УДК 519.81

К НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СХЕМАХ СИТУАЦИЙ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

В.М. МИХАЛЕВИЧ, В.И. ИВАНЕНКО

Достаточно широкий класс непараметрических задач принятия решений, рассматриваемых с позиции получения критерия оптимальности — отношения предпочтений на решениях, делятся на два подкласса: задачи с неопределенностью (неоднозначностью указаного решения) и задачи без неопределенности (так называемые детерминистические задачи). Для такой классификации необходимы критерии существования неопределенности, которые и предлагаются в данной работе.

ВВЕДЕНИЕ

Анализируется ситуация в системе принятия решений, представляющая собой пару: того, кто принимает решение (ТПР) и ситуацию принятия решения (СПР) [1, 2].

При этом задачи принятия решений (они преимущественно рассматриваются как оптимизационные) можно разделить на два подкласса: задачи без неопределенности (так называемые детерминистические задачи) и задачи с неопределенностью, так как неопределенность значений ненаблюдаемого параметра часто порождает неопределенность при выборе оптимального решения в заданной ситуации, т.е. задаваемой схемой, или, коротко говоря, неопределенность схемы ситуации. Для такой классификации необходимы критерии наличия неопределенности в этих задачах. Поэтому возникает задача получения критериев неопределенности схем ситуаций. Указанная задача для непараметрических ситуаций решается в данной работе, которая является уточнением и обобщением работ [3, 4].

Хотя согласно [5], анализируя ситуации, можно ограничиться только параметрическими ситуациями, тем не менее, помимо самостоятельного интереса, полученные в работе результаты используются в дальнейшем для решения поставленной задачи также и для параметрических ситуаций.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 1. Схемой ситуации задачи решения (ССЗР) называется упорядоченная тройка вида (X, U, R), где R является графиком соот-

© *В.М. Михалевич, В.И. Иваненко*, 2012

ветствия из произвольного непустого множества U в произвольное непустое множество X, для которого $\operatorname{dom} R = U$ и $\operatorname{im} R = X$.

При этом X называется **множеством последствий**, U — **множеством решений**, R — **соответствием ССЗР** (X, U, R).

Под основной задачей принятия решения для ТПР в заданной ситуации или, коротко, задачей решения (ЗР) понимается задание этим ТПР отношения предпочтения на последствиях (первая ЗР) и решениях (вторая ЗР).

Определение 2. ССЗР $(X', U', R') \in \hat{\mathbb{Z}}$ называется подсхемой ССЗР $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, если $X' \subseteq X$, $U' \subseteq U$, $R' = U' \times X' \cap R$.

Подсхему (X', U', R') ССЗР $\hat{Z} := (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$ будем обозначать $\hat{Z}|_{X',\, U'}$.

Определение 3. Две ССЗР $(X_1, U_1, R_1), (X_2, U_2, R_2) \in \hat{\mathbb{Z}}$ называются изоморфными и это будем обозначать $(X_1, U_1, R_1) \simeq (X_2, U_2, R_2)$, если найдутся такие биекции $i : X_1 \to X_2$, $j : U_1 \to U_2$, что

$$R_2 \circ j = i \circ R_1. \qquad (1)$$

Рассмотрим подкласс $\hat{\mathbf{Z}}$ класса $\hat{\mathbb{Z}}$, в ССЗР которого на множествах последствий задано отношение предпочтения, т.е. каждой ССЗР этого класса соответствует тройка вида $\hat{\mathcal{Z}} := ((X, \succcurlyeq), U, R)$. Тогда $\hat{\mathbf{Z}}((X, \succcurlyeq)) :=$ $:= \{((X, \succcurlyeq), \cdot, \cdot) \in \hat{\mathbf{Z}}\}$.

Определение 4. Подсхемой ССЗР $((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}$ называется ССЗР $((X', \succcurlyeq'), U', R') \in \hat{\mathbf{Z}}$, где ССЗР $(X', U', R') \in \hat{\mathbb{Z}}$ является подсхемой ССЗР $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, а $(\succcurlyeq') = (\succcurlyeq|_{X'})$.

Подсхему $((X', \succcurlyeq'), U', R')$ ССЗР $\hat{\mathcal{Z}} := ((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}$ будем обозначать $\hat{\mathcal{Z}}|_{X',\, U'}$.

Определение 5. Фрагментом ССЗР $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$ $(((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}})$ называется ССЗР $(X', U', R') \in \hat{\mathbb{Z}}$ $(((X', \succcurlyeq'), U', R') \in \hat{\mathbf{Z}})$, где $R' \subseteq R$, $(R' \subseteq$ $\subseteq R, (X', \succcurlyeq') := (X', \succcurlyeq))$.

