, n}$;

в) $D_{j_{[i]}} - C_{j_{[i]}} \le 0,\ \forall i = \overline{1, n}$;

г) $D_{j_{[i]}} - C_{j_{[i]}} \ge 0,\ \forall i = \overline{1, l}$ (множество R), $D_{j_{[i]}} - C_{j_{[i]}} \le 0,\quad \forall i = \overline{l+1, n}$ (множество Z).

Для каждого задания $j_{[k]}$, принадлежащего множеству заданий с резервами (R) и каждого задания $j_{[g]}$, принадлежащего множеству запаздывающих заданий (Z), выполняется:

$$D_{j_{[k]}} \le D_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}},$$

$$k \in R, \quad g \in Z.$$

Пункт а) не требует доказательства, т.к. $f = 0$. Доказательство пунктов б), в), г) аналогично доказательству утверждений 1, 3 и 4.

Следствие. При выполнении хотя бы одного из условий, сформулированных в утверждении 8, в последовательности $\sigma^{\text{сп}}$ достигается оптимальное значение функционала.

Определение 10. Запаздывающее задание $j_{[g]}$ в последовательности $\sigma^{\text{сп}}$ называется конкурирующим, если в этой последовательности найдется хотя бы одно предшествующее задание $j_{[l]}$, для которого выполняются условия

$$D_{j_{[l]}} > D_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}} \text{ и } D_{j_{[l]}} - C_{j_{[l]}} > 0.$$

Определение 11. Последовательностью σ^k называется последовательность, полученная из $\sigma^{\text{сп}}$ в результате выполнения ряда перестановок и встраиваний, направленных на оптимальное использование резервов времени незапаздывающих заданий.

Используются следующие типы перестановок и встраиваний.

Перестановки:

а) заданий, для которых резерв времени больше нуля;

б) заданий, использовавших резервы в результате перестановок и встраиваний, если за ними следуют запаздывающие задания высшего или равного приоритета.

Перестановки осуществляются, если при их выполнении значение функционала уменьшается.

Встраивания:

а) при наличии резервов на интервале встраивания;

б) при образовании резервов на интервале встраивания в соответствии с условиями 4 и 5, сформулированными в утверждении 5.

Правила выполнения перестановок и встраиваний в последовательности σ^k приведены ниже.

Введем правила пометки заданий в последовательности σ^k при выполнении перестановок и встраиваний.

В этой последовательности * обозначены задания, которые были запаздывающими в последовательности $\sigma^{\text{сп}}$ и в результате выполнения перестановок и встраиваний переместились на более ранние позиции, использовав резервы времени предшествующих заданий, ** — задания, ранее помеченные *, которые в результате последующих перестановок переместились на более поздние позиции (но эти позиции не соответствуют приоритетам этих заданий). За заданиями, помеченными *, ** в последовательности σ^k следуют запаздывающие задания с высшим приоритетом.

Рассмотрим структуру последовательности σ^k. Каждому заданию в этой последовательности соответствует номер задания и номер позиции. В исходной последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ задания пронумерованы по убыванию их приоритетов. На следующих итерациях присвоенная нумерация заданий сохраняется (меняются только номера позиций, занимаемых заданиями). Следовательно, в последовательности σ^k чем меньше номер задания, тем выше его приоритет. Приоритетную упорядоченность нарушают задания, помеченные *, **, которые в результате перестановок и встраиваний использовали резервы времени предшествующих заданий и переместились с позиций, соответствующих их приоритетам на более ранние позиции, что позволило улучшить значение целевой функции.

Приоритетную упорядоченность в последовательности σ^k нарушают также задания, которые в результате свободных перестановок переместились на более поздние позиции. Все остальные задания упорядочены в соответствии с их приоритетами.

Таким образом, последовательность σ^k от последовательности $\sigma^{\text{сп}}$ отличают только задания, помеченные *, **, которые переместились на более ранние позиции.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 9. Если на итерации k в последовательности σ^k для запаздывающего задания $j_{[\mathrm{g}]}$ существует предшествующее задание $j_{[l]}$ такое, что выполняются условия

$$D_{j_{[l]}} > C_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}};$$

$$\omega_{j_{[g]}} \min\left(l_{j_{[l]}}, C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}\right) > \omega_{j_{[l]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[l]}}\right),$$

то перестановка задания $j_{[l]}$ на позицию g приводит к уменьшению целевой функции.

