

УДК 532.528

# РАСЧЕТ ПЛОСКИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СУПЕРКАВЕРН ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ

В. Н. СЕМЕНЕНКО

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 12.03.2001

Предлагается метод расчета длины и формы плоских нестационарных суперкаверн за тонким клином при произвольной зависимости от времени. Используется конечно-разностная дискретизация по времени. На каждом временном слое решение рассчитывается методом дискретных особенностей, при этом переменная длина каверны находится из условия постоянства давления в каверне. Приведены примеры расчета эволюции естественных суперкаверн при различных типах деформации кавитирующего клина. Дано сравнение с упрощенным вариантом метода для случая периодической зависимости от времени.

Пропонується метод розрахунку довжини і форми плоских нестационарних суперкаверн за тонким клином при довільній залежності від часу. Використовується кінцево-різницева дискретизація за часом. На кожному часовому шарі роз'язок будується методом дискретних особливостей, а змінна довжина каверни відшукується із умови постійності тиску в каверні. Наведені приклади розрахунку еволюції природних суперкаверн при різних типах деформації клину. Дано порівняння з спрощеним варіантом методу у випадку періодичної залежності від часу.

A method to calculate a length and a shape of two-dimensional unsteady supercavities past a slender wedge at arbitrary time dependence is proposed. The finite-difference discretization with respect to time are used. In each time step, the solution is calculated by the method of discrete singularities, and the variable cavity length is found from the condition of the cavity pressure to be constant. Examples of calculation of natural supercavity evolution at different types of the cavitating wedge deformations are presented. Comparison with the simplified version of this method is given for the case of periodic time dependence.

## ВВЕДЕНИЕ

В 90-ых годах благодаря быстрому прогрессу вычислительной техники сформировался новый подход к расчету нестационарных кавитационных течений как к их прямому компьютерному моделированию с использованием коммерческих программных пакетов. Задача формулируется, как правило, в предельно общем виде – для вязкой, сжимаемой, многофазной жидкости, при этом предполагается, что все физические особенности течения должны проявиться “сами собой” в процессе расчета.

Данный подход привел к значительному успеху в расчете начальных стадий кавитации и сильно нестационарных режимов частичной кавитации на крыле и на телах вращения [1, 2 и др.]. Однако до сих пор нет ни одного примера успешного численного моделирования нестационарных суперкаверн большого удлинения.

Для практических расчетов таких течений остается актуальным классический подход, основанный на потенциальной теории и методе малых возмущений [3, 4], хотя и здесь имеется ряд нерешенных проблем. Так, задача об эволюции плоской нестационарной суперкаверны переменной длины

$l(t)$  сводится к начально-краевой задаче с распределенным запаздыванием, зависящим от искомой функции  $l(t)$ . Данный класс нелинейных задач математически практически не изучен.

В наших статьях [5, 6] развит метод расчета длины и формы плоских нестационарных суперкаверн в случае периодической зависимости течения от времени. Идея метода заключается в определении неизвестной функции  $l(t)$ , изменение которой имеет порядок  $O(1)$ , в последовательные моменты времени  $t^{(n)} = t^{(n-1)} + \Delta t$  из уравнения баланса массы газа в каверне или из условия постоянства давления в каверне. При этом на каждом временном слое все остальные неизвестные функции, возмущения которых имеют порядок  $O(\varepsilon)$ , находятся путем решения линейной задачи.

В настоящей работе этот метод обобщен на случай произвольной зависимости от времени.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим тонкий симметричный суперкавитирующий клин единичной длины, обтекаемый неограниченным потоком идеальной, несжимаемой и невесомой жидкости (рис. 1). Пусть нестационарное возмущение течения вызвано симметричной

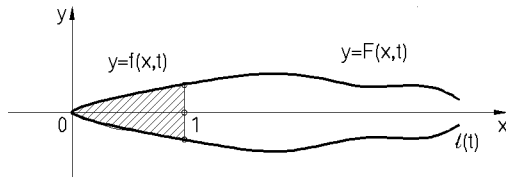


Рис. 1. Схема нестационарного обтекания тонкого суперкавитирующего клина

деформацией клина:

$$y = \pm f(x, t) = \pm \alpha_0 x \pm \kappa f_1(x, t) \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

где  $\alpha_0 \sim \kappa \sim O(\varepsilon)$ ;  $\varepsilon$  – малый параметр.