Фрагмент (X', U', R') ССЗР $\hat{Z} := (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$ будем обозначать как $\hat{Z}|_{R'}$.

Замечание. Очевидно, что любая подсхема является фрагментом, но не наоборот.

Определение 6. Правилом выбора предпочтений (ПВП) для ЗР в классе ССЗР $\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$ (коротко ПВП в $\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$) будем называть любое отображение $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, определенное на $\hat{\mathbb{Z}}'$ и сопоставляющее каждой $\hat{Z} = (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}'$ некоторую пару соответствий $(X, \succcurlyeq_{\hat{Z}})$ и $(U, \succcurlyeq^*_{\hat{Z}})$, т.е. $\pi = (\pi_1, \pi_2) \in (2^{(X^2)} \times 2^{(U^2)})^{\hat{\mathbb{Z}}'}$, что будем обозначать также $\pi_{\hat{Z}} =$

$=(\pi_{1\hat{Z}},\pi_{2\hat{Z}})=((X,\succcurlyeq_{\hat{Z}}),(U,\succcurlyeq^{*}_{\hat{Z}}))$. Класс всех ПВП в $\hat{\mathbb{Z}}'\subseteq\hat{\mathbb{Z}}$ будем обозначать $\Pi(\hat{\mathbb{Z}}')$.

Замечание. Каждый ТПР имеет определенное (свое) ПВП для класса $\hat{\mathbb{Z}}'$, которое является моделью ТПР-а относительно решения им ЗР в классе $\hat{\mathbb{Z}}'$. Зная ПВП для $\hat{\mathbb{Z}}'\subseteq\hat{\mathbb{Z}}$ произвольного ТПР, мы можем узнать этого ТПР-а решение основной ЗР для $\hat{Z}\in\hat{\mathbb{Z}}'\subseteq\hat{\mathbb{Z}}$.

Определение 7. ПВП в $\hat{\mathbf{Z}}'\subseteq\hat{\mathbf{Z}}$ будем называть всякое отображение п, определенное на $\hat{\mathbf{Z}}'$ и сопоставляющее каждой $\hat{\mathcal{Z}}=((X,\succcurlyeq),U,R)\in\hat{\mathbf{Z}}'$ некоторое соответствие $(U,\succcurlyeq^{*}_{\hat{\mathcal{Z}}})$, т.е. $\text{п}\in[2^{(U^2)}]^{\hat{\mathbf{Z}}'}$, что будем обозначать также $\text{п}_{\hat{\mathcal{Z}}}=(U,\succcurlyeq^{*}_{\hat{\mathcal{Z}}})$. Класс всех ПВП в $\hat{\mathbf{Z}}'\subseteq\hat{\mathbf{Z}}$ будем обозначать $\mathit{\Pi}(\hat{\mathbf{Z}}')$.

Определение 8. Будем говорить, что ССЗР Z любого класса $\hat{\mathbb{Z}}'\subseteq\hat{\mathbb{Z}}$ **с неопределенностью относительно первой основной ЗР** в непустом классе ПВП $\Pi(\hat{\mathbb{Z}}')\subseteq\Pi(\hat{\mathbb{Z}}')$, если либо $\Pi'(\hat{\mathbb{Z}}')=\varnothing$, либо найдутся такие ПВП $\pi',\pi''\in\Pi'(\hat{\mathbb{Z}}')$, что $\pi'_{1Z}\neq\pi''_{1Z}$.

Анализ неопределенности, возникающий при решении *первой основной* ЗР по существу относится к вопросам психологии. Поэтому непосредственно будем интересоваться анализом неопределенности, возникающей при решении *второй основной* ЗР. При этом не предполагается решенной первая основная ЗР.

Определение 9. Будем говорить, что ССЗР Z любого класса $\hat{\mathbb{Z}}'\subseteq\hat{\mathbb{Z}}$ $(\hat{\mathbf{Z}}'\subseteq\hat{\mathbf{Z}})$ **с неопределенностью относительно второй основной ЗР** (или просто с неопределенностью) в непустом классе ПВП $\Pi'(\hat{\mathbb{Z}}')(\mathit{\Pi}'(\hat{\mathbf{Z}}'))$, если либо $\Pi'(\hat{\mathbb{Z}}')=\varnothing$ ($\mathit{\Pi}'(\hat{\mathbf{Z}}')=\varnothing$), либо найдутся такие ПВП $\pi',\pi''\in\Pi'(\hat{\mathbb{Z}}')$ $(\text{п}',\text{п}''\in\mathit{\Pi}'(\hat{\mathbf{Z}}'))$, что $\pi'_{1Z}=\pi''_{1Z}$ и $\pi'_{2Z}\neq\pi''_{2Z}$ $(\text{п}'_Z\neq\text{п}''_Z)$.

