

УДК 622.235.535.2

МОДЕЛЬ ДИСПЕРСИИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ОТРЫВНОМ СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

П. ФРАНЦЕЗЕ*, Л. ЗАННЕТИ**

*Институт вычислительной математики и информатики
университета им. Мейсона, шт. Вирджиния, США

**Туринский политехнический институт, Турин, Италия

Получено 15.04.2001

На основе модели малого порядка исследуется хаотическая динамика отрывного течения вблизи границы сложной формы. Рассматривается вихревой поток невязкой жидкости. Описывается метод нахождения функции тока для линейных профилей со сдвигом. Рассматривается обтекание границы типа "снегового карниза". На острой кромке происходит отрыв потока, который затем присоединяется к границе вниз по течению от циркуляционной области. Для того, чтобы точка отрыва фиксировалась в кромке, в потоке располагается точечный вихрь. Нестационарность вводится отклонением этого вихря от состояния равновесия. Вверх по течению от точки отрыва непрерывно вводятся пассивные маркеры, которые затем захватываются в циркуляционную зону. Их траектории рассчитываются численным интегрированием. Определяется также концентрация пассивных частиц в различные моменты времени в фиксированной точке вниз по течению от области присоединения. Гетероклинический узел и динамика циркуляционной зоны являются такими, что они поочередно то захватывают, то выпускают пассивные частицы. Этот результат соответствует расчетам, проведенным на основе модели более высокого порядка.

На основі моделі малого порядку досліджується хаотична динаміка відривної течії поблизу границі складної форми. Розглянуто вихровий потік невязкої рідини. Описано метод знаходження функції течії для лінійних профілів зі зсувом. Розглянуто обтікання границі типу "снігового карнизу". Біля гострої кромки має місце відрив потоку, який потім приєднується до границі вниз за течією від циркуляційної області. Для того, щоб точка відриву фіксувалася на кромці, в потоці розміщувався точечний вихор. Нестационарність вводиться відхиленням цього вихора від стану рівноваги. Вгору по течії від точки відриву неперервно вводяться пасивні маркери, які потім захоплюються в циркуляційну зону. Їхні траєкторії розраховуються чисельним інтегруванням. Визначається також концентрація пасивних часток в різні моменти часу у фіксованій точці вниз за течією від області приєднання. Гетерокліничний вузол та динаміка циркуляційної зони є такими, що вони по чергово то захоплюють, то випускають пасивні частки. Цей результат відповідає розрахункам, що були проведені на основі моделі більш високого порядку.

The chaotic dynamics of separated flows past complex geometries is studied by means of a low order model. The flows are assumed to be rotational and inviscid, and a technique is described to determine the stream functions for linear shear profiles. The geometry considered is a snow cornice, whose edge allows for the separation of the flow and reattachment downstream of the recirculation region. A free point vortex has been added to the flows in order to constrain the separation points to be located at the edge. Unsteadiness is imposed by displacing the vortex from equilibrium. The trajectories of passive scalars continuously released upwind of the separation point and trapped by the recirculating bubble are numerically integrated, and concentration time series are calculated at fixed locations downwind of the reattachment point. The heteroclinic tangle and lobe dynamics of the recirculation region appear to be among the causes of intermittent trapping and release of scalars, in agreement with the simulation performed by higher order models.

ВВЕДЕНИЕ

Перенос и дисперсия пассивных частиц в турбулентных пограничных слоях вблизи границ сложной формы является важной практической задачей. Она привлекает широкое внимание исследователей в области экологии, а также специалистов, занимающихся такими техническими проблемами, как оптимизация камер сгорания и перемешивания в химических реакторах.

Однако сложность течений, в которых имеют место отрыв и присоединение потока, делает аналитическое изучение этой задачи более трудным, чем для пограничных слоев на регулярных участках границы. Относительно мало известно о поведении потоков воздуха вблизи холмов, зданий и

других нерегулярных систем [13]. Для такой классической задачи как течение за уступом не существует приемлимого математического метода для моделирования эволюции скалярного поля. Физические эксперименты показывают общую эйлеровскую картину данного течения [2], без анализа дисперсионного процесса. В работе [15] было выполнено прямое численное моделирование течения за уступом при числах Рейнольдса больших 5100, где, наряду с другими явлениями, выявлены некоторые нестационарные характеристики данного потока. В частности, описаны периодические смещения точки присоединения, находящиеся в соответствии с результатами других авторов [8].

Цель настоящей работы – показать, как нестационарность присоединенного течения влияет на дисперсию пассивных частиц, непрерывно выпус-

каемых из точечного источника. Выбор модели малого порядка позволяет выявить главные эффекты нестационарности. Эта модель допускает простое моделирование уноса частиц из циркуляционной области, что достигается описанием процессов формирования когерентных структур в циркуляционной области и их последующего перехода в свободное течение. Другими физическими механизмами, которые присутствуют в реальных потоках, такими как вихревой срыв, сворачивание следа и неустойчивости в сдвиговом слое, пренебрегается. Выявлен простой механизм, относящийся к динамике гетероклининой орбиты в нестационарных гамильтоновых динамических системах [24].

В работе выполнены расчеты двумерных отрывных течений на основе модели идеальной несжимаемой жидкости. Рассматривается обтекание границы, напоминающей снеговой карниз, который является естественным устройством для управления отрывом потока на гребнях гор. Техника моделирования основана на результатах работы [23], где построено аналитическое решение, которое описывает стационарный отрывной поток за снеговым карнизом с применением классического метода конформных отображений. Чтобы представить снеговую карниз, Ринглеб [23] построил отображение действительной оси в комплексной плоскости ζ на линию, формирующую исходную границу с острой кромкой в физической плоскости z . Для моделирования циркуляционной области в потоке располагался точечный вихрь. Этот вихрь находился в равновесии и удовлетворял стационарному условию Кутта. В работе [7] аналогичная методика использована для моделирования нестационарного отрывного течения за полубесконечной пластиной и дано описание методики активного управления таким потоком.

Так как жидкость несжимаема, лагранжево движение пассивных частиц описывается гамильтоновой системой, сопряженными переменными которой являются декартовы координаты, а гамильтонианом – функция тока. Аналогично гамильтоновой системой описывается и движение точечного вихря там, где функция Гамильтона связана с функцией Грина для лапласиана в области течения [17].

Уравнения движения вихря в модели Ринглеба интегрируемы, поскольку система является автономной гамильтоновой системой с одной степенью свободы. Отметим, что Ринглеб сделал формальную ошибку при описании закона движения вихря в присутствии стенки. Это повлияло на условие равновесия вихря, однако несмотря на это, его

результаты качественно вполне корректны (см. Приложение В).

Функция тока жидких частиц определяется положением вихря, поэтому, в общем случае, она зависит от времени. Для такой неавтономной гамильтоновой системы движение частиц может быть неинтегрируемым хаотическим [1, 20]. Однако, если вихрь находится в положении равновесия, гамильтониан частиц жидкости является автономным, а движение – интегрируемым и регулярным. В интегрируемом случае поле течения можно разделить на две основные области: жидкость, вовлеченная вихрем (замкнутые линии тока, окружающие вихрь), и свободный поток (линии тока незамкнуты). Эти две области не обмениваются жидкостью одна с другой и разделены линией тока, которая выходит с острой кромки и присоединяется к стенке вниз по течению, так называемой гетероклининой орбитой. Во вспомогательной плоскости ζ это течение представляет собой вихревую пару, линией симметрии которой является действительная ось.

Представляемая модель отличается от модели Ринглеба в трех главных аспектах: (i) мы задаем сдвиговое течение при помощи асимптотического условия, чтобы вверх по потоку от точки отрыва иметь более сложное течение, чем потенциальное, в то же время, оно остается достаточно простым для аналитического описания; (ii) при малых смещениях вихря от положения равновесия система становится нестационарной; (iii) в рассматриваемой нами конфигурации границы острые кромки сглажены, то есть они имеют большую, но конечную кривизну, при этом удовлетворяется условие Кутта, когда вихрь постоянной циркуляции не находится в положении равновесия.

На границе с большой кривизной, как и в острой кромке, имеет место отрыв потока. В этой связи для нахождения интенсивности вихря, способного индуцировать отрыв в кромке, может быть использовано условие Кутта. Вихрь, слабо смещенный из состояния равновесия, движется вдоль малой периодической орбиты и вызывает колебания точки присоединения относительно точки максимальной кривизны. Так как кромка сглажена, поток вблизи нее не имеет сингулярностей, и условие Кутта не требуется.

Типичный вертикальный профиль осредненного течения дает закон энергии, используемый для описания атмосферного пограничного слоя. В работе [14] рассматривался, например, линейный сдвиговой профиль, чтобы изучить влияние сдвига на течение за гребнями гор.

Во вспомогательной плоскости ζ течение сво-

дится к колеблющейся вихревой паре (КВП). В работе [24] исследовались колебания вихревой пары и механизм лагранжевого хаоса в фазовом пространстве: устойчивые и неустойчивые многообразия гетероклиных траекторий пересекают друг друга, и жидкость то захватывается, то выбрасывается вихрем. В эйлеровом представлении это явление представляет собой хаотическое перемешивание жидкости в области, окружающей сепаратрису. Нас интересовало его влияние на дисперсию пассивных частиц.

Мы исследовали, как отрыв и присоединение нестационарного потока влияют на поведение пятна жидкости расположенного вблизи или внутри циркуляционной зоны. Найдено, что циркуляционная зона оказывает существенное влияние на крупномасштабную динамику пассивных частиц, вызывая колебания концентрации частиц вниз по течению.

В следующих разделах будет представлена модель Ринглеба для стационарного потенциального потока, а затем описан метод аналитического исследования нестационарного вращающегося течения постоянной завихренности. Чтобы найти равновесные конфигурации, обсудить их устойчивость и возможность хаотического перемешивания, будет использован формализм динамических систем. Будут обсуждены также результаты численного моделирования двух различных геометрий вместе с концентрацией частиц в некоторых выбранных точках.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ

В данном разделе описывается математическая модель циркуляционного течения вблизи границы сложной формы, такой как снеговой карниз. Эта модель, впервые предложенная Ринглебом [23], способна описать двумерный стационарный отрыв с острой кромки. Она является основой для моделирования нестационарного циркуляционного сдвигового потока, который будет рассмотрен в разделе 3.

Вводятся безразмерные координаты путем соотнесения к характерным значениям масштабов скорости и длины. Исходя из них вводятся типичные масштабы для времени и циркуляции. Масштаб скорости равен скорости набегающего потока, а масштаб длины определяется параметром отображения, как будет описано ниже. Рассматривается область, ограниченная аналитической

кривой в плоскости z , где $z = x + iy$. Твердая граница расширяется до бесконечности вдоль оси x и характеризуется наличием острой кромки. Как следует из теоремы Римана [12, 19], она может быть получена конформным отображением полуплоскости $\eta \geq 0$ на плоскость $\zeta = \xi + i\eta$. При этом бесконечность в плоскости z соответствует бесконечности в плоскости ζ . Функция, предложенная Ринглебом, имеет вид:

$$z = \zeta + \frac{\zeta_1^2}{\zeta - \zeta_1}, \quad (1)$$

где $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ является комплексной постоянной с $\eta_1 < 0$, форма границы для данного случая показана на рис. 1.

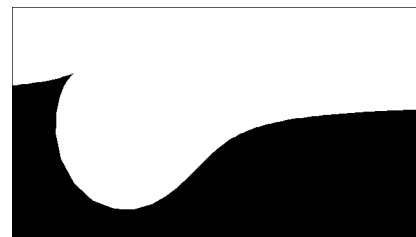


Рис. 1. Снеговой карниз в отображении Ринглеба

Такое отображение имеет свойство $z(a\zeta; a\zeta_1) = az(\zeta; \zeta_1)$, причем разные значения a приводят к автомодельной форме карнизов. Возвышение карниза h может быть взято как масштаб длины. При $h = \text{Im } z(0) = -\text{Im } \zeta_1$, пространственный масштаб принимает значение $\text{Im } \zeta_1$, в то время как отношение $\text{Re } \zeta_1 / \text{Im } \zeta_1$ определяет форму карниза.

Модель состоит из вихря постоянной циркуляции, который удовлетворяет условию Кутта и находится в равновесии со стационарным набегающим потоком. Комплексный потенциал течения строится суперпозицией основных потоков. В плоскости

$$w = q_\infty \zeta + \frac{\gamma}{2\pi i} \log \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0^*} \right), \quad (2)$$

(здесь q_∞ – скорость свободного течения) второй член в правой части представляет собой комплексный потенциал точечного вихря интенсивности γ , расположенного в точке ζ_0 , и сопряженного ему вихря, который находится в точке ζ_0^* . В плоскости ζ уравнение (2) представляет собой комплексный потенциал вихревой пары (см. рис. 7).

Так как комплексный потенциал инвариантен при конформном отображении $z = z(\zeta)$, постоян-

ная q_∞ соответствует скорости свободного течения Q_∞ в плоскости z :

$$Q_\infty = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dw}{dz} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{dw}{d\zeta} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} = q_\infty. \quad (3)$$

Траектории вихря в физической плоскости z являются решениями гамильтоновой системы:

$$\dot{x}_0 = \frac{\partial H}{\partial y_0}; \quad \dot{y}_0 = -\frac{\partial H}{\partial x_0}, \quad (4)$$

причем гамильтониан H может быть получен из соотношения для гамильтониана H' данного вихря в плоскости Рауса [6]:

$$H = H' + \frac{\gamma}{4\pi} \log \left| \frac{dz_0}{d\zeta_0} \right|, \quad (5)$$

здесь

$$H' = q_\infty \eta_0 + \frac{\gamma}{4\pi} \log \eta_0. \quad (6)$$

Производные гамильтониана H' согласно правилу Рауса даны в Приложении А.

1.1. Стационарное условие Кутта

Данная модель описывает отрыв с острой или закругленной кромки большой кривизны, если в ней удовлетворяется условие Кутта, т.е. соотношение между интенсивностью и положением вихря должно устранить сингулярность в потоке. Поэтому, накладывается условие равенства нулю скорости в острой кромке:

$$\left(\frac{dw}{d\zeta} \right)_{\zeta=\zeta_c} = 0, \quad (7)$$

где ζ_c – положение угла в ζ -плоскости, в отображении (1) выполняется $\zeta_c = 0$.

Для комплексного потенциала $w(\zeta)$, определяемого соотношением (2), условие Кутта удовлетворяется, если

$$\frac{\gamma}{q_\infty} = -\frac{\pi |\zeta_c - \zeta_0|^2}{\eta_0}. \quad (8)$$

Отметим, что существует бесконечно много отношений γ/q_∞ .

В физической плоскости комплексная скорость в угле z_c задается выражением:

$$\lim_{z \rightarrow z_c} \frac{dw}{dz} = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_c} \frac{dw}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}. \quad (9)$$

В случае острой кромки она конечна, как в отображении (1), в других случаях она равна нулю.

Завершающим этапом в моделировании циркуляционного потока является нахождение равновесного положения вихря. Заметим, что фазовое пространство динамической системы (4) совпадает с областью течения в том смысле, что декартовы координаты вихря (x_0, y_0) являются сопряженными переменными, а изолинии гамильтониана H формируют картину возможных траекторий вихря заданной интенсивности. Поэтому равновесные положения вихря ($\dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = 0$) являются фиксированными точками в этом пространстве. При этом эллиптические точки соответствуют устойчивому равновесию, а гиперболические – неустойчивому. Модель стационарного циркуляционного течения за углом представлена вихрем в состоянии равновесия (т.е. пойманным вихрем), который удовлетворяет условию Кутта. Решения уравнений равновесия зависят от геометрии границы течения и отношения интенсивности вихря к скорости свободного потока γ/q_∞ . Так как было найдено, что рассматриваемая геометрия допускает захват вихря, можно ожидать множество устойчивых решений.

Поэтому координаты вихря (ξ_0, η_0) в плоскости ζ должны одновременно удовлетворять условию равновесия и условию Кутта (8). Они являются решениями уравнения

$$\frac{|\zeta_c - \zeta_0|^2}{4\eta_0} \left[\frac{1}{\eta_0} \frac{d\zeta_0}{dz_0} - i \frac{d}{dz} \left(\log \frac{d\zeta_0}{dz_0} \right) \right] = 1. \quad (10)$$

Тогда интенсивность вихря получается из условия Кутта (8).

1.2. Сравнение с вихревым методом

Точность модели с одним вихрем, которая была описана выше, проверялась сравнением некоторых результатов с результатами, полученными на основе более сложного вихревого метода. Чтобы описать внезапный старт потока с образованием отрывной зоны, использовалось дискретно-вихревое моделирование течения за снеговым карнизом [5, 10]. Согласно методу дискретных вихрей поток вначале является потенциальным, затем в области отрыва порождается свободный точечный вихрь, интенсивность которого находится из условия Кутта, а положение задается в фиксированной точке вблизи угла. Движение этого вихря, обусловленное наличием стенки и набегающего течения, определяется численным интегрированием. Через заданные интервалы времени в поток вводятся новые вихри. Вихревая картина течения в различные моменты времени показана на рис. 2;

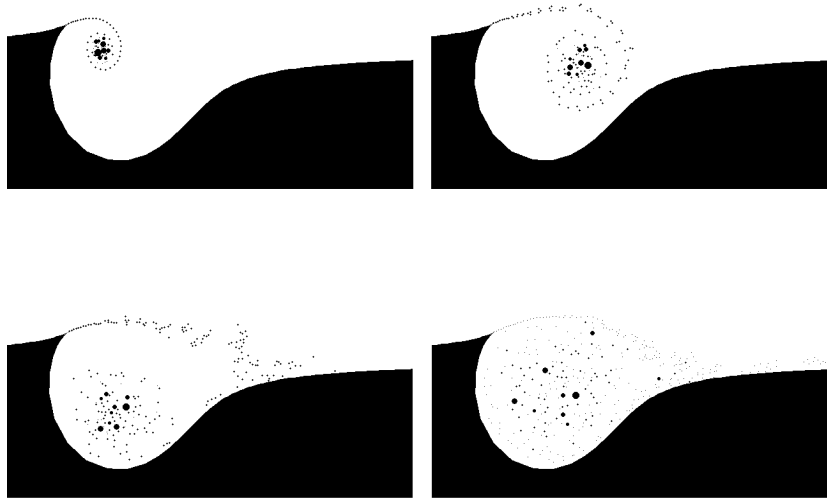


Рис. 2. Моделирование течения за снеговым карнизом дискретно-вихревым методом. Маркеры здесь представляют вихри, размер маркера пропорционален интенсивности соответствующего вихря

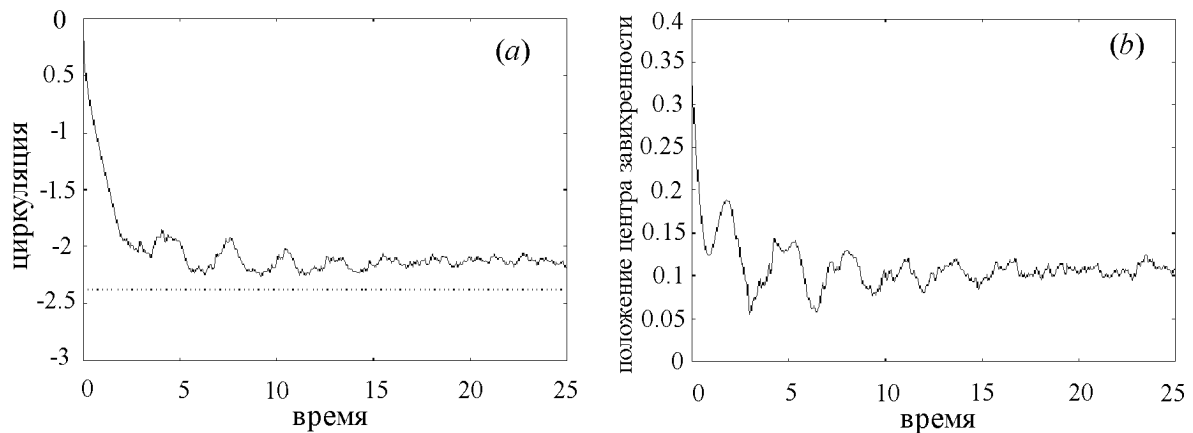


Рис. 3. (a) Общая циркуляция в дискретно-вихревой модели (сплошная линия) и циркуляция в модели с одним вихрем (пунктирная линия) как функции времени; (b) отстояние центра завихренности в дискретно-вихревой модели от положения равновесия вихря

интенсивности свободных вихрей здесь пропорциональны размеру символов, их представляющих. Можно видеть, что вихревая пелена сворачивается вокруг точки с самой большой (по абсолютной величине) циркуляцией. Эти результаты согласуются с результатами, представленными в работах [7, 15] для других течений с захватыванием вихрей. Вихревая пелена за карнизом нарастает до тех пор, пока значение общей циркуляции здесь не становится более или менее постоянным. Установившееся течение характеризуется незначительными колебаниями общей циркуляции и центра завихренности.

Мы сравнивали асимптотические значения циркуляции и положение центра завихренности с интенсивностью и положением точечного вихря, которые были получены в нашей модели с одним вихрем (центр завихренности оценивается здесь как центр величины). На рис. 3, а показаны интегральная циркуляция, как функция времени (сплошная линия), и циркуляция для модели с одним вихрем (пунктирная линия). Рис. 3, б иллюстрирует отстояние центра завихренности от равновесного положения вихря в модели с одним вихрем. Видно, что эти две модели находятся в хорошем соответствии друг с другом. Таким

образом, можно ожидать, что крупномасштабные характеристики течения достаточно хорошо описываются моделью с одним вихрем. Достоинство этой модели в ее простоте, что допускает аналитическое описание крупномасштабного механизма дисперсии, как будет показано в разделе 4.

В расчетах применялась численная схема интегрирования второго порядка; геометрия определялась параметром $\zeta_1 = 0.2 - i0.1$, скорость набегающего потока $q_\infty = 1$. Шаг интегрирования по времени принимался $\Delta t = 0.001$, а новый вихрь выбрасывался через каждые два шага по времени в фиксированной точке $\zeta = 0.005i$. Согласно рис. 3 переходные процессы, следующие за импульсным стартом, почти исчезали при $t > 15$.

2. СДВИГОВОЕ ТЕЧЕНИЕ

В данном разделе описывается методика моделирования отрывного циркуляционного сдвигового течения вблизи границы сложной формы.

Рассматривается поле течения с завихренностью $\nabla \times \mathbf{q} = \omega = \text{const}$ и следующим профилем скорости в дальнем поле:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} q = u_\infty - \omega y. \quad (11)$$

Такую модель можно считать первым приближением пограничного слоя и, следовательно, она работает при $y < \delta$. Например, такая модель может быть полезной при изучении влияния топографии на дисперсию частиц внутри схваченного в общих чертах пограничного слоя.

Движение пассивных частиц описывается гамильтоновой динамической системой:

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \dot{y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (12)$$

где функция тока ψ представляет гамильтониан, а скалярные координаты (x, y) являются каноническими переменными. Функция тока ψ связана с завихренностью ω линейным уравнением Пуассона:

$$\nabla^2 \psi = -\omega. \quad (13)$$

Чтобы найти решение уравнения Пуассона (13), мы разработали аналитическую процедуру, основанную на методе конформных отображений [27]. Пусть

$$\psi = \psi_\omega + \psi_p, \quad (14)$$

где функция тока ψ_ω описывает сдвиговое течение $u = -\omega y$, то есть:

$$\psi_\omega = -\frac{1}{2}\omega y^2, \quad (15)$$

а функция тока ψ_p является гармонической в области течения.

Так как

$$\nabla^2 \psi_\omega = -\omega \quad (16)$$

и

$$\nabla^2 \psi_p = 0, \quad (17)$$

то уравнение (13) удовлетворяется. Задача была сведена к нахождению гармонической функции тока ψ_p , которая обеспечивает выполнение граничных условий, то есть равенство дальнего поля скорости величине $(u_\infty - \omega y)$ и непроницаемость стенки.

Для этого был введен комплексный потенциал w_p , мнимой частью которого является функция ψ_p . Область течения в плоскости z задается следующим конформным отображением на нее полуплоскости $\text{Im}(\zeta) > 0$:

$$z = \zeta + \frac{\zeta_1^2}{\zeta + i\delta - \zeta_1}. \quad (18)$$

Это отображение является модифицированным преобразованием Ринглеба (1). Действительный положительный параметр δ вводится здесь для того, чтобы сгладить угол (чем меньше δ , тем острее угол).

Дальнейшее преобразование

$$\lambda = \frac{i - \zeta}{i + \zeta} \quad (19)$$

отображает полуплоскость $\text{Im}(\zeta) > 0$ на внутренность единичного круга $|\lambda| = 1$ в λ -плоскости. Таким образом, цепочка отображений $z \rightarrow \zeta \rightarrow \lambda$ переводит границу физической области течения на единичную окружность в плоскости λ , где $\lambda = -1$ соответствует бесконечности в плоскости z .

В физической плоскости сдвиговой поток (15) индуцирует следующую нормальную к стенке компоненту скорости \tilde{v} :

$$\tilde{v} = \omega y_b \sin \beta, \quad (20)$$

где индекс b обозначает границу, а $\beta = \arg(dz/d\zeta)$ – угол между границей и осью x . В соответствии с уравнением (20), условие непроницаемости границы в z -плоскости будет удовлетворяться, когда нормальная к границе компонента скорости, вызванная потенциалом w_p , равна $-\tilde{v}$, то есть:

$$-\text{Im} \left(\frac{dw_p}{dz} e^{i\beta} \right) = -\tilde{v}. \quad (21)$$

В плоскости λ это условие имеет вид

$$\text{Re} \left(\frac{dw_p}{d\lambda} \lambda \right)_{|\lambda|=1} = -\tilde{v} \left| \frac{dz}{d\lambda} \right|_{|\lambda|=1}. \quad (22)$$

Поскольку в области нет точечных вихрей (они будут добавлены в поток позже), комплексная скорость dw_p/dz не может быть сингулярной внутри области течения. Отображения $z \rightarrow \lambda$ являются регулярными внутри единичного круга $|\lambda| \leq 1$ ($\lambda \neq -1$) в плоскости λ , поэтому комплексная функция $dw_p/d\lambda$ не должна быть сингулярной внутри этого круга, за исключением точек $\lambda = -1$, которые соответствуют $z = \infty$. Тогда мы можем предположить:

$$\frac{dw_p}{d\lambda} = F(\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) \lambda^{n-1}, \quad (23)$$

где $F(\lambda)$ содержит возможные сингулярности, расположенные при $\lambda = -1$, то есть, в общем случае выполняется

$$F(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j (\lambda + 1)^{-j}. \quad (24)$$

Для нахождения коэффициентов c_j используется условие: скорость на бесконечности (при $z = \infty$), вызванная комплексным потенциалом w_p , равна u_{∞} . Так как для отображений (18) производная на бесконечности будет

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d\zeta}{dz} = 1, \quad (25)$$

то

$$\begin{aligned} u_{\infty} &= \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{dw_p}{d\zeta} = \lim_{\lambda \rightarrow -1} \left(\frac{dw_p}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\zeta} \right) = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow -1} \left[\frac{dw_p}{d\lambda} \frac{(\lambda + 1)^2}{-2i} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Из последнего вытекает, что все коэффициенты c_j при $j > 2$ равны нулю, а

$$c_2 = -2i u_{\infty}. \quad (27)$$

Коэффициент c_1 находится из условия, согласно которому расход массы через границу Q , возникающий из-за сдвига, должен быть сбалансирован потенциальным потоком

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} -\omega y_b \frac{dy_b}{dx_b} dx_b = -\frac{\omega}{2} [y_b^2]_{-\infty}^{+\infty}, \quad (28)$$

а также в соответствии со свойством инвариантности комплексного потенциала

$$-Q = -i \oint_{|\lambda|=1} \frac{dw_p}{d\lambda} = \pi c_1. \quad (29)$$

Тогда функция $F(\lambda)$ полностью определена:

$$F(\lambda) = -2i u_{\infty} \frac{1}{(\lambda + 1)^2} - \frac{Q}{\pi} \frac{1}{\lambda + 1} \quad (30)$$

В соответствии с уравнением (28), расход массы Q , относящийся к отображению (18) равен нулю.

Чтобы рассчитать второй член с правой стороны уравнения (23), используем соотношения (22) и (30) при $\lambda = \exp(i\vartheta)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) &= -\tilde{v} \left| \frac{dz}{d\lambda} \right| - \\ -\operatorname{Re} \left(-2i u_{\infty} \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^2} - \frac{Q}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda + 1} \right) &= \\ = -\tilde{v} \left| \frac{dz}{d\lambda} \right| + \frac{Q}{2\pi}. \end{aligned} \quad (31)$$

Так как правая сторона (31) не сингулярная, коэффициенты a_n и b_n в левой части стремятся к нулю при больших n . Коэффициенты a_n и b_n могут быть найдены численно при помощи быстрого преобразования Фурье. Обычно мы принимаем $n = 2^8$.

Окончательно комплексный потенциал w_p находится интегрированием уравнения (23):

$$w_p = \frac{2i u_{\infty}}{\lambda + 1} - \frac{Q}{\pi} \log(\lambda + 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{n} \lambda^n. \quad (32)$$

В общем случае, для геометрий, задаваемых отображением (18), условие Кутта не выполняется, т.е. поток в кромке не отрывается. Сдвиговое вихревое течение генерирует циркуляционную область, но точка отрыва не физична, она расположена вниз от угла. Чтобы удовлетворить условию Кутта, в течение должен быть добавлен вихрь, как и в разделе 2: для сдвигового потока справедливы те же рассуждения относительно интенсивности и равновесия вихря, что и для потенциального.

С точечным вихрем комплексный потенциал принимает вид:

$$w_p = \frac{2i u_{\infty}}{\lambda + 1} - \frac{Q}{\pi} \log(\lambda + 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{n} \lambda^n + \frac{\gamma}{2i\pi} \log \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \zeta_0^*} \right). \quad (33)$$

Полная функция тока, в которой учитываются как сдвиговая, так и потенциальная компоненты задается таким образом:

$$\psi = -\frac{1}{2} \omega y^2 + \operatorname{Im}(w_p), \quad (34)$$

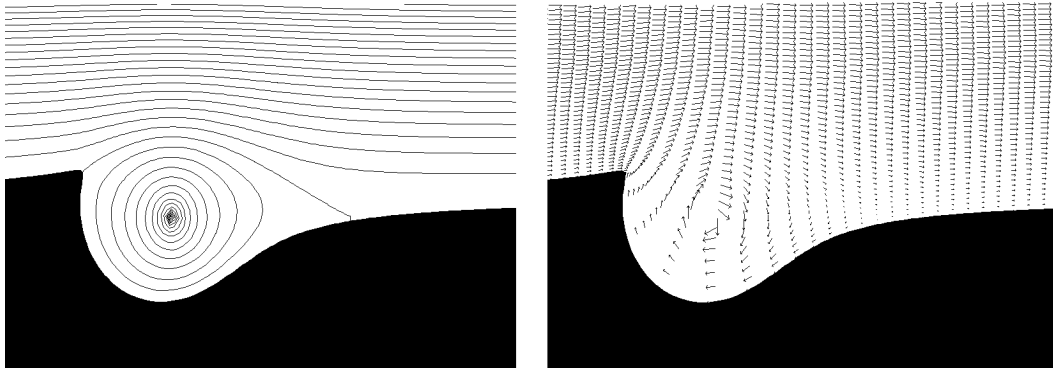


Рис. 4. Линии тока и поле скорости за скругленным снежным карнизом

что определяет следующее поле скорости:

$$z^* = -\omega y + \left[F(\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) \lambda^{n-1} \right] \frac{d\lambda}{dz} + \left[\frac{\gamma}{2i\pi} \left(\frac{1}{\zeta - \zeta_0} - \frac{1}{\zeta - \zeta_0^*} \right) \right] \frac{d\zeta}{dz}. \quad (35)$$

Скорость вихря может быть получена следующим образом:

$$\dot{z}_0^* = -\omega y_0 + \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{dw_p}{dz} - \frac{\gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - z_0} \right). \quad (36)$$

Как и в случае потенциального течения, она описывается гамильтоновой системой

$$\dot{x}_0 = \frac{\partial H}{\partial y_0}, \quad \dot{y}_0 = -\frac{\partial H}{\partial x_0}, \quad (37)$$

где функция Гамильтона H задается как

$$H = -\frac{1}{2} \omega y^2 + \text{Im} \left[\frac{2i u_{\infty}}{\lambda + 1} - \frac{Q}{\pi} \log(\lambda + 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - ib_n}{n} \lambda^n \right] - \frac{\gamma}{4\pi} \left[\log \eta_0 - \log \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| \right]. \quad (38)$$

Тогда интенсивность и положение вихря находятся из уравнения (36), выполняемого в угловой точке z_c , и уравнений (37), соответствующих равновесному положению вихря ($\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$). На рис. 4 изображены линии тока и поле скорости для отрывного сдвигового течения в области, геометрия которой задается преобразованием (18). Рассматриваемое поле скорости характеризуется параметрами $\omega/u_{\infty} = -10$ и $\gamma/u_{\infty} = -2.243$.

Устойчивость равновесия видна из рис. 5, на котором представлены изолинии гамильтониана, в данном случае это – траектории вихря. Точка равновесия, помеченная квадратом, является эллиптической, т. е. устойчивой фиксированной точкой в фазовом пространстве.

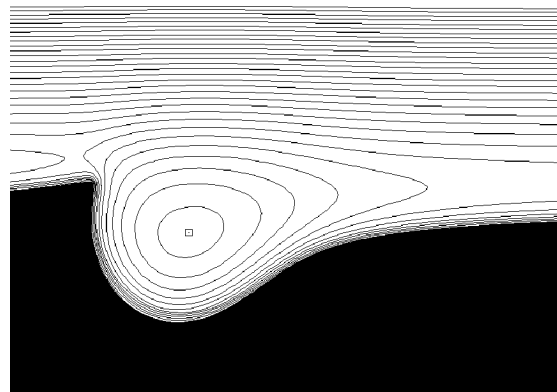


Рис. 5. Картина возможных траекторий вихря. Точка равновесия помечена квадратом

2.1. Нестационарное течение

Рассматривается лагранжев перенос пассивных частиц в случае нестационарного потока. Их движение описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y; x_0, y_0), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y; x_0, y_0), \end{aligned} \quad (39)$$

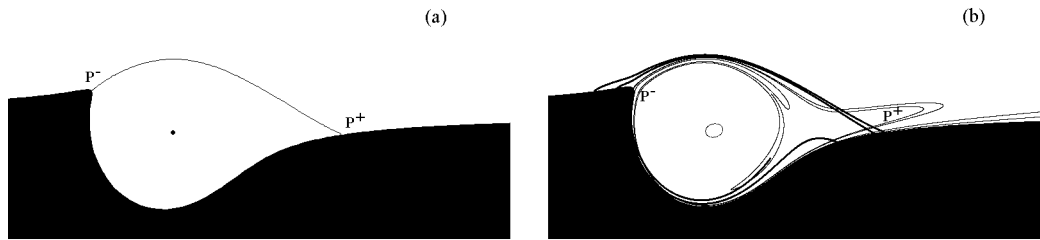


Рис. 6. Сепаратриса, связывающая две фиксированные точки (P^-, P^+) в невозмущенном случае (a); разделение линий тока на две взаимодействующие ветви под влиянием возмущения (b); неустойчивое многообразие – жирная линия, устойчивое многообразие – тонкая линия

где линия тока ψ зависит как от координат частицы (x, y) , так и от положения вихря (x_0, y_0) . Для вихря, расположенного в точке равновесия (x_0^E, y_0^E) , гамильтонова система с одной степенью свободы является автономной и поэтому интегрируемой. В этом случае фазовый портрет совпадает с картиной линий тока для стационарного течения (см. рис. 4). Фазовое пространство характеризуется линией тока, связывающей две застойные точки или, на языке динамических систем, гетероклиной орбитой между двумя гиперболическими фиксированными точками.

На рис. 6, а эта линия тока изображена в физической плоскости. Эта особенность очень важна, так как показывает возможность хаотического перемешивания, если система подвержена малым нестационарным возмущениям, что будет проанализировано ниже.

Если вихрь смещается от положения равновесия (x_0^E, y_0^E) на малую величину ε , то его траектория становится замкнутой орбитой (см. рис. 5). Его периодическое движение подчиняется уравнениям:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0^E + f(x_0^E, y_0^E, \varepsilon, t), \\ y_0 &= y_0^E + g(x_0^E, y_0^E, \varepsilon, t). \end{aligned} \tag{40}$$

В этом случае система (39) уже не является автономной, так как функция тока (34) зависит от времени через координаты $(x_0(t), y_0(t))$. Формально можно записать:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(x, y; x_0^E, y_0^E, \varepsilon) = \psi^E(x, y; x_0^E, y_0^E) + \\ &+ \varepsilon \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \right) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{41}$$

и уравнения (39) сводятся теперь к нестационарным возмущениям интегрируемой гамильтоновой системы:

$$\dot{x} = \frac{\partial \psi^E}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \right) + O(\varepsilon^2), \tag{42}$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial \psi^E}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial y_0} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \right) + O(\varepsilon^2).$$

Как показано на рис. 6, а, при $\varepsilon = 0$ неустойчивое многообразие, выходящее из гиперболической фиксированной точки P^- , гладко присоединяется к устойчивому многообразию, которое начинается в другой фиксированной точке P^+ , а гетероклиная траектория в невозмущенной системе представляет собой линию, соединяющую P^- и P^+ . Известно, что при $\varepsilon \neq 0$ происходит существенное изменение фазового портрета, при этом нестационарность системы, если только она не связана с каким-либо типом симметрии, вызывает неинтегрируемость системы [1, 20]. Устойчивое и неустойчивое многообразия не соединяются гладко, а взаимодействуют друг с другом трансверсально, формируя парадигматический хаотический клубок [11, 26, 28]. Так как любая точка пересечения отображается на другую такую же точку, число трансверсальных пересечений бесконечно; расстояние между точками пересечения стремится к нулю, потому что они подходят к гиперболической фиксированной точке. В то же время, система сохраняет область блоков, окруженных дугами многообразий, которые заключены между двумя пересечениями. На рис. 6, б показано сечение Пуанкаре для течения за снежным карнизом, оно подтверждает сценарий устойчивого и неустойчивого многообразий, взаимодействующих трансверсально.

Хаотический характер системы может быть доказан всякий раз, когда есть данные о таких трансверсальных пересечениях. В частности, некоторые авторы использовали метод Мельникова [18], чтобы аналитически вывести трансверсальные пересечения в возмущенных интегрируемых системах [4, 24, 29].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Стационарный сдвиговой поток за уступом или снеговым карнизом во вспомогательной плоскости ζ подобен течению вокруг вихревой пары, исключая разницу, связанную с поправкой Рауса (5), которая оказывает влияние на скорость вихрей. Картина линий тока для течения с вихревой парой показана на рис. 7, где можно видеть две гиперболические фиксированные точки P^- и P^+ , связанные гетероклиническими орбитами. В работе [24] в течение с вихревой парой вносились возмущения скорости и исследовалась хаотическая динамика, получающегося в результате течения с осциллирующей вихревой парой. Акцентировалось внимание на динамике той части течения, которая окружена возмущенными гетероклиническими орбитами. В работах [24, 28] даны количественные оценки процесса перемешивания через количество вовлеченной в хаотическое перемешивание жидкости и продолжительность нахождения частицы в хаотическом режиме.

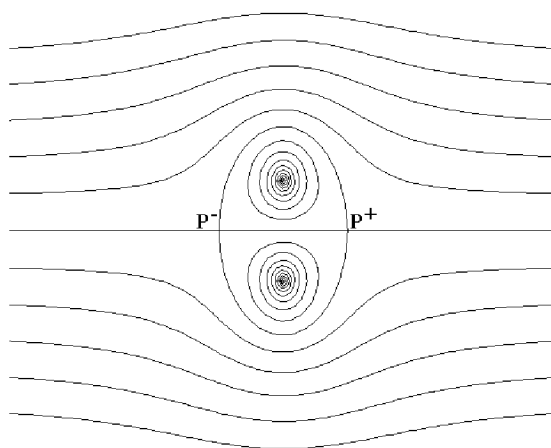


Рис. 7. Линии тока вокруг вихревой пары

В нестационарных течениях вблизи границ сложной формы, рассмотренных в настоящей работе, проявляются подобные механизмы перемешивания в присутствии осциллирующей вихревой пары. Кроме того, наряду с жидкостью, постоянно

вовлеченной вихрем, и невозмущенной жидкостью, уходящей вниз по течению, здесь существуют частицы, которые сначала захватываются вихрем, а затем выпускаются и дальше движутся вместе с основным потоком. Это явление, известное как временной хаос, было открыто и исследовано несколько лет назад в работе [22] в контексте проблемы адвекции пассивных маркеров в поле скорости вихревой пары.

Здесь рассматривается явление гетероклинического хаоса как крупномасштабный механизм пульсирующего выброса, который вызывает интенсивные колебания пассивных маркеров. Перепутывание гетероклинических траекторий является следствием нестационарности циркуляционной области, в частности, колебательных движений точки присоединения. Эти колебания наблюдались в крупномасштабном вихревом моделировании, а также в прямом численном моделировании двумерных и трехмерных течений за уступом при больших числах Рейнольдса [8, 9, 15]. Периодические движения точки присоединения вызваны формированием и дальнейшим развитием крупномасштабных когерентных вихревых структур. Аналогичное явление воспроизводят и расчеты течения за снеговым карнизом, выполненные нами дискретно-вихревым методом: на рис. 3, *a* показаны флуктуации суммарной циркуляции в области, вызванные выбросом вихревых кластеров из циркуляционной зоны. Отметим, что это явление наблюдается в неустановившемся режиме, и никаких внешних возмущений в этом моделировании не вводилось. Имеют место также естественные колебания центра завихренности, как показано на рис. 3, *b*. Переходный режим характеризуется свертыванием вихревой пелены и сходом ее в поток, что согласуется с результатами других дискретно-вихревых расчетов течений с присоединением [7], а также прямого численного моделирования течения за уступом [15].

Как будет показано ниже, нестационарная модель с одним вихрем также способна выявить периодический выброс когерентных структур, хотя здесь они являются не вихрями, а блоками жидких частиц, заключенными в возмущенные гетероклинические траектории.

Результаты, представленные здесь, показывают дискретный выброс маркеров в течение за снеговым карнизом, который описывается модифицированным преобразованием Ринглеба (18). Возмущения в поток вносились посредством смещения вихря из положения равновесия, при этом параметр смещения $\varepsilon = 0.005$, далее вихрь свободно двигался по периодической траектории. Пассивно

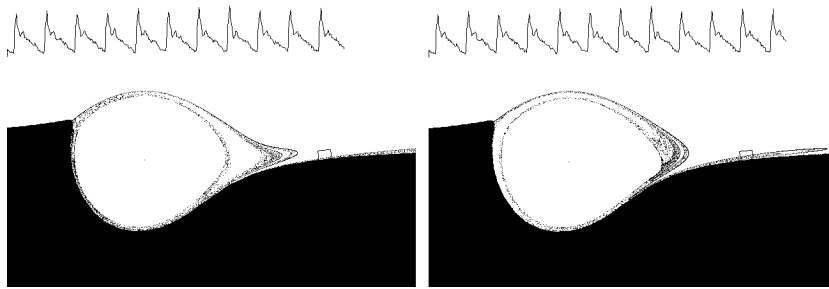


Рис. 8. Распределение маркеров в области за снеговым карнизом и их концентрация в объеме, представленном закрашенным прямоугольником в два различные момента времени. Система периодически возмущается колебаниями вихря относительно точки равновесия

ные маркеры вводились с постоянной скоростью из точки, которая расположена близко к стенке вверх по течению от острой кромки границы; их эволюция во времени описывалась интегрированием уравнений движения с помощью алгоритма Рунге-Кутты четвертого порядка.

Эволюция струи маркеров визуализировалась регистрацией положений маркеров через фиксированные интервалы времени. Также регистрировалась концентрация маркеров, осредненная по малому контрольному объему (она являлась функцией времени). Рис. 8 иллюстрирует распределение маркеров в области и их концентрацию в специально выбранном объеме, представленном здесь закрашенным прямоугольником, в два различные момента времени. Рассматриваемый объем находится вниз по течению от карниза. Периодический характер изменения концентрации наглядно демонстрируется ее развитием во времени, что представлено кривой в верхней части данных графиков. Найдено, что форма волны зависит от положения точки наблюдения.

Важной особенностью моделирования является то, что возмущение слабо влияет на область отрыва и весьма значительно – на область присоединения: движения передней застойной точки почти неуловимы, в то время, как задняя застойная точка смещается существенно. Эта особенность отражает поведение реальных потоков вблизи кромок, где вязкие эффекты вызывают отрыв в острых кромках, делая отрывную область почти нечувствительной к возмущениям. С аналитической точки зрения, осцилляции обеих критических точек в плоскости ζ характеризуются соизмеримыми амплитудами, однако отображение течения в физическую плоскость z изменяет эти перемещения. Длины в z -плоскости в первом при-

ближении пропорциональны производной отображения $|dz/d\zeta|$, минимальное значение которой находится в кромке (для острой выпуклой кромки $dz/d\zeta = 0$). Это аналитическое свойство обеспечивает приемлемое распространение описанного алгоритма на геометрии, которые характеризуются большой кривизной кромок, а также отрывом и присоединением потока.

4. ВЫВОДЫ

Исследование посвящено влиянию эффектов нестационарности переприсоединенных потоков на крупномасштабную динамику дисперсии пассивных частиц. Рассматривалось течение за снеговым карнизом. Для моделирования нестационарного сдвигового потока использовалась численная модель с одним точечным вихрем. Описан метод нахождения функции тока в области постоянной завихренности.

Сдвиговое течение вблизи такой границы вызывает отрыв, хотя положение точки отрыва должно корректироваться добавлением в поток точечного вихря, чтобы обеспечить отрыв в точке максимальной кривизны. Классическое отображение Ринглеба для снегового карниза модифицировалось сглаживанием угла.

На систему накладывалось периодическое естественное возмущение, которое получалось отклонением вихря от положения равновесия. Концентрация частиц, осредненная по малому контрольному объему, рассчитывалась как функция времени. Исследовался процесс выпуска маркеров с периодом, близким к периоду движения точки присоединения (т.е. периоду движения вихря).

Моделирование, проведенное для снегового кар-

низа с помощью дискретно-вихревой модели, выявило колебания центра завихренности, показав, таким образом, что колебательные движения точки присоединения связаны с нестационарностью циркуляционной зоны. Подобный тип нестационарности накладывался на течение при моделировании упрощенным методом с одним вихрем, при этом вихрь отклонялся от своего равновесного положения.

Несмотря на простоту, представленная одновихревая модель с малым числом степеней свободы позволила выявить, что перемежающиеся захватывание и выброс пассивных частиц не объясняются только срывом когерентных вихревых структур. Мы полагаем, что корнем явления есть нестационарность, вызывающая проявление механизмов лагранжевой хаотической динамики. Поэтому дисперсия связана с динамикой жидких блоков в фазовом пространстве [24, 28], которая является механизмом с внутренней перемежаемостью. В связи с этим действие возмущения на протяжении очень малого времени достаточно для начала крупномасштабной дисперсии с перемежаемостью.

5. ПРИЛОЖЕНИЕ А

Гамильтониан вихря

Функция Грина $G(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ для области течения \mathcal{R} , ограниченной линией \mathcal{C} , определяется соотношением:

$$G(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = g(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) + \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2},$$

где функция $g(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ является такой, что выполняется условие: $G(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = 0$ на \mathcal{C} , при этом она является гармонической в отношении (ξ, η) на \mathcal{R} . Более того, свойство взаимности функции Грина $G(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = G(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta)$, приводит к соотношению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_0} g(\xi_0, \eta_0; \xi_0, \eta_0) &= 2 \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{\partial}{\partial \xi} g(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0), \\ \frac{\partial}{\partial \eta_0} g(\xi_0, \eta_0; \xi_0, \eta_0) &= 2 \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{\partial}{\partial \eta} g(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0). \end{aligned} \quad (43)$$

Функция тока $\psi(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ (здесь ζ_0 – положение вихря) должна удовлетворять граничному условию $\psi = \text{const}$ на \mathcal{C} и должна быть

гармонической во всей области за исключением точки ζ_0 , в которой она ведет себя как $(\gamma/2\pi) \log \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}$. Поэтому, функция тока ψ связана с функцией Грина соотношением:

$$\psi(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \psi_1(\xi, \eta) + \gamma G(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0), \quad (44)$$

где ψ_1 – функция тока других течений, которые могут быть наложены на вихрь. Вихрь не индуцирует скорость сам в себе, поэтому он движется как частица в области, из которой влияние вихря было устранено. Мы можем найти комплексно сопряженную скорость вихря как

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_0^* &= \dot{\xi}_0 - i \dot{\eta}_0 = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \left(\frac{dw}{d\zeta} - \frac{\gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - \zeta_0} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} + i \frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} \right)_{\zeta = \zeta_0} + \gamma \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} + i \frac{\partial g}{\partial \xi} \right), \end{aligned} \quad (45)$$

где w – комплексный потенциал. В соответствии с уравнением (44) скорость вихря выражается как:

$$\dot{\zeta}_0 = \frac{\partial H'}{\partial \eta_0} + i \frac{\partial H'}{\partial \xi_0} \quad (46)$$

где гамильтониан H' задается выражением:

$$H' = \psi_1 + \frac{\gamma}{2} g. \quad (47)$$

В нашем случае кривая \mathcal{C} и область течения \mathcal{R} являются действительной осью и положительной полуплоскостью соответственно, а течение представляет собой суперпозицию однородного потока и вихря. Поэтому гамильтониан вихря H' (47) принимает вид

$$H' = q_\infty \eta_0 + \frac{\gamma}{4\pi} \log \eta_0. \quad (48)$$

6. ПРИЛОЖЕНИЕ В

Правило Рауса

Когда движущийся вихрь конформно отображается на физическую плоскость z , его гамильтониан должен быть скорректирован в соответствии с так называемым правилом Рауса [25].

Комплексно-сопряженная скорость вихря в плоскости z задается как

$$\dot{z}_0^* = \dot{x}_0 - i \dot{y}_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{dw}{dz} - \frac{\gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - z_0} \right). \quad (49)$$

Ее можно записать в следующем виде:

$$z_0^* = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \left[\left(\frac{dw}{d\zeta} - \frac{\gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - \zeta_0} \right) \frac{d\zeta}{dz} + \frac{\gamma}{2\pi i} \left(\frac{1}{(\zeta - \zeta_0) \frac{dz}{d\zeta}} - \frac{1}{z - z_0} \right) \right], \quad (50)$$

то есть

$$z_0^* = \zeta_0^* \frac{d\zeta_0}{dz_0} - \frac{\gamma}{2\pi i} \frac{\frac{d^2 z_0}{d\zeta_0^2}}{2 \left(\frac{dz_0}{d\zeta_0} \right)^2} = \zeta_0^* \frac{d\zeta_0}{dz_0} - \frac{\gamma}{4\pi i} \frac{d}{dz_0} \log \left(\frac{dz_0}{d\zeta_0} \right).$$

Из уравнения (46) вытекает:

$$z_0^* = \frac{\partial H'}{\partial \xi_0} \frac{\partial \xi_0}{\partial y_0} + \frac{\partial H'}{\partial \eta_0} \frac{\partial \eta_0}{\partial y_0} + i \left(\frac{\partial H'}{\partial \xi_0} \frac{\partial \xi_0}{\partial x_0} + \frac{\partial H'}{\partial \eta_0} \frac{\partial \eta_0}{\partial x_0} \right) + \frac{\gamma}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial y_0} \log \left| \frac{dz_0}{d\zeta_0} \right| + i \frac{\partial}{\partial x_0} \log \left| \frac{dz_0}{d\zeta_0} \right| \right) = \left(\frac{\partial}{\partial y_0} + i \frac{\partial}{\partial x_0} \right) \left(H' + \frac{\gamma}{4\pi} \log \left| \frac{dz_0}{d\zeta_0} \right| \right)$$

и наконец:

$$H = H' + \frac{\gamma}{4\pi} \log \left| \frac{dz_0}{d\zeta_0} \right|. \quad (51)$$

Соотношение (47) между вихревым гамильтонианом и функцией Грина для ограниченной односвязной области впервые было получено Мазотти [17] (также см. [3] и [21]). Линь [16] расширил эту теорию на многосвязные области, содержащие более чем один вихрь. Удивительно, но Ринглеб [23] не знал о предыдущих исследованиях и выводил правило Рауса независимо. Он ошибочно считал, что оно применимо только к многозначным функциям.

1. Aref H. Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1983. – 15. – P. 345–389.
2. Bradshaw P., Wong F. W. F. The reattachment and relaxation of a turbulent shear flow // J. Fluid Mech. – 1972. – 52. – P. 113–135.
3. Caldonazzo B. Sui moti liquidi piani con un vortice libero // Rend. Circ. Matem. Palermo. – 1931. – 55. – P. 369–394.
4. Castillo-Negrete D. Asymmetric transport and non-Gaussian statistics of passive scalars in vortices in shear // Phys. Fluids. – 1998. – 10. – P. 576–594.

5. Ceschini Interferenza vortice-parete. // Laurea thesis, DIASP, Politecnico di Torino. – 1993.
6. Clements R. R. An inviscid model of two-dimensional vortex shedding // J. Fluid Mech. – 1973. – 57. – P. 321–336.
7. Cortelezzi L., Leonard A., Doyle J. C. An example of active circulation control of the unsteady separated flow past a semi-infinite plate // J. Fluid Mech. – 1994. – 260. – P. 127–154.
8. Driver, D. M., Seegmiller, H. L., Marvin, J. // Unsteady behaviour of a reattaching shear layer. AIAA Paper. – 1983. – 83/1712.
9. Driver D. M., Seegmiller H. L., Marvin J. Experiments on mixing in continuous chaotic flows // AIAA J. – 1987. – 25. – P. 914–919.
10. Ferlauto M. Studio e controllo di strutture vorticoso di parete. // Ph.D. thesis, DIASP, Politecnico di Milano. – 1996.
11. Guckenheimer J., Holmes P. Non-linear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields. – New York: Springer, 1983. – 300 p.
12. Henrici P. Applied and Computational Complex Analysis. – New York: Wiley, 1974. – 300 p.
13. Hosker R. P. Flow and diffusion near obstacles. // Atmospheric science and power production, – U.S. Dept. of Energy. – 1984. – 241–326.
14. Hunt J. C. R., Leibovich S., Richards K. J. Turbulent shear flows over low hills // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. – 1992. – 114. – P. 1435–1470.
15. Le H., Moin P., Kim J. Direct numerical simulation of turbulent flow over a backward-facing step // J. Fluid Mech. – 1997. – 330. – P. 349–374.
16. Lin C. C. On the motion of vortices in two dimensions - I. Existence of the Kirchhoff-Routh function // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1941. – 27. – P. 570–575.
17. Masotti A. Sulla funzione preliminare di Green per un'area piana // Atti Pont. Accad. Sci. Nuovi Lincei. – 1992. – 84. – P. 209–216.
18. Melnikov V. K. On the stability of the center for time periodic perturbations // Trans. Moscow Math. Soc. – 1963. – 12. – P. 121–130.
19. Nehari Z. Conformal Mapping. – New York: Dover, 1975. – 390 p.
20. Novikov E. A., Sedov Y. B. Stochastization of vortices // JETP Lett. – 1979. – 29. – P. 677–679.
21. Pelosi L. Un'applicazione idrodinamica della funzione di Green // Atti Reale Accad. Sci. Torino. – 1926. – 61. – P. 569–583.
22. Pentek A., Tel T., Toroczkai Z. Chaotic advection in the velocity field of leapfrogging vortex pairs // J. Phys. A Math. Gen. – 1995. – 28. – P. 2191–2216.
23. Ringleb F. O. Separation control by trapped vortices, in *Boundary Layer and Flow Control*, edited by G. V. Lachmann, Vol. 1, Pergamon Press, – 1961. – 265–294.
24. Rom-Kedar V., Leonard A., Wiggins S. An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow // J. Fluid Mech. – 1990. – 214. – P. 347–394.
25. Routh E. J. Some applications of conjugate functions // Proc. Lond. Math. Soc. – 1881. – 12. – P. 83–97.
26. Tabor M. Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics. – New York: Wiley, 1989. – 270 p.
27. Tsien H. S. Symmetrical Joukowski airfoils in shear flow // Quart. Appl. Math. – 1943. – 1. – P. 130–148.
28. Wiggins S. Chaotic Transport in Dynamical Systems. – New York: Springer, 1992. – 291 p.
29. Zannetti L., Franzese P. The non-integrability of the restricted problem of two vortices in closed domains // Physica D. – 1994. – 76. – P. 99–109.