Считая течение потенциальным в каждый момент времени, имеем для потенциала скорости  $\varphi(x, y, t)$  и потенциала ускорения  $\theta(x, y, t)$  линеаризованные граничные условия [6]:

$$\varphi_y = \pm N f(x, t), \quad 0 < x < 1; \quad y = \pm 0, \quad (2)$$

$$\theta = N \varphi = \frac{\sigma(t)}{2}, \quad 1 < x < l(t); \quad y = \pm 0, \quad (3)$$

$$\varphi_y = \pm N F(x, t), \quad 1 < x < l(t); \quad y = \pm 0, \quad (4)$$

где  $y = F(x, t)$  – уравнение верхней границы каверны;  $\sigma = 2(p_\infty - p_c)/\rho V_\infty^2$  – число кавитации;  $p_\infty, V_\infty$  – давление и скорость в невозмущенном потоке соответственно;  $p_c(t)$  – давление в каверне;  $N = \partial/\partial t + \partial/\partial x$  – линейный дифференциальный оператор. Здесь и далее используются безразмерные переменные.

Длина каверны  $l(t)$  является неизвестной функцией времени. Давление в каверне  $p_c$ , а следовательно и число кавитации  $\sigma$ , также является неизвестной функцией времени в случае газонаполненной каверны  $\beta = \sigma_v/\sigma > 1$  (где  $\sigma_v$  – паровое число кавитации). Таким образом, в общем случае необходимо решать начально-краевую задачу с начальными условиями

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad l(0) = l_0, \quad \sigma(0) = \sigma_0. \quad (5)$$

## 2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Для решения задачи воспользуемся методом интегральных уравнений [4]. В силу симметрии течение, удовлетворяющее граничным условиям (2), (4), можно получить, располагая на отрезке  $[0, l(t)]$  оси  $Ox$  слой плоских источников с интенсивностью  $q(x, t)$ . Источники индуцируют в точке  $(x, y)$  суммарный потенциал

$$\varphi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l(t)} q(s, t) \ln \sqrt{(x-s)^2 + y^2} ds. \quad (6)$$

Интенсивность источника в точке  $s$  равна скачку нормальной скорости жидкости  $\varphi_y$  при переходе через ось  $Ox$ . Для симметричного относительно оси  $Ox$  течения имеем:

$$q(s, t) = 2\varphi_y(s, t), \quad 0 < s < l(t). \quad (7)$$

Применяя к выражению (6) линейный оператор  $N$ , получим потенциал ускорений нестационарных источников, распределенных по отрезку переменной длины:

$$\theta(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{l(t)} q(s, t) \frac{x-s}{(x-s)^2 + y^2} ds + \quad (8)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{l(t)} q(s, t) \ln \sqrt{(x-s)^2 + y^2} ds.$$

Переходя в (8) к пределу  $y \rightarrow 0$  и подставляя его в граничное условие (3), приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$\int_0^{l(t)} \frac{q(s, t) ds}{x-s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{l(t)} q(s, t) \ln |x-s| ds - \pi\sigma(t) = 0, \quad (9)$$

где  $1 < x < l(t)$ . Из выражений (2) и (7) получаем интенсивность источников на отрезке  $[0, 1]$ :

$$q(x, t) = 2Nf(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (10)$$

Тогда уравнение (9) можно переписать в виде:

$$\int_1^{l(t)} \frac{q(s, t) ds}{x-s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_1^{l(t)} q(s, t) \ln |x-s| ds - \pi\sigma(t) = A_1(x, t), \quad (11)$$

где функция  $A_1(x, t)$  известна для конкретного закона нестационарных деформаций клина (1).

Из условия (4) получаем уравнение верхней границы каверны при  $1 \leq x \leq l(t)$ :

$$F(x, t) = N^{-1}\varphi_y(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^x q(s, t-x+s) ds. \quad (12)$$

Поскольку длина каверны  $l(t)$  и число кавитации  $\sigma(t)$  являются в общем случае неизвестными функциями времени, добавим к уравнению (11) два соотношения:

1) условие разрешимости внешней краевой задачи Неймана для потенциала скоростей [4]:

$$\int_0^{l(t)} q(s, t) ds = 0; \quad (13)$$

2) уравнение баланса массы газа в каверне для газонаполненных каверн  $\beta > 1$ :

$$\frac{d}{dt} [(\beta - \bar{\sigma}(t))Q(t)] = \beta [\dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out}(t)], \quad (14)$$

где  $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_0$ ;  $Q$  – площадь каверны;  $\dot{Q}_{in}, \dot{Q}_{out}(t)$  – объемные расходы воздуха соответственно в каверну и из каверны.

Отметим, что условие (13) обеспечивает ограниченность давления в бесконечно удаленной точке потока, однако при этом нестационарная суперкаверна оказывается незамкнутой. Требование замкнутости каверны в каждый момент времени приводит к логарифмической сингулярности давления на бесконечности. Эта ситуация характерна для плоских задач с кавернами переменного объема и носит название “парадокса Гюрста”.

### 3. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

Будем находить численное решение системы уравнений (11), (13), (14) в последовательные моменты времени  $t^{(n)} = t^{(n-1)} + \Delta t$ ,  $n = 2, 3, \dots$  при начальных условиях

$$t^{(1)} = 0, \quad q^{(1)}(x) = q_0(x), \quad l^{(1)} = l_0, \quad \sigma^{(1)} = \sigma_0,$$

где  $q_0(x)$ ,  $l_0$  и  $\sigma_0$  – параметры стационарной суперкаверны при  $t = 0$ .

Заменим производную по времени в уравнении (11) конечной разностью первого порядка. Тогда на  $n$ -ом временном слое уравнение (11) можно записать в виде:

$$\int_1^{l^{(n)}} \frac{q^{(n)}(s) ds}{x-s} + \frac{1}{\Delta t} \int_1^{l^{(n)}} q^{(n)}(s) \ln|x-s| ds - \pi\sigma^{(n)} = \\ = A_1^{(n)}(x) + \frac{1}{\Delta t} A_2^{(n-1)}(x), \quad 1 < x < l^{(n)}, \quad (15)$$

где функция  $A_1^{(n)}(x)$  в правой части известна, а функция  $A_2^{(n-1)}(x)$  вычисляется по данным предыдущего временного слоя:

$$A_2^{(n-1)}(x) = \int_1^{l^{(n-1)}} q^{(n-1)}(s) \ln|x-s| ds.$$

Уравнение (13) на  $n$ -ом временном слое запишем в виде:

$$\int_1^{l^{(n)}} q^{(n)}(s) ds = A_3^{(n)} = - \int_0^1 q^{(n)}(s) ds. \quad (16)$$

Если величину  $l^{(n)}$  считать известной, то система уравнений (15), (16) относительно  $q^{(n)}(s)$ ,  $\sigma^{(n)}$  является линейной и эффективно решается численно методом дискретных особенностей [4]. Для улучшения сходимости метода в интегралах делается замена переменных  $x \rightarrow z^2$ ,  $s \rightarrow \lambda^2$ . Проекция каверны в преобразованных координатах разбивается на  $M$  одинаковых отрезков. На каждом отрезке располагается точечный источник и контрольная точка, в которой удовлетворяется граничное условие (3). Порядок расположения особенностей  $\lambda_j$  и контрольных точек  $z_i$  определяется классом функций, в котором отыскивается решение сингулярного интегрального уравнения (15) – ограниченное в точке  $x = 1$  и неограниченное в точке  $x = l^{(n)}$ :

$$z_i = 1 + \Delta z(i - 0.75), \quad \lambda_j = 1 + \Delta z(j - 0.25), \quad (17)$$

$$\Delta z = \frac{\sqrt{l^{(n)}} - 1}{M}, \quad i, j = 1, 2, \dots, M.$$

В результате получаем систему  $M + 1$  линейных алгебраических уравнений:

$$\Delta z \sum_{j=1}^M q_j^{(n)} \left( \frac{\Delta t}{z_i^2 - \lambda_j^2} + \ln|z_i^2 - \lambda_j^2| \right) t_j - \frac{\pi \Delta t}{2} \sigma^{(n)} = \\ = \frac{\Delta t}{2} A_1^{(n)}(z_i) + A_2^{(n-1)}(z_i), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (18)$$

$$\Delta z \sum_{j=1}^M q_j^{(n)} \lambda_j = \frac{1}{2} A_3^{(n)}.$$

В данной задаче, однако, длина каверны  $l(t)$  является неизвестной функцией времени. Как и в [6], будем рассматривать ее как свободный параметр, зависящий от времени, и определять его в последовательные моменты времени  $t^{(n)}$  путем численного решения функционального уравнения (14). При этом объем нестационарной каверны  $Q(t)$  вычисляется численным интегрированием выражения (12). На каждой итерации решение рассчитывается при фиксированном значении  $l(t^{(n)})$  из системы линейных алгебраических уравнений (18).

После дискретизации формулы для формы и объема суперкаверны принимают вид

$$F_i^{(n)} = \frac{\Delta x}{2} \sum_{j=1}^i q_j^{(n-i+j)}, \quad (19)$$

$$Q^{(n)} = 2\Delta x \sum_{i=1}^{M_n} F_i^{(n)}, \quad M_n = \frac{l^{(n)} - 1}{\Delta x}. \quad (20)$$

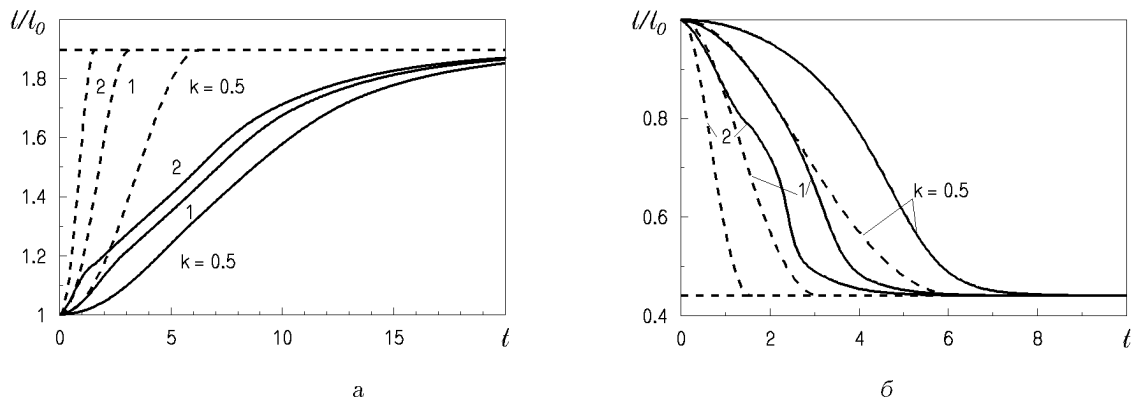


Рис. 2. Изменение длины каверны при однократном изменении угла клина:  $l_0 = 5.0$   
 а - увеличение угла:  $\kappa = 1.5$ , б - уменьшение угла:  $\kappa = 0.5$

Здесь предполагается, что значения функции  $q_j^{(k)}$  известны в узлах двумерной прямоугольной сетки с одинаковым шагом по обоим направлениям:  $\Delta t = \Delta x$ . Поскольку эти узлы не совпадают с узлами расчетной сетки (17), значения функции  $q$  в них находятся с помощью интерполяции.

#### 4. ЭВОЛЮЦИЯ ЕСТЕСТВЕННОЙ СУПЕРКАВЕРНЫ

В случае естественной паровой суперкаверны  $\beta = 1$  уравнение (14) вырождается в условие постоянства давления в каверне  $\sigma = \sigma_0$ . На рис. 2 приведены примеры расчета изменения длины паровой суперкаверны при однократном изменении угла клина. При расчетах использовался следующий закон изменения полуугла клина  $\alpha(t)$ :

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} (1 - \cos kt) \right], \quad 0 \leq t < t_p,$$

$$\alpha = \alpha_0 \kappa, \quad t \geq t_p, \quad (21)$$

где  $t_p$  – интервал изменения угла;  $k = \pi/t_p$  – приведенная частота процесса.

Штриховыми линиями для сравнения нанесены соответствующие квазистационарные зависимости  $l(t)$ , полученные путем отбрасывания производных по времени в уравнении (11) и в граничном условии (2).

На графиках рис. 2, а угол клина увеличивается в 1.5 раза ( $\kappa = 1.5$ ) в течение различных промежутков времени  $t_p$  (т. е. при различной частоте  $k = \pi/t_p$ ). В результате длина каверны увеличивается от  $l_0 = 5.0$  до нового стационарного значения  $l_1 = 9.473$ . На графиках рис. 2, б угол клина уменьшается в 2 раза ( $\kappa = 0.5$ ) при различной частоте  $k$ . В результате длина каверны уменьшает-

ся от  $l_0 = 5.0$  до нового стационарного значения  $l_1 = 2.2$ . Как видно, каверна достигает новой стационарной длины с тем большим запаздыванием по времени, чем больше  $k$ .

На рис. 3 приведены примеры расчета изменения длины паровой суперкаверны при импульсном изменении угла клина. При этом первое из соотношений (21) действует в течение промежутка времени  $0 \leq t < 2t_p$ , после чего угол клина возвращается к своему первоначальному значению:  $\alpha = \alpha_0$  при  $t \geq 2t_p$ .

На графиках рис. 3, а и б угол клина соответственно увеличивается в 1.5 раза и уменьшается в 2 раза и затем возвращается к первоначальному значению при различной частоте импульса  $k$ . Сравнение с квазистационарным поведением  $l(t)$  (штриховые линии) позволяет отметить следующие особенности нестационарного поведения каверны:

- 1) рост и убывание длины каверны  $l(t)$  происходит несимметричным образом;
- 2) длина каверны изменяется тем меньше, чем меньше продолжительность импульса (т.е. чем больше частота  $k$ );
- 3) изменение функции  $l(t)$  становится немонотонным при достаточно больших значениях частоты  $k$ .

Предлагаемый алгоритм расчета функции  $l(t)$  для естественной паровой суперкаверны требует хранения в памяти компьютера  $M$  значений функции  $A_2^{(n-1)}$  на предыдущем временном слое. При вычислении формы каверны  $F_i^{(n)}$  по формуле (19) в силу запаздывающего характера подынтегральной функции используются значения функции  $q_j^{(m)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$  на  $\sim l^{(m)}/\Delta t$  предыдущих временных слоях. Легко видеть, что и в этом случае достаточно хранить в памяти одномерный

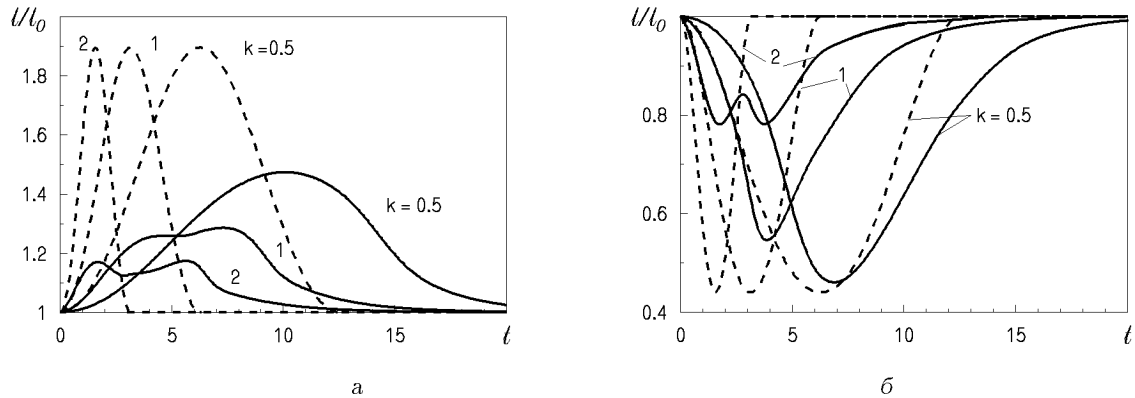


Рис. 3. Изменение длины каверны при импульсном изменении угла клина:  $l_0 = 5.0$   
 а - увеличение угла:  $\kappa = 1.5$ , б - уменьшение угла:  $\kappa = 0.5$

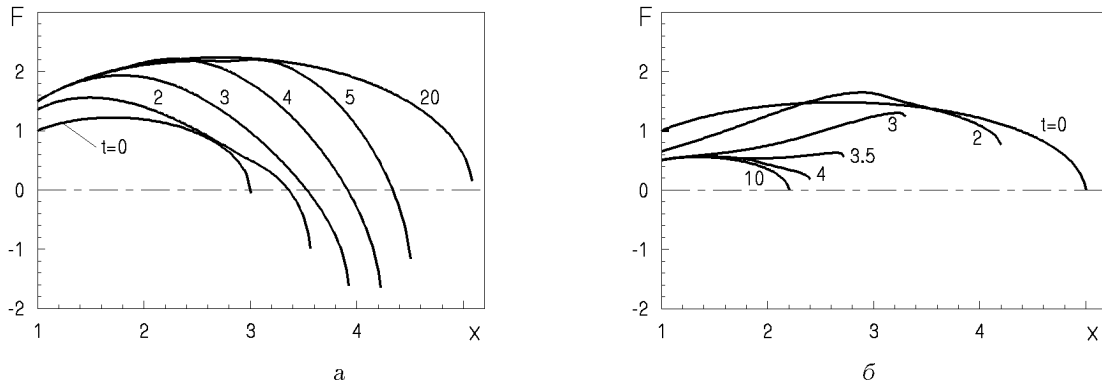


Рис. 4. Эволюция формы каверны при однократном изменении угла клина:  $k = 1.0$   
 а - увеличение угла:  $l_0 = 3.0$ ;  $\kappa = 1.5$ , б - уменьшение угла:  $l_0 = 5.0$ ;  $\kappa = 0.5$

массив значений  $F_i^{(n-1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, M_n$  на предыдущем временном слое, поскольку

$$F_i^{(n)} = F_{i-1}^{(n-1)} + \frac{\Delta x}{2} q_i^{(n)}. \quad (22)$$

Таким образом, алгоритм расчета получается весьма экономичным.

На рис. 4 приведены примеры расчета формы суперкаверны в последовательные моменты времени при увеличении и уменьшении угла клина. Как видно, принятая математическая модель дает “нефизичную” форму каверны вблизи ее конца (следствие парадокса Гюрста). Данный эффект уменьшается при увеличении длины каверны и уменьшении  $\kappa$ . Заметим, что при исследовании динамических задач суперкавитации практическое значение имеет изменение не формы, а объема нестационарной каверны  $Q(t)$ . На рис. 5 представлены графики изменения объема каверны (20) при тех же значениях параметров, что на рис. 4, а и различных значениях частоты  $k$ . При умеренных

значениях  $k < 2$  изменение длины и объема каверны качественно соответствует опыту.

## 5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ УГЛА КЛИНА

Описанный расчетный алгоритм в упрощенной форме применялся нами ранее для случая периодической зависимости течения от времени [5, 6]. Упрощение достигалось за счет внесения в уравнение (11) производной по времени внутрь интеграла и использования экспоненциального представления зависимости от времени для функций, изменение которых имеет порядок  $O(\varepsilon)$ :

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \alpha_0 q_0(x) + \kappa \text{Re} \{ q^*(x) e^{jkt} \}, \\ \sigma(t) &= \alpha_0 \sigma_0 + \kappa \text{Re} \{ \sigma^* e^{jkt} \}, \end{aligned}$$

где  $\|q_0\| \sim \|q^*\| \sim \sigma_0 \sim \sigma^* \sim O(1)$ . Для сравнения результатов “точного” расчета нестационарного течения

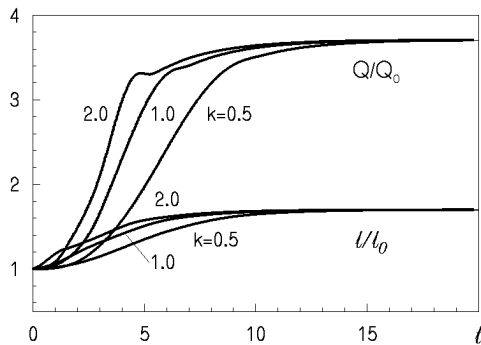


Рис. 5. Изменение длины и объема каверны при увеличении угла клина:  $l_0 = 3.0$ ;  $\kappa = 1.5$

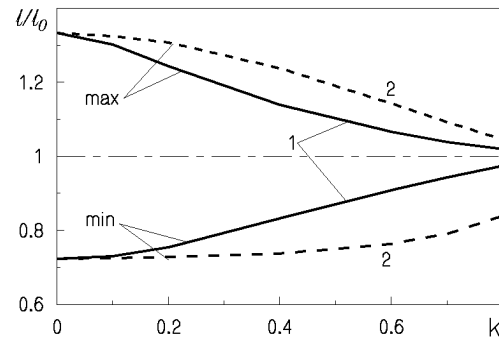


Рис. 7. Размах колебаний длины каверны при колебаниях угла клина:  $l_0 = 6.0$ ;  $\kappa = 0.2$ : 1 – "точный" расчет, 2 – расчет [6]

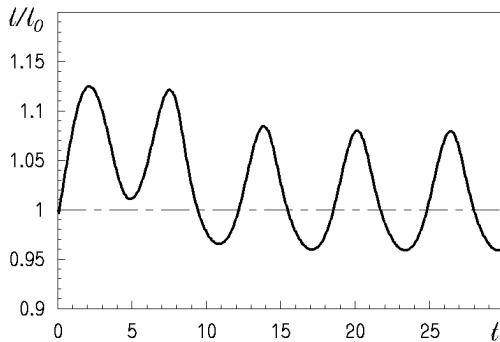


Рис. 6. Изменение длины каверны при колебаниях угла клина:  $l_0 = 6.0$ ;  $k = 1.0$ ;  $\kappa = 0.4$

нарной каверны по уравнениям (18) с расчетом из [6] периодическое изменение угла клина задавалось формулой  $\alpha(t) = \alpha_0(1 + \kappa \sin kt)$ . Расчеты показали, что после переходного процесса, который длится не более 2–3 периодов колебаний, длина каверны  $l(t)$  и остальные параметры становятся периодическими функциями времени (рис. 6). При этом заметного накопления ошибки из-за конечно-разностной дискретизации и многократного применения интерполяции на сетке не происходит. На рис. 7 дано сравнение графиков наибольших и наименьших значений функции  $l(t)$  в зависимости от частоты  $k$ . Как видно, приближенный расчет [6] (штриховые линии) дает больший размах колебаний длины каверны. Это различие, по-видимому, объясняется тем, что в [6] условие (13) выполнялось отдельно для квазистационарной  $q_0$  и возмущенной  $q^*$  составляющих решения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе линеаризованной кавитационной схе-

мы разработан метод расчета плоских нестационарных суперкаверн при произвольной зависимости от времени. Впервые детально проанализировано нестационарное поведение плоской паровой суперкаверны за тонким клином, угол которого изменяется различным образом.

Метод естественно обобщается на случай нестационарных вентилируемых каверн с использованием уравнения (14) [6], а также для расчета несимметричных течений [5]. В последнем случае вдоль проекции профиля наряду с источниками распределяются вихри с интенсивностью  $\gamma(x, t)$  [4], для определения которой к системе (15), (16) добавляется сингулярное интегральное уравнение.

1. Kubota A., Kato H., Yamagushi H. A new modelling of cavitating flows: A numerical study of unsteady cavitation on a hydrofoil section // J. of Fluid Mech. – 1992. – Vol. 240. – P. 59–96.
2. Kunz R.F., Boger D.A., Stinebring D.R. et al A preconditioned Navier–Stokes method for two-phase flows with application to cavitation predication // Computers and Fluids. – 2000. – Vol. 29, No. 8. – P. 849–875.
3. Tulin M.P. Supercavitating flows – small perturbation theory // J. of Ship Research. – 1964. – 7, N 3. – P. 16–37.
4. Сфремов І.І. Лінеаризована теорія кавітаційного обтікання. – К.: Наук. думка, 1974. – 156 с.
5. Семененко В.Н., Семененко Т.Н. Колебания тонкого суперкавитирующего профиля вблизи свободной поверхности // Прикладна гідромеханіка. – 1999. – Т. 1, N 3. – С. 48–54.
6. Семененко В.Н. Расчет формы плоских суперкаверн при гармонических возмущениях // Прикладна гідромеханіка. – 2001. – Т. 2, N 3. – С. 87–93.