Далее рассмотрим для всякого нестрогого порядка $(X,\succcurlyeq)$ его продолжение (расширение) на множество 2^X, обозначая это продолжение тем же символом $(\succcurlyeq)$, следующим образом. Для любых непустых множеств $X',X''\in 2^X$

$$X'\succcurlyeq X''\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x'\succcurlyeq x''\quad \forall x'\in X',\ \forall x''\in X'', \tag{2}$$

а если хоть одно из множеств X', $X''\in 2^X$ пустое, то $X'\overline{\succcurlyeq}X''$.

При этом ясно, что соответствие $(2^X,\succ)$ будет строгим частичным порядком.

Лемма 1. Если отношение предпочтения $(X,\succcurlyeq)$ — нестрогий порядок, а A,B — пара несвязных отношением $(\succcurlyeq)$ подмножеств множества X, т.е. $A\overline{\succcurlyeq}B$, $B\overline{\succcurlyeq}A$, то найдется по паре точек (возможно совпадающих) x_1,x_2

и y_1, y_2 из каждого множества указанной пары множеств, что либо $y_2 \succ x_1 \succ y_1$, либо $x_1 \sim y_1$, $x_2 \sim y_2$ и $x_1 \neq x_2$.

Доказательство. Из условия $A \overline{\succcurlyeq} B$, $B \overline{\succcurlyeq} A$, согласно соотношению (2), следует, что найдутся такие $a, a' \in A$ и $b, b' \in B$, что $b \succ a$, а $a' \succ b'$. Рассмотрим все возможные и взаимоисключающие варианты соотношений порядка ($\succcurlyeq$) между элементами a, a', b, b' и в зависимости от этого укажем точки x_1, x_2, y_1, y_2.

Если $b' \succcurlyeq b$, то положим $y_2 = a'$, $x_1 = b'$ (либо b), $y_1 = a$. Тогда получим, что $y_2 \succ x_1 \succ y_1$ и утверждение леммы справедливо.

Если $b \succ b'$ и $a \succ b'$, то положим $y_2 = b$, $x_1 = a$, $y_1 = b'$. Тогда получим, что $y_2 \succ x_1 \succ y_1$ и утверждение леммы также справедливо.

Если $b \succ b'$, $a \sim b'$ и $a' \sim b$. Тогда положим $y_2 = a'$, $x_1 = b$, $y_1 = a$. Отсюда следует, что $y_2 \succ x_1 \succ y_1$ и утверждение леммы опять таки справедливо.

Если $b \succ b'$, $a \sim b'$ и $a' \sim b$, то положим $x_1 = a'$, $x_2 = a$, $y_1 = b$, $y_2 = b'$. Тогда получим, что $x_1 \succ y_1$ и $x_2 \succ y_2$. Утверджение леммы и в этом случае остается справедливым.

Наконец (в силу того, что $(X, \succcurlyeq)$ — нестрогий порядок), если $b \succ b'$, $a \sim b'$ и $b \succ a'$, то положим $y_2 = b$, $x_1 = a'$, $y_1 = b'$. Тогда получим, что $y_2 \succ x_1 \succ y_1$ и следовательно утверждение леммы также справедливо.

Лемма доказана.

Кроме того, через $\hat{\mathbf{Z}}_0$ обозначим подкласс таких ССЗР $\hat{\mathcal{Z}} := := ((X, \succcurlyeq_{\hat{\mathcal{Z}}}), U, R)$ класса $\hat{\mathbf{Z}}$, у которых $(X, \succcurlyeq_{\hat{\mathcal{Z}}})$ является нестрогим порядком.

Наконец, для любого подкласса ССЗР $\hat{\mathbf{Z}}'$ класса $\hat{\mathbf{Z}}$ через $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}')$ обозначим все такие ПВП класса $\hat{\mathbf{Z}}'$, что для любой ССЗР $\hat{\mathcal{Z}} := := ((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}'$ выполняются следующие условия:

X1. $(U, \succcurlyeq^*)$ — нестрогий порядок.

X2. Если для любых $u_1, u_2 \in U$:

- $R(u_1) \succ R(u_2)$, то $u_1 \succ^* u_2$;
- $R(u_1) \sim R(u_2)$, то $u_1 \sim^* u_2$.

Легко показать, что $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0) \neq \varnothing$. Действительно для любой ССЗР $\hat{\mathcal{Z}} = ((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}_0$. Рассмотрим строгий частичный порядок на всех подмножествах множества последствий $\hat{\mathcal{Z}}$, т.е. $(2^X, \succ)$, который является асимметричной частью частичного порядка $(2^X, \succcurlyeq)$, индуцируемого нестрогим порядком на последствиях $\hat{\mathcal{Z}}$, т.е. $(X, \succcurlyeq)$, согласно соотношению (2).

Значит $(2^X, \succ)$, согласно теореме Шпильрайна [6], можно продолжить до строгого порядка на 2^X. Тогда сужение этого строгого порядка на совокупность множеств последствий, определяемых решениями $\hat{\mathcal{Z}}$ т.е. на $\{R_u,\ u \in U\}$, индуцирует строгий порядок, а следовательно и линейный порядок на U. Значит $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0) \neq \varnothing$.

Определение 10. ССЗР класса $\hat{\mathbf{Z}}' \subseteq \hat{\mathbf{Z}}$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}')$ называется **элементарным фрагментом** для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}')$, если любой фрагмент этой ССЗР будет без неопределенности (т.е. не будет с неопределенностью) в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}')$.

Лемма 2. В элементарном фрагменте для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ множество решений состоит из двух элементов.

Доказательство следует из того, что любое бинарное отношение предпочтения R на множестве U определяется всеми бинарными отношениями предпочтения вида $R|_{\{u_1,u_2\}}$, где $u_1, u_2 \in U$.

Лемма доказана.

Лемма 3. ССЗР класса $\hat{\mathbf{Z}}$, изоморфные ССЗР :

- $((\{x_1,x_2,y_1,y_2\}, \{(x_1,x_1),(x_1,y_1),(y_1,x_1),(y_1,y_1),(x_2,x_1),(x_2,y_1),$ $(x_2,x_2),(x_2,y_2),(y_2,x_1),(y_2,y_1),(y_2,x_2),(y_2,y_2)\}),\{u_1,u_2\},$ $\{(u_1,x_1),(u_1,x_2),(u_2,y_1),(u_2,y_2)\});$
- $-((\{x_1,x_2,y\}, \{(x_1,x_1),(x_1,y),(y,x_1),(y,y),(x_2,x_1),(x_2,y),(x_2,x_2)\}),$ $\{u_1,u_2\},\{(u_1,x_1),(u_1,x_2),(u_2,y),(u_2,x_2)\});$
- $((\{x_1,x_2,y\},\{(x_1,x_1),(y,x_1),(y,y),(y,x_2),(x_2,x_1),(x_2,y),(x_2,x_2)\},$ $\{u_1,u_2\},\{(u_1,x_1),(u_1,y),(u_2,x_1),(u_2,y)\});$
- $((\{x_1,x_2\},\{(x_1,x_1),(x_2,x_1),(x_2,x_2)\},\{u_1,u_2\},\{(u_1,x_1),(u_1,x_2),(u_2,x_1),$ $(u_2,x_2)\});$
- $((\{x_1,x_2,x_3\},\{(x_1,x_1),(x_2,x_1),(x_2,x_2),(x_3,x_1),(x_3,x_2),(x_3,x_3)\}),$ $\{u_1,u_2\},\{(u_1,x_1),(u_1,x_3),(u_2,x_2)\}),$

называемые соответственно схемами типа I–V, являются элементарными фрагментами для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$.

Доказательство. То, что схемы типа I–V принадлежат классу ССЗР $\mathbf{Z}_0$ следует из того, что отношения предпочтений на их множествах последствий являются нестрогими порядками.

Для любой схемы типа I–V $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}_0$ в качестве отношения предпочтения на множестве решений $U = \{u_1, u_2\}$, в силу не связности соответствием $(2^X, \succcurlyeq)$ элементов $R(u_1)$ и $R(u_2)$, можно, не нарушая условия $X2$, выбрать любой нестрогий порядок, например,

$(U, \succcurlyeq^*) := (\{u_1, u_2\}, \{(u_1, u_1), (u_2, u_1), (u_2, u_2)\})$ и $(U, \succcurlyeq^{**}) := (\{u_1, u_2\}, \{(u_1, u_1), