

МОДЕЛЬ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ТА ГРУПОВОГО ФОРМУВАННЯ ЕКСПЕРТНИХ ОЦІНОК

Г.П. ПОВЕЩЕНКО

На математичній моделі показано синергетичний ефект підсилення результату прийняття рішення «командою» експертів у порівнянні з сумарним результатом індивідуальних рішень рівної кількості експертів. Розглянуто відомий ефект затримки з прийняттям рішення та ефект «заціклення» на проблемі у вигляді гістерезисних коливань, а також раптову зміну рішення.

ВСТУП

Індивідуальна активність має сенс. Індивідуальне рішення окремого експерта може ґрунтуватися на нових ідеях та творчих пропозиціях, а також економити багато часу, який витрачається на організацію групи експертів. Але, коли проблема вимагає різнобічного аналізу, індивідуальні рішення мають більший ризик помилок. Під час застосування різних методів прогнозування, наприклад, методу «мозкового штурму», вважається, що кількість ідей важливіша за їхню якість. До того ж відомо, що зазвичай ідеї та пропозиції експертів у процесі роботи не коментуються і не оцінюються, тому що всі учасники є рівноправними незалежно від рівня освіти та спеціалізації [1].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

На основі математичної моделі процесу формування оцінок експертного прогнозу спробуємо проаналізувати ефективність індивідуального та групового прогнозування [2]. Якість результатів (нова ідея або добре забута стара) модель не оцінює, тому що це радше правовий аспект авторства ідеї. Нова ідея — випадковість, її використання — детермінізм.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

У реальних процесах прогнозування беруть участь декілька експертів ($n = 5 - 20$ осіб). Для довільної кількості учасників ($i = 1, \dots, n$ — індекс i -го експерта) система диференціальних рівнянь моделі має вигляд [2]:

$$\frac{dr_i}{d\tau} = k_i(1 - s_0) - r_i \frac{\tau_i + \exp\left(\frac{c_i - 1}{c_i s}\right)}{\tau_i}; \quad (1)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = s_0 - s + \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{\tau_i} \exp\left(\frac{c_i - 1}{c_i s}\right); \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} k_i = 1. \quad (3)$$

Система має загальний інтеграл типу «закону збереження»

$$s + \sum_{i=1}^n r_i = s_0 + \sum_{i=1}^n r_{i0} = \text{const}. \quad (4)$$

Тут $r_{i0} \geq r_i(\tau) \geq 0$ — поточний обсяг інформації i -го експерта, *невикористаний* для формування рішення до моменту часу τ ; $0 < r_{i0} = k_i(1 - s_0) \leq s$ — обсяг інформації, яка *потенційно* може бути надана i -м експертом; k_i — ваговий коефіцієнт; $0 < s_0 \leq 1$ — загальний обсяг інформації про проблему (попередня інформація, яка *потенційно* готова до використання для прийняття рішення); $0 < s(\tau) \leq 1$ — поточний обсяг інформації про проблему, який характеризує поточний і прогнозний стан проблеми; $\tau = \frac{t}{t_s}$ — зведений поточний час; t — поточний час; t_s — характерний час процесу, його масштаб; $0 < c_i \leq 1$ — здатність i -го експерта до колективної діяльності та генерації ідей; $\tau_i = \frac{t_i}{t_s}$ — зведений характерний час активності i -го експерта; $0 < t_i < t_s$ — характерний час активності i -го експерта.

ОДИН ЕКСПЕРТ

Динаміку системи прогнозування з одним експертом описує система диференціальних рівнянь

$$\frac{dr_1}{d\tau} = r_{10} - r_1 \frac{\tau_1 + \exp\left(\frac{c_1 - 1}{c_1 s}\right)}{\tau_1}; \quad (5)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = s_0 - s + \frac{r_1}{\tau_1} \exp\left(\frac{c_1 - 1}{c_1 s}\right). \quad (6)$$

Система має загальний інтеграл

$$r_1 + s = r_{10} + s_0 = \text{const} = 1. \quad (7)$$

Згідно з моделлю один експерт може приймати до трьох рішень: два реальних oa , bc й одне уявне ab (рис. 1, $c_1 = 0,5$; $\tau_1 = 0,15$). Із умови

$$\frac{dr_1}{d\tau} = 0; \quad \frac{ds}{d\tau} = 0 \quad (8)$$

маємо

$$r_1^* + s^* = r_{10} + s_0 = \text{const} = 1; \quad (9)$$

$$r_1^* = \frac{\tau_1(1 - s_0)}{\tau_1 + \exp\left(\frac{c_1 - 1}{c_1 s^*}\right)}; \quad (10)$$

$$F(s_*, s_0) = \frac{1 - s_0}{1 + \frac{\tau_1}{\exp\left(\frac{c_1 - 1}{c_1 s_*}\right)}} + s_0 - s_* = 0. \quad (11)$$

Тут r_{1*}, s_* — стаціонарні значення.

Криву $oabc$ на рис. 1 побудовано згідно з (11). З урахуванням (7), (9)

$$r_{1*} = \frac{\tau_1 r_{10}}{\tau_1 + \exp\left[\frac{c_1 - 1}{c_1 s_*}\right]}. \quad (12)$$

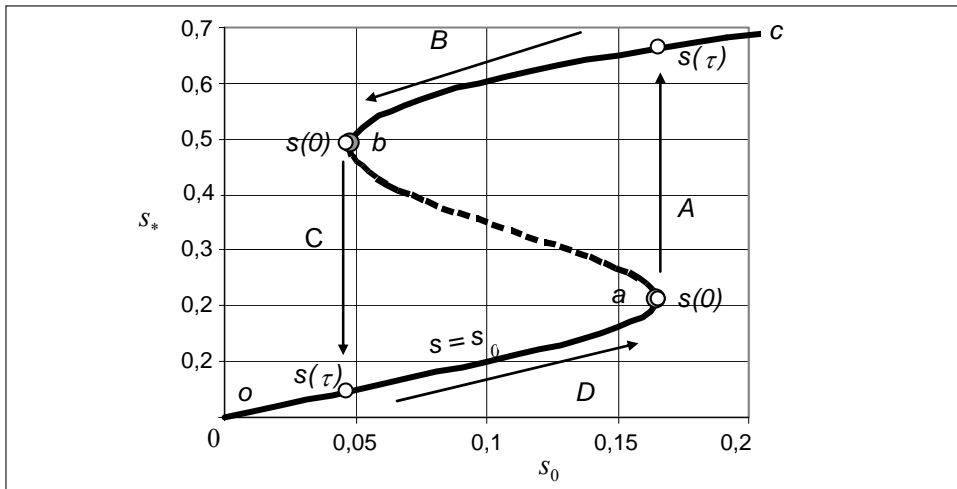


Рис. 1. Множина варіантів вибору: oa — рішення 0; bc — рішення 1; ab — границя між областями тяжіння до того чи іншого вибору. Стрілками A, C показано напрямки зміни рішення. Замкнутий контур $ABCDAB\dots$ — «петля» гістерезису

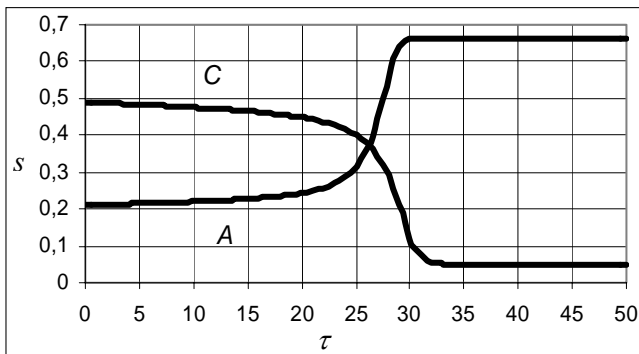


Рис. 2. Раптова зміна рішення. Динаміка формування рішення: крива A — за стрілкою A ; крива C — за стрілкою C

На рис. 2 ($c_1 = 0,5$; $\tau_1 = 0,15$; $s_0 = 0,166$; $s(0) = 0,21$; $r_{10} = 0,834$; $r_1(0) = 0,79$ — для A ; $s_0 = 0,0465$; $s(0) = 0,49$; $r_{10} = 0,9535$; $r_1(0) = 0,51$ — для C) показано динаміку зміни рішень за умови, коли початок процесу прийняття рішення відповідає околу точок a й b на рис. 1.

Експерт довго «розмірковує», його «притягують» рішення 0 і рішення 1, а потім він раптом змінює рішення. Така поведінка породжує гістерезисні коливання $ABCDABC\dots$, якщо відбувається відповідна зміна загальної інформації s_0 .

На рис. 3 ($c_1 = 0,5$; $\tau_1 = 0,15$; $r_{10} = 0,834$; $s_0 = 0,166$) показано ще один приклад аналізу процесу прийняття рішень одним експертом. Із (6) та (9) випливає, що в стаціонарному стані системи приріст інформації

$$F_1 = s_* - s_0 \tag{13}$$

дорівнює швидкості генерації ідей одного експерта, одного «джерела» інформації

$$F_2 = \left(\frac{1-s_*}{\tau_1} \right) \exp\left(\frac{c_1-1}{c_1 s_*} \right). \tag{14}$$

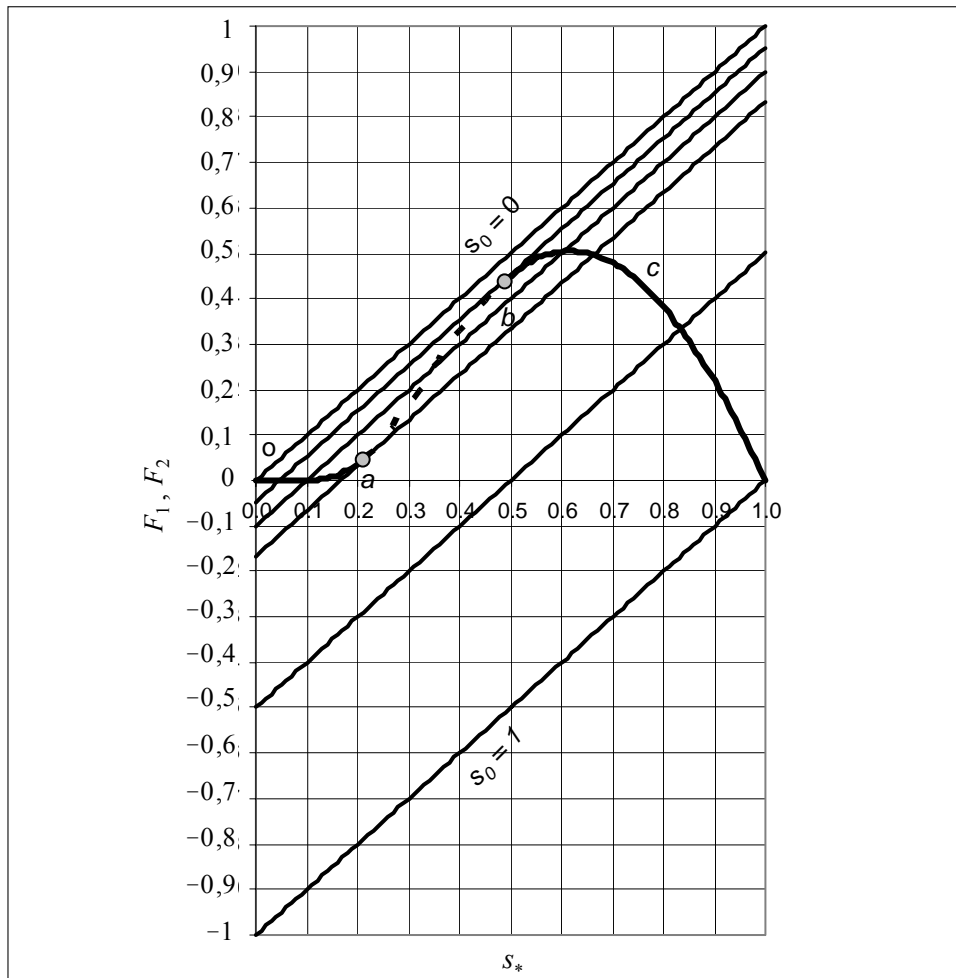


Рис. 3. Множина варіантів вибору: oa — рішення 0; bc — рішення 1; ab — границі між областями тяжіння до того чи іншого вибору. Рішення — точки перетину прямих F_1 ($s_0 = \text{const}$) з кривою F_2

Точки перетину F_1, F_2 визначають той чи інший вибір.

Координати точок a, b можна визначити з умови

$$\frac{\partial F_2}{\partial s_*} = \frac{1}{\tau_1} \exp\left(\frac{c_1-1}{c_1 s_*} \right) \left[\frac{(1-c_1)(1-s_*)}{c_1 s_*^2} - 1 \right] = 1. \tag{15}$$

Цікаво зауважити, що повна інформація про проблему $s_* = 1$ відповідає ситуації, коли попередня інформація про проблему теж повна $s_0 = 1$ (рис. 3).

За конкретної умови

$$r + s = 1, \quad (16)$$

що впливає з (7), згідно з моделлю (5), (6) індивідуальна швидкість генерації ідей одного експерта або індивідуальне «джерело» інформації

$$\phi(s, r) = \frac{r}{\tau} \exp\left(\frac{c-1}{cs}\right) = \frac{r}{\tau} \exp\left[\frac{c-1}{c(1-r)}\right] \quad (17)$$

дорівнює нулю при $s = 0$ (якщо невідома навіть мета прогнозу) і при $r = 0$ (якщо експерт використав усю свою інформацію), тобто має екстремальний характер. Екстремум визначається з умови $\partial\phi/\partial r = 0$ і залежить виключно від здатності експерта до генерації ідей

$$r_e = \frac{c + 1 - \sqrt{(1-c)(1+3c)}}{2c}. \quad (18)$$

Експерт із «ідеальною» здатністю до генерації ідей

$$c = 1 \quad (19)$$

має швидкість генерації ідей

$$\phi = \frac{r}{\tau} = \frac{1-s}{\tau}, \quad (20)$$

яка визначається обсягом його особистої невикористаної інформації та характерним часом активності.

За нездатності експерта спілкуватися та висловлювати свою думку

$$c \rightarrow 0 \quad (21)$$

його швидкість генерації ідей практично нульова

$$\phi \rightarrow 0, \quad (22)$$

хоча він може бути добре обізнаним із проблеми.

ДВА ЕКСПЕРТИ

Динаміку системи прогнозування з двома експертами описує система диференціальних рівнянь

$$\frac{dr_1}{d\tau} = r_{10} - r_1 \frac{\tau_1 + \exp\left(\frac{c_1-1}{c_1 s}\right)}{\tau_1}; \quad (23)$$

$$\frac{dr_2}{d\tau} = r_{20} - r_2 \frac{\tau_2 + \exp\left(\frac{c_2 - 1}{c_2 s}\right)}{\tau_2}; \quad (24)$$

$$\frac{ds}{d\tau} = s_0 - s + \frac{r_1}{\tau_1} \exp\left(\frac{c_1 - 1}{c_1 s}\right) + \frac{r_2}{\tau_2} \exp\left(\frac{c_2 - 1}{c_2 s}\right). \quad (25)$$

Система має загальний інтеграл

$$r_1 + r_2 + s = r_{10} + r_{20} + s_0 = \text{const} = 1. \quad (26)$$

Згідно з моделлю два експерти можуть сформулювати до п'яти рішень: три реальних — oa , bc , df і два уявних — ab , cd (рис. 4). Розрахунки на рис. 4 відповідають значенням: $c_1 = 0,322$; $\tau_1 = 0,03$; $c_2 = 0,7$; $\tau_2 = 0,3$; $r_{10} = 0,45$; $r_{10} + r_{20} + s_0 = 1$.

Із умови

$$\frac{dr_1}{d\tau} = 0; \quad \frac{dr_2}{d\tau} = 0; \quad \frac{ds}{d\tau} = 0 \quad (27)$$

маємо

$$r_{1*} = \frac{\tau_1 r_{10}}{\tau_1 + \exp\left[\frac{c_1 - 1}{c_1 s^*}\right]}; \quad (28)$$

$$r_{2*} = \frac{\tau_2 r_{20}}{\tau_2 + \exp\left[\frac{c_2 - 1}{c_2 s^*}\right]}. \quad (29)$$

Згідно з (26)

$$r_{1*} + r_{2*} + s^* = r_{10} + r_{20} + s_0 = \text{const} = 1. \quad (30)$$

Тому можна записати

$$r_{10} = k_1(1 - s_0); \quad r_{20} = k_2(1 - s_0); \quad k_1 + k_2 = 1. \quad (31)$$

Множину стаціонарних станів $oabcdf$ на рис. 4 побудовано згідно з (28)–(31) таким чином:

$$a = \sum_{i=1}^{i=2} \frac{k_i}{\frac{\tau_i}{\exp\left(\frac{c_i - 1}{c_i s^*}\right)} + 1}; \quad (32)$$

$$s_0 = \frac{s^* - a}{1 - a}. \quad (33)$$

Стрілками показано напрямок декількох гістерезисних циклів, які породжуються в процесі прогнозування за зміни загальної інформації s_0 . Система може «зациклюватися» на певній проблемі. Відповідні гістерезисні

коливання з певними періодами індукції відбуваються в напрямку проти стрілки годинника.

Точки біфуркації a, b, c, d визначаються з (33) за умови

$$\frac{ds_0}{ds_*} = 0. \quad (34)$$

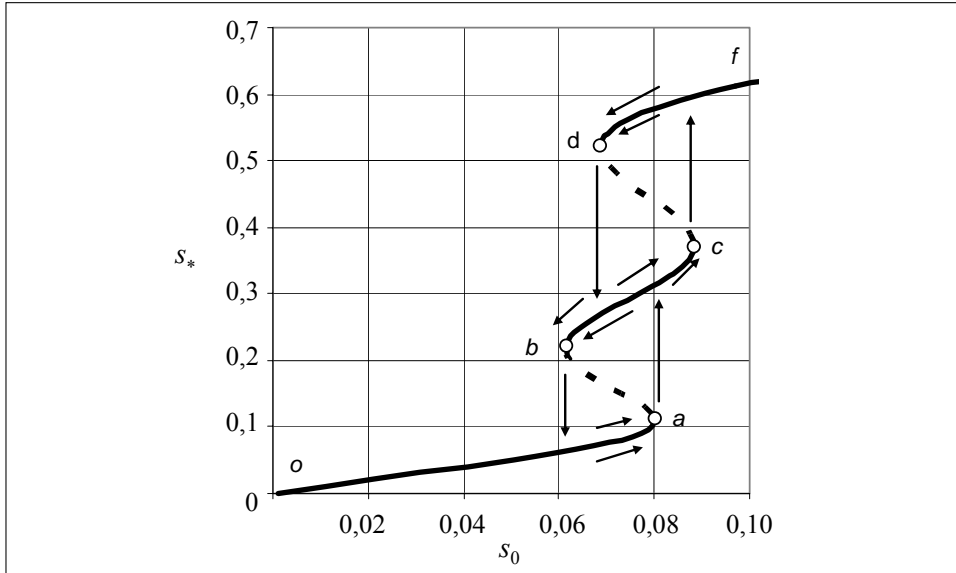


Рис. 4. Множина варіантів вибору: oa — рішення 0; bc — рішення 1; df — рішення 2; ab, cd — границі між областями тяжіння до того чи іншого вибору. Стрілками показано напрямки гістерезисних коливань

Систему (23)–(25) можна записати у вигляді, незалежному від s

$$\frac{dr_1}{d\tau} = r_{10} - r_1 \frac{\tau_1 + \exp\left[\frac{c_1 - 1}{c_1(1 - r_1 - r_2)}\right]}{\tau_1}; \quad (35)$$

$$\frac{dr_2}{d\tau} = r_{20} - r_2 \frac{\tau_2 + \exp\left[\frac{c_2 - 1}{c_2(1 - r_1 - r_2)}\right]}{\tau_2}. \quad (36)$$

Приклад формування рішення в околі точок біфуркації показано на рис. 5. Розрахунки на рис. 5 відповідають значенням: $c_1 = 0,322$; $\tau_1 = 0,028$; $c_2 = 0,72$; $\tau_2 = 0,3$; $r_{10} = r_{20} = 0,465$.

Згідно з (33)

$$\frac{s_* - s_0}{1 - s_0} = a; \quad (37)$$

$$F_1 = s_* - s_0; \quad (38)$$

$$F_2 = a(1 - s_0). \quad (39)$$

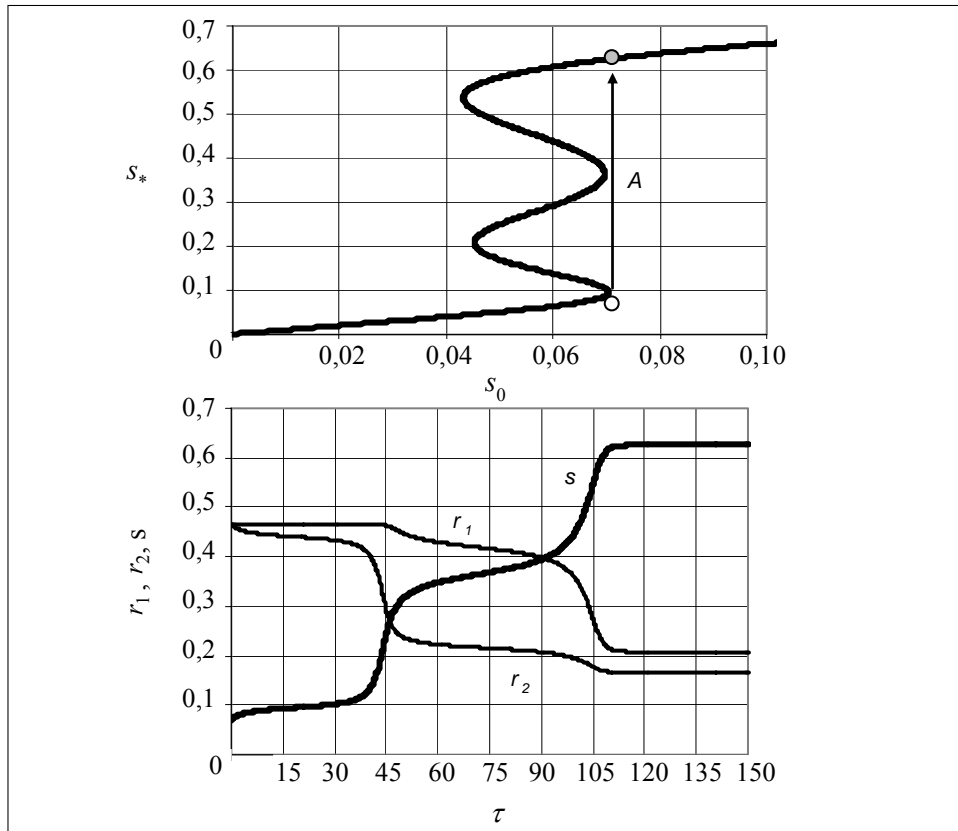


Рис. 5. Множина варіантів вибору. Динаміка формування рішення за стрілкою A

СИСТЕМА З ДВОХ ЕКСПЕРТІВ І ДВА НЕЗАЛЕЖНІ ЕКСПЕРТИ

Спробуємо порівняти колективні та індивідуальні експертні оцінки. Систему (23)–(25) можна записати у вигляді:

$$\frac{dr_1}{d\tau} = r_{10} - r_1 \frac{\tau_1 + \exp\left[\frac{c_1 - 1}{c_1(s_0 + r_{10} + r_{20} - r_1 - r_2)}\right]}{\tau_1}; \quad (40)$$

$$\frac{dr_2}{d\tau} = r_{20} - r_2 \frac{\tau_2 + \exp\left[\frac{c_2 - 1}{c_2(s_0 + r_{10} + r_{20} - r_1 - r_2)}\right]}{\tau_2}; \quad (41)$$

$$r_1 + r_2 + s = r_{10} + r_{20} + s_0. \quad (42)$$

Варіант прогнозу в цій системі з двох експертів показано на рис. 6. Розрахунки на рис. 6 відповідають значенням: $c_1 = 0,6$; $\tau_1 = 0,2$; $c_2 = 0,6$; $\tau_2 = 0,1$; $s_0 = 0,4$; $r_{10} = 0,3$; $r_{20} = 0,3$.

Тут

$$s = r_{10} + r_{20} + s_0 - r_1 - r_2 = 1 - r_1 - r_2. \quad (43)$$

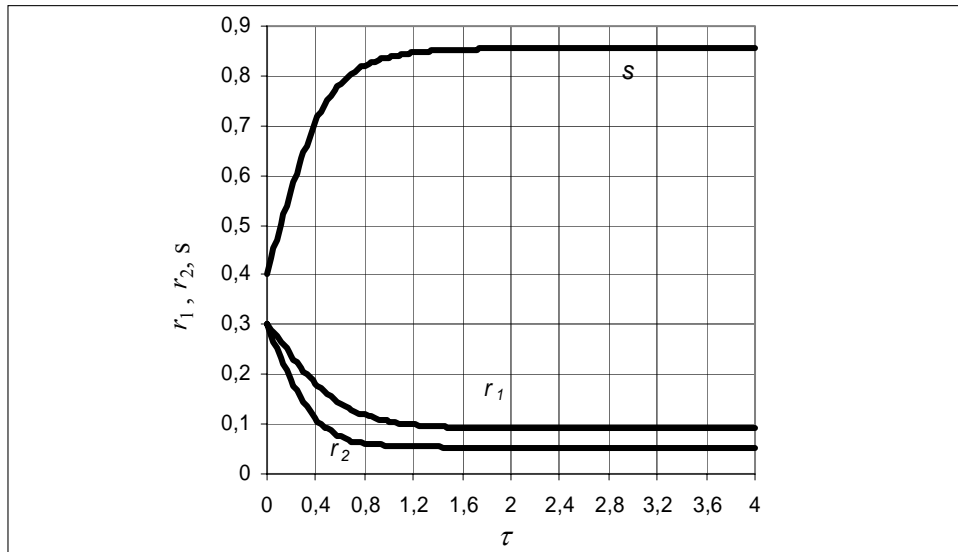


Рис. 6. Динаміка прогнозу в системі з двох експертів

Для двох незалежних експертів система (40)–(42) перетвориться на два незалежні рівняння

$$\frac{dr_1}{d\tau} = r_{10} - r_1 \frac{\tau_1 + \exp\left[\frac{c_1 - 1}{c_1(s_{01} + r_{10} - r_1)}\right]}{\tau_1}; \quad (44)$$

$$\frac{dr_2}{d\tau} = r_{20} - r_2 \frac{\tau_2 + \exp\left[\frac{c_2 - 1}{c_2(s_{02} + r_{20} - r_2)}\right]}{\tau_2}; \quad (45)$$

$$r_1 + r_2 + s_1 + s_2 = r_{10} + r_{20} + s_{01} + s_{02}. \quad (46)$$

Варіант прогнозу двох незалежних експертів показано на рис. 7. Розрахунки на рис. 7 відповідають значенням: $c_1 = 0,6$; $\tau_1 = 0,2$; $c_2 = 0,6$; $\tau_2 = 0,1$; $s_{01} = 0,2$; $s_{02} = 0,2$; $r_{10} = 0,3$; $r_{20} = 0,3$.

Тут

$$s_1 = r_{10} + s_{01} - r_1 = 0,5 - r_1; \quad (47)$$

$$s_2 = r_{20} + s_{02} - r_2 = 0,5 - r_2. \quad (48)$$

З рис. 6, 7 видно, що за однакових особистих характеристик експертів і рівних умов роботи результат «команди» з двох експертів кращий за сумарний результат двох незалежних експертів, принаймні, кількісно. В обох випадках кількість можливих рішень співпадає, якщо не враховувати тривіального варіанта «рішення не прийнято»: система з двох експертів генерує два нетривіальних рішення, а кожний з незалежних експертів — по одному.

Зауважимо, що в загальному випадку

$$s_1 + s_2 + r_1 + r_2 = 1 \quad (49)$$

у залежності від співвідношення між s_{01} і s_{02} існує максимальний результат роботи двох незалежних експертів

$$s_{\max} = 1 - r_1 - r_2, \quad (50)$$

але він все одно поступається результату роботи групи з двох експертів за рівних інших умов.

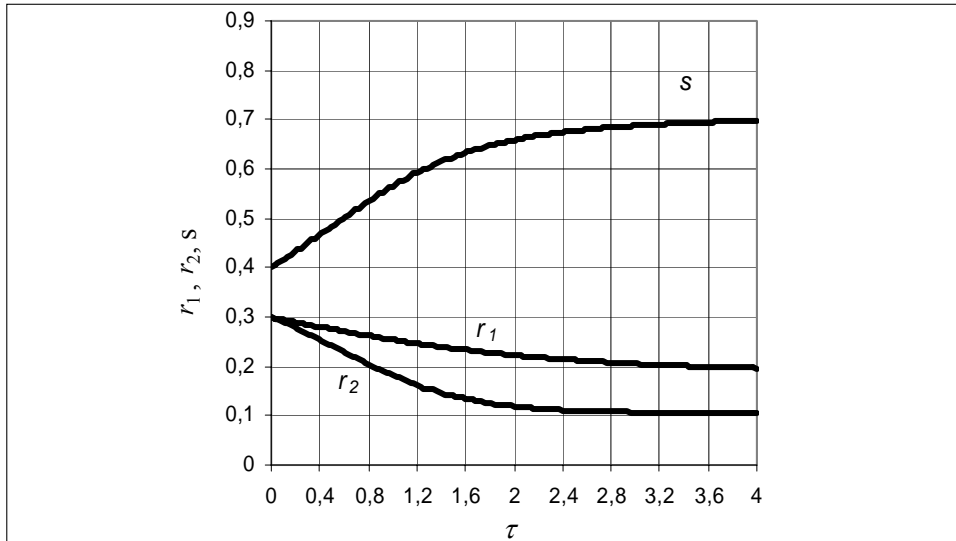


Рис. 7. Динаміка прогнозу двох незалежних експертів

ВИСНОВКИ

1. Можна показати на моделі, що результат «командної» роботи n експертів буде пліднішим за сумарний результат роботи n незалежних експертів. Це прояв однієї з системних властивостей — емерджентності цієї системи прогнозування.

2. У цій моделі потенційні обсяги інформації кожного експерта відрізняються один від одного лише кількісно без якісних оцінок як ознака взаємної довіри до особистих можливостей і здібностей.

3. Модель можна використовувати під час навчання.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Управління людськими ресурсами: філософські засади: навч. посіб.* / Під ред. В.Г. Воронкової. — К.: ВД «Професіонал», 2006. — 576 с.
2. *Повеценко Г.П.* Модель процесу формування оцінок експертного прогнозу // *Наук. вісті.* — 2010. — № 1. — С. 65–74.

Надійшла 16.12.2010