Доказательство. Для доказательства утверждения выведем условия перестановки, при выполнении которых уменьшается целевая функция, т.е. $f - f' > 0$:

$$f = \sum_{i=l}^{g} \omega_{j_{[i]}} \max\left(0, C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}}\right).$$

После перестановки $j_{[l]}$ на позицию g

$$f' = \omega_{j_{[l]}} \max\left(0, C_{j_{[g]}} - D_{j_{[l]}}\right) + \sum_{i=l+1}^{g} \omega_{j_{[i]}} \max\left(0, C_{j_{[i]}} - l_{j_{[l]}} - D_{j_{[i]}}\right);$$

$$f - f' = \sum_{i=l}^{g} \omega_{j_{[i]}} \max\left(0, C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}}\right) - \omega_{j_{[l]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[l]}}\right) -$$

$$- \sum_{i=l+1}^{g} \omega_{j_{[i]}} \max\left(0, C_{j_{[i]}} - l_{j_{[l]}} - D_{j_{[i]}}\right) = -\omega_{j_{[l]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[l]}}\right) +$$

$$+ \sum_{i=l+1}^{g} \omega_{j_{[i]}} \max\left(0, C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}}\right) - \sum_{i=l+1}^{g} \omega_{j_{[i]}} \max\left(0, C_{j_{[i]}} - l_{j_{[l]}} - D_{j_{[i]}}\right).$$

Пусть все задания $i = \overline{l+1, g-1}$ не запаздывают до переноса, т.е. $C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}} < 0$. Тогда

$$f - f' = -\omega_{j_{[l]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[l]}}\right) + \omega_{j_{[g]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}\right) -$$

$$-\omega_{j_{[g]}} \max\left(0, C_{j_{[g]}} - l_{j_{[l]}} - D_{j_{[g]}}\right) =$$

$$= -\omega_{j_{[l]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[l]}}\right) + \omega_{j_{[g]}} \min\left(l_{j_{[l]}}, C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}\right) > 0\,.$$

Таким образом, если выполнено условие

$$\omega_{j_{[g]}} \min\left(l_{j_{[l]}}, C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}\right) > \omega_{j_{[l]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[l]}}\right),$$

то при перестановке задания $j_{[l]}$ на позицию g происходит уменьшение целевой функции.

Сформулируем необходимые условия для перемещения в последовательности σ^k запаздывающих заданий на более ранние позиции, при которых значение функционала уменьшается за счет существующих и освободившихся резервов.

Утверждение 10. Пусть в последовательности σ^k $j_{[g]}$ — запаздывающее задание. Уменьшение значения функционала при перемещении $j_{[g]}$ на более ранние позиции возможно только при выполнении одного из следующих условий:

1. $\exists\, j_{[i]}, P_{\min} \le i \le g \mid r_{j_{[i]}} > 0$. На интервале переноса задания $j_{[g]}$ есть задания с резервами времени, где $P_{\min}$ — позиция, на которой штраф по заданию $j_{[g]}$ минимален (или равен нулю).

2. $\exists\, j_{[l]}, l < g,\ D_{j_{[l]}} > C_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}};\ \omega_{j_{[g]}} \min\left(l_{j_{[l]}}, C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}\right) >$

$$>\omega_{j_{[l]}}(C_{j_{[g]}}-D_{j_{[l]}})\,. \quad (8)$$

Существует незапаздывающее задание $j_{[l]}$, директивный срок которого больше момента начала выполнения задания $j_{[g]}$. При этом выполняется условие (8).

3. $\forall\, i \mid P_{\min} \le i \le g \mid r_{j_{[i]}} \le 0$, но $\exists\, j_{[k]}$, $k < P_{\min} \mid D_{j_{[k]}} > C_{j_{[P\min]}}$.

4. $\forall\, i \mid P_{\min} \le i \le g \mid r_{j_{[i]}} \le 0$, но $\exists j_{[k]}$, $k < P_{\min} \mid D_{j_{[k]}} > C_{j_{[k]}}$, $D_{j_{[k]}} > C_{j_{[P\min]}} -$

$- l_{j_{[P_{\min}]}}$, $D_{j_{[k]}} > D_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}}$.

5. $\forall\, i \mid i = \overline{1, g-1}$, $r_{j_{[i]}} \le 0$, но $\exists\, j_{[l]}$, $l < g$, $\dfrac{\omega_{j_{[l]}}}{l_{j_{[l]}}} \le \dfrac{\omega_{j_{[g]}}}{l_{j_{[g]}}}$.

6. $\forall i \mid i = \overline{1, g-1}$, $r_{j_{[i]}} \le 0$, но $\exists\, j_{[m]^*}$ $(j_{[m]^{**}})$, $m < g$.

Аналогично утверждению 5, выполнение одного из условий 1–4 означает, что на интервале встраивания задания $j_{[g]}$ существуют резервы (условия 1, 2) или они будут образованы в результате перестановок (условия 3, 4). Выполнение условий 5 или 6 означает, что в последовательности σ^k присутствуют задания, использовавшие резервы на интервале встраивания задания $j_{[g]}$, и перемещение их на более поздние позиции приведет к образованию резервов на этом интервале. Если не выполняется ни одно из условий 1–6, то перемещение задания $j_{[g]}$ на более ранние позиции приведет к увеличению значения функционала.

Следствие. Пусть в результате выполнения алгоритма построена оптимальная подпоследовательность на интервале $\overline{1, k}$. Если для каждого из запаздывающих заданий на интервале $\overline{k+1, n}$ не выполняется ни одно из условий 1–6, то последовательность σ^k оптимальна.

Число итераций предлагаемого алгоритма определяется количеством конкурирующих заданий. На каждой итерации проверяется возможность использования резервов времени предшествующих заданий очередным конкурирующим заданием и строится оптимальное расписание рассматриваемой последовательности. На первой итерации строится оптимальное расписание для заданий на интервале $\overline{1, g_1}$, где $j_{[g_1]}$ — первое запаздывающее конкурирующее задание в последовательности $\sigma^{\text{сп}}$. На следующей итерации рассматривается последовательность заданий на интервале $\overline{1, g_2}$, где $j_{[g_2]}$ — следующее запаздывающее конкурирующее задание. Пусть уже выполнена k–1 итерация и построено оптимальное расписание для последовательности заданий на интервале $\overline{1, k-1}$, переходим к очередному запаздывающему конкурирующему заданию $j_{[k]}$ и строим оптимальное расписание для подпоследовательности σ^k, включающей задания на интервале $\overline{1, k}$. Проверяется возможность уменьшения значения функционала за счет использования заданием $j_{[k]}$ существующих резервов времени или резервов, полученных в результате перестановок заданий с метками (или заданий меньшего приоритета) на более поздние позиции. На каждой итерации значение функционала уменьшается или остается неизменным.

Примечание. Необходимо различать конкурирующие запаздывающие задания, определенные в последовательности $\sigma^{\text{сп}}$, и задания, запаздывание которых относительно их директивных сроков возникло в процессе выполнения перестановок и встраиваний. Справедливы следующие утверждения, доказательство которых очевидно.

Утверждение 11. Запаздывающее задание $j_{[g]}$ на k-й итерации может занять более раннюю позицию, что приведет к улучшению целевой функции, только в том случае, если хотя бы у одного задания $j_{[k]}$ на интервале $\overline{1,g-1}$ есть резерв и: $D_{j[k]} > D_{j[g]} - l_{j[g]}$, либо (в случае отсутствия резервов) на интервале $\overline{1,g-1}$ есть задания с метками или задания с меньшим (или равным) значением приоритета.

Утверждение 12. Пусть в последовательности $\sigma^{\text{сп}}$ для конкурирующих заданий $j_{[k]}, j_{[r]} \in J$ выполняется:

$$l_{j_{[k]}} \le l_{j_{[r]}}, \quad \omega_{j_{[k]}} \ge \omega_{j_{[r]}}, \quad D_{j_{[k]}} \le D_{j_{[r]}}.$$

В оптимальном расписании задание $j_{[k]}$ будет предшествовать заданию $j_{[r]}$.

Утверждение 13. Неконкурирующие задания в последовательности σ^k не могут занять более ранние позиции, чем позиции, занимаемые ими в $\sigma^{\text{сп}}$.

Утверждение 14. Пусть уже построена оптимальная подпоследовательность на интервале $\overline{1, g-1}$. Запаздывающее конкурирующее задание $j_{[g]}$ на k-й итерации не может быть перемещено на более раннюю позицию и исключается из числа конкурентноспособных, если на интервале $\overline{1, g-1}$ ни у одного из заданий нет резервов, отсутствуют непомеченные задания с меньшим или равным значением приоритета и для всех помеченных заданий выполняется:

$$\omega_{j^*_{[i]}} \ge \omega_{j_{[g]}}, \ l_{j^*_{[i]}} \le l_{j_{[g]}}, \ i = \overline{1, g-1}.$$

Утверждение 15. Если в последовательности σ^k конкурирующее задание $j_{[g]}$ в результате выполнения перестановок и встраиваний не использовало существующие резервы, минимальное значение функционала соответствует позиции g, занимаемой этим заданием, на интервале $\overline{1, g-1}$ отсутствуют непомеченные задания с меньшим или равным значением приоритета и нет заданий, помеченных *, **, то задание $j_{[g]}$ исключается из множества конкурирующих заданий.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Предлагаемый алгоритм решения рассматриваемой задачи состоит из двух этапов — предварительного этапа (алгоритм А0) и этапа оптимизации (алгоритм А1).

Алгоритм А0 (предварительный этап)

1. Упорядочить задания по убыванию их приоритетов — отношения w_j / l_j. Полученную последовательность обозначить $\sigma^{\text{уп}}$. Проверить условия утверждения 5. Если в последовательности $\sigma^{\text{уп}}$ ни для одного из запаздывающих заданий нет предшествующих заданий, для которых выполняется хотя бы одно из условий 1–5, то последовательность $\sigma^{\text{уп}}$ оптимальна, конец алгоритма. Иначе перейти на п.2.

2. Выполнить свободные перестановки в последовательности $\sigma^{\text{уп}}$, начиная с задания с максимальным директивным сроком.

2.1. Определить множество заданий Y:

$$Y = \{k\colon D_{j_{[k]}} \geq C_{j_{[q]}};\ D_{j_{[k]}} \leq C_{j_{[q+1]}};\ \ k, q = \overline{1, n},\ \ k < q,$$

$$\exists\, j_{[i]}\colon D_{j_{[i]}} < C_{j_{[i]}},\ \ i = \overline{k+1, q}\,\}.$$

2.2. Найти задание $j_{[k']}$ с максимальным директивным сроком из множества Y. Если $Y = \varnothing$, то перейти на п.2.4.

2.3. Выполнить перестановку задания $j_{[k']}$ на соответствующую ему позицию q' и исключить $j_{[k']}$ из множества Y. Перейти на пункт 2.2.

2.4. Проверить условия а), б), в), г) утверждения 8. Если выполняется хотя бы одно из этих условий, последовательность $\sigma^{\text{сп}}$ оптимальна, конец алгоритма. Иначе определить множество конкурирующих заданий и перейти к блоку оптимизации.

В результате выполнения алгоритма А0 любая произвольная последовательность заданий приводится к последовательности $\sigma^{\text{сп}}$.

Алгоритм А1 (этап оптимизации)

Алгоритм состоит из k однотипных итераций, где k — количество конкурирующих заданий. На каждой итерации проверяется возможность использования резервов времени незапаздывающих заданий очередным конкурирующим заданием и порожденными в результате его перестановок новыми запаздывающими заданиями. В результате выполнения каждой итерации значение функционала уменьшается (или остается неизменным).

Пусть $g^{\text{пр}}$ — позиция предшествующего задания, которое рассматривалось на предыдущей итерации (на первой итерации $g^{\text{пр}} = 0$).

1. Найти очередное запаздывающее задание $j_{[g]}$ на интервале $\overline{g^{\text{пр}}+1, n}$. Если это задание конкурирующее — начало новой итерации. Если такого задания нет, то конец, иначе проверить для задания $j_{[g]}$ условия утверждения 10. Если выполняется хотя бы одно из условий 1–6, перейти на п.2, иначе если задание $j_{[g]}$ не принадлежит исходному множеству конкурирующих заданий, установить $g^{\text{пр}} = g$, перейти на п.1. Если же задание $j_{[g]}$ — конкурирующее, проверить условия утверждения 14. При выполнении этих условий задание $j_{[g]}$ исключается из множества конкурирующих заданий. Установить $g^{\text{пр}} = g$, перейти на п.1. Если $g = n$, то конец алгоритма, текущая последовательность оптимальна.

2. Выполнить все свободные перестановки на интервале $\overline{1, g}$, начиная с задания с максимальным директивным сроком.

3. Если в результате выполнения п.2 задание $j_{[g]}$ перестало запаздывать, переместившись на позицию $g^{\text{н}}$, то установить $g^{\text{пр}} = g^{\text{н}}$ и перейти на п.1, иначе — на п.4.

4. Найти задание $j_{[l]}$ $(l < g)$, для которого выполняется:

$$D_{j_{[l]}} \geq C_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}};$$

$$\omega_{j_{[l]}}(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[l]}}) < \omega_{j_{[g]}} \min\,(l_{j_{[l]}}, C_{j_{[g]}} - D_{j_{[g]}}).$$

Если найдено хотя бы одно задание, отвечающее этим условиям, перейти на п. 5, иначе — на п.7.

5. Выполнить перестановку задания $j_{[l]}$ на позицию g. Пометить задание $j_{[g]}$ знаком *.

6. Если $j_{[g]}$ перестало запаздывать, то установить $g^{\text{пр}} = g^{\text{н}}$ и перейти на п.1, иначе — на п.2.

7. Найти позицию p, на которой штраф по заданию $j_{[g]}$ станет минимальным или равным нулю.

8. Проверить, есть ли на интервале $\overline{p, g-1}$ резервы, если да, то перейти на п.9, иначе — на п.12.

9. Проверить условие: $l_{j_{[g]}} > l_{j[p]}$. Если это условие выполняется, перейти на п.11, иначе — на п.10.

10. Встроить задание $j_{[g]}$ на позицию p, если эту позицию занимает непомеченное задание с резервом. Перейти на п.14. Если же эту позицию занимает задание, помеченное * (**), или задание высшего приоритета без резерва, встроить задание $j_{[g]}$ на позицию p+1. Перейти на п.12.

11. Встроить задание $j_{[g]}$ на позицию p+1.

12. Найти на интервале $\overline{1,\, p-1}$ задание $j_{[s]}$, для которого справедливо:

$$D_{j_{[s]}} > C_{j_{[s]}}; \quad D_{j_{[s]}} > D_{j_{[g]}} - l_{j_{[g]}}; \quad D_{j_{[s]}} > C_{j_{[p-1]}}. \tag{9}$$

Если такие задания найдены, перейти на п.13. Иначе если п.12 выполнялся после п.8, перейти на п.16, если после п.10, перейти на п.14.

13. Используя резервы заданий, удовлетворяющих условию (9), а также резерв задания $j_{[p]}$, определить новую позицию $p^{\text{н}}$, на которой штраф по заданию $j_{[g]}$ минимален (или равен нулю). Если такая позиция найдена ($p^{\text{н}} < p$), установить $p = p^{\text{н}}$, перейти на п.8. Иначе перейти на п.14.

14. Пометить задание $j_{[g]}$, занявшее в результате выполнения встраивания новую позицию, знаком *. Задания, следующие за этим заданием, упорядочить в соответствии с их приоритетами, уничтожив все метки.

15. Установить $g^{\text{пр}} = g^{\text{н}} - 1$. Перейти на п.1.

16. Найти на интервале $\overline{1, g-1}$ непомеченное задание $j_{[r]}$, для которого выполняется:

$$\frac{\omega_{j_{[r]}}}{l_{j_{[r]}}} \le \frac{\omega_{j_{[g]}}}{l_{j_{[g]}}}. \tag{10}$$

Проверить условие

$$\omega_{j_{[r]}}\left(C_{j_{[g]}} - D_{j_{[r]}}\right) < \sum_{i=r}^{g} \omega_{j_{[i]}}\left(C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}}\right), \tag{11}$$

$\forall\, i$, для которых $\dfrac{\omega_{j_{[i]}}}{l_{j_{[i]}}} \ge \dfrac{\omega_{j_{[r]}}}{l_{j_{[r]}}}$.

Если условие (11) выполняется, перейти к п.17, иначе найти следующее задание, отвечающее условиям (10), (11). Если такое задание не найдено, перейти на п.22.

17. Запомнить текущую последовательность, обозначив ее σ^{Φ}.

18. Выполнить перестановку задания $j_{[r]}$ после задания $j_{[g]}$.

19. Установить $g^{\text{пр}} = r - 1$, перейти на п.1.

20. Переупорядочить задания на интервале $\overline{1, g-1}$ по изложенным правилам, проверяя возможность перемещения на более раннюю позицию для каждого задания на этом интервале.

21. Определить значение функционала полученной последовательности $\sigma^{\text{н}}$ и сравнить его со значением функционала последовательности σ^{Φ}. Если значение целевой функции не уменьшилось, возвратиться к последовательности σ^{Φ}, перейти на п.16, выполняя его для задания $j_{[g]}$.

Иначе если в последовательности $\sigma^{\text{н}}$ задание $j_{[g]}$ перестало запаздывать, установить $g^{\text{пр}} = g^{\text{н}}$. Перейти на п.1. Если же $j_{[g]}$ запаздывает, перейти на п.2.

22. Найти задание $j^{*}_{[m]}$ ($j^{**}_{[m]}$) на интервале $\overline{1, g-1}$. В первую очередь анализируется задание, помеченное * (**) последним. Если такое задание не найдено, перейти на п.27, иначе на п.23.

23. Проверить условие

$$\omega_{j^{*}_{[m]}}\left(C_{j[k]} - D_{j^{*}_{[m]}}\right) < \sum_{i=m}^{g} \omega_{j_{[i]}} \max\left(0, C_{j_{[i]}} - D_{j_{[i]}}\right), \tag{12}$$

где $k = g$, если $\dfrac{\omega_{j^{*}_{[m]}}}{l_{j^{*}_{[m]}}} \le \dfrac{\omega_{j[g]}}{l_{j[g]}}$, иначе $k = s$, где s+1 — позиция первого непомеченного задания, приоритет которого меньше приоритета задания $j^{*}_{[m]}$ ($j^{**}_{[m]}$), $s > m*$.

В случае выполнения условия (12) перейти на п.24, иначе найти следующее задание, обозначенное *, **, для которого выполняется это условие. Если такие задания не найдены, перейти на п.27.

24. Запомнить текущую последовательность заданий, обозначив ее $\sigma^{\Phi*}$.

25. Выполнить перестановку задания $j^{*}_{[m]}$ ($j^{**}_{[m]}$):

а) после задания $j_{[g]}$, если

$$\frac{\omega_{j^{*}_{[m]}}}{l_{j^{*}_{[m]}}} \le \frac{\omega_{j_{[g]}}}{l_{j_{[g]}}};$$

б) на позицию k, определенную выше и соответствующую приоритету задания $j^{*}_{[m]}$, если

$$\frac{\omega_{j^{*}_{[m]}}}{l_{j^{*}_{[m]}}} > \frac{\omega_{j_{[g]}}}{l_{j_{[g]}}}.$$

Установить $g^{\text{пр}} = g^{\text{н}} - 1$, где $g^{\text{н}}$ — новая позиция задания $j_{[g]}$ после перестановки $j^{*}_{[m]}$, перейти на п.1 и переупорядочить задания на интервале $\overline{1, g}$ по изложенным правилам.

26. Определить значение функционала полученной последовательности $g^{\text{н}^{*}}$ и сравнить его со значением функционала последовательности σ^{Φ}. Если значение целевой функции не уменьшилось, возвратиться к последовательности σ^{Φ}, перейти на п.22. В случае уменьшения значения

целевой функции в последовательности $\sigma^{н^*}$ обозначение * снимается с задания $j^*_{[m]}$, если в результате перестановок это задание заняло позицию в соответствии с его приоритетом. Иначе это задание обозначается **.

27. Установить $g^{пр} = g$, перейти на п.1. Если $g^{пр} = n$, то конец.

Разработанным алгоритмом был просчитан ряд тестовых примеров. Оптимальные значения функционала, полученные данным алгоритмом, совпали со значениями функционала, полученными известными методами. Ниже приводятся результаты по двум тестовым примерам, которые в литературе относятся к числу нерешенных. Для них известны неулучшаемые значения функционала, полученные в результате решения лучшими известными алгоритмами. В результате решения предложенным алгоритмом значения функционала совпадают с известными.

Исходные данные по примерам 1 и 2 приведены в табл. 1 и 2 соответственно. После каждой таблицы приведена полученная оптимальная последовательность выполнения заданий $\sigma^{опт}$ и значение функционала $f^{опт}$.

Таблица 1. Исходные данные для примера 1

j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
l_j	37	71	18	74	62	92	61	59	73	63
D_j	655	263	510	495	668	392	574	325	588	554
ω_j	1	7	6	6	8	6	2	5	9	6
j	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
l_j	7	63	72	48	60	62	90	62	2	38
D_j	666	634	397	356	649	241	429	290	687	533
ω_j	2	6	10	9	3	1	6	9	5	5
j	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
l_j	88	75	94	73	51	9	74	54	96	39
D_j	410	686	402	633	562	431	548	601	643	521
ω_j	10	7	1	4	4	2	10	4	8	6
j	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
l_j	61	71	65	95	48	15	31	57	9	84
D_j	332	267	586	482	466	600	468	541	489	247
ω_j	2	3	1	9	1	10	10	5	5	3

Оптимальная последовательность $\sigma^{опт}$: 14, 2, 18, 8, 13, 21, 26, 37, 39, 3, 30, 27, 36, 20, 11, 19, 5, 9, 10, 12, 34, 22, 38, 29, 4, 25, 28, 17, 6, 24, 15, 32, 40, 7, 31, 1, 35, 16, 33, 23. Значение функционала $f^{опт} = 77\,122$.

Таблица 2. Исходные данные для примера 2

j	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
l_j	21	61	84	72	97	9	27	31	61	38
D_j	1098	871	1082	1002	1233	1005	807	929	794	1124
ω_j	9	3	7	8	2	7	1	6	8	8
j	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
l_j	6	97	43	18	34	86	66	34	66	78
D_j	961	843	1110	1016	828	1214	933	982	933	1167
ω_j	4	3	5	10	10	7	8	1	1	4
j	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
l_j	43	88	98	20	76	94	66	23	59	87
D_j	801	1125	875	1220	1013	884	1012	1149	867	870
ω_j	8	5	6	2	6	10	3	7	6	9
j	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
l_j	47	65	77	13	57	89	5	35	55	3
D_j	808	1199	1248	873	1032	970	795	1181	1081	1134
ω_j	3	5	2	9	9	4	6	2	8	8
j	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
l_j	9	33	40	83	45	2	49	67	59	52
D_j	1041	1102	1170	794	1050	795	1203	1246	1024	813
ω_j	4	5	6	3	2	10	3	3	3	2

Оптимальная последовательность $\sigma^{\text{опт}}$: 46, 37, 6, 34, 11, 14, 41, 1, 15, 8, 21, 39, 9, 17, 4, 26, 30, 31, 23, 29, 35, 42, 25, 3, 40, 10, 28, 43, 13, 24, 16, 32, 47, 38, 22, 20, 49, 2, 27, 36, 48, 45, 50, 7, 44, 12, 18, 33, 5, 19. Значение функционала $f^{\text{опт}} = 43\,504$.

Для сокращения времени решения задачи возможно ограничение числа выполняемых итераций. В этом случае отклонение полученного частного решения от оптимального определяется следующим образом:

$$f\left(\sigma^k\right) - f\left(\sigma^{\text{опт}}\right) \le \Delta f_{\max}.$$

Здесь $\Delta f_{\max} = f\left(\sigma^k\right) - f^*\left(\sigma^k\right)$, $f^*\left(\sigma^k\right)$ — нижняя оценка $f\left(\sigma^{\text{опт}}\right)$, т.е. $f^*(\sigma_k) \le f\left(\sigma^{\text{опт}}\right)$. Значение $f^*\left(\sigma^k\right)$ определяется на основе анализа резервов незапаздывающих заданий последовательности σ^k и запаздываний конкурирующих заданий в этой последовательности, по которым не выполнялись итерации алгоритма.

Алгоритм также позволяет в результате введения правил декомпозиции и дополнительных условий отсечения неперспективных вариантов строить быстродействующие эффективные эвристические алгоритмы со значением показателя качества, незначительно отличающимся от оптимального.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов О.А., Аксьонова Л.О., Місюра О.Б., Вакуленко О.С.* Дослідження властивостей та алгоритм розв'язання важкорозв'язуваної комбінаторної задачі «Мінімізація сумарного зваженого запізнення виконання незалежних завдань одним приладом»; Нац. техн. ун-т України «Київ. політехн. ін-т» — Київ, 2001. — 63 с. — Деп. в ДНТБ України 8.10.2001, № 165–Ук2001.
2. *Павлов А.А., Мисюра Е.Б., Михайлов В.В.* Исследование задачи минимизации суммарного взвешенного момента окончания выполнения множества заданий с директивными сроками одним прибором / Киев. политехн. ин-т. — Киев, 1993. — 26 с. — Деп. в УкрНИИНТИ 29.06.93, № 1276 — Ук93.
3. *Abdul-razaq T. S., Potts C. N., Van Wassenhove L. N.* A survey of algorithms for the single-machine total weighted tardiness scheduling problem // Discrete Appl. Math. — 1990. — № 26. — P. 235–253.
4. *Akturk, M. S., Yildirim, M. B.* A new lower bounding scheme for the total weighted tardiness problem // Computer and Operations Research. — 1998. — **25**, N 4. — P. 265–278.
5. *Chambers R. J., Carraway R. L., Lowe T. J., Morin T. L.* Dominance and decomposition heuristics for single machine scheduling // Operations Research. — 1991. — N 39. — P. 639–647.
6. *Emmons H.* One machine sequencing to minimize certain functions of job tardiness // Operations Research. — 1969. — N 17. — P. 701–715.
7. *Fisher M. L.* A dual algorithm for the one-machine scheduling problem // Math. Programming — 1976. — N 11. — P. 229–251.
8. *Hoogeveen J. A., Van de Velde S. L.* Stronger Lagrangian bounds by use of slack variables: applications to machine scheduling problems // Math. Prog. — 1995. — N 70. — P. 173–190.
9. *Lawler E. L.* A «pseudopolynomial» algorithm for sequencing jobs to minimize total tardiness // Annual Discrete Math. — 1977. — N 1. — P. 331–342.
10. *Potts C. N., Van Wassenhove L.N.* A branch and bound algorithm for total weighted tardiness problem // Operations Research. — 1985. — N 33. — P. 363–377.
11. *.Potts C. N., Van Wassenhove L.N.* Dynamic programming and decomposition approaches for the single machine total tardiness problem // European Journal of Operational Research. — 1987. — N 32. — P. 405–414.
12. *Rachamadugu R.M.V.* A note on weighted tardiness problem // Operations Research. — 1987. — N 35. — P. 450–452.
13. *Rinnooy Kan A.H.G., Lageweg B.J., Lenstra J.K.* Minimizing total costs in one-machine scheduling // Operations Research. — 1975. — N 23. — P. 908–927.
14. *Szwarc W.* Adjacent orderings in single machine scheduling with earliness and tardiness penalties // Naval Research Logistics. — 1993. — N. 40. — P. 229-243.
15. *Szwarc W. and Liu J.J.* Weighted tardiness single machine scheduling with proportional weights // Management Science. — 1993. — N 39. — P. 626–632.

Поступила 11.03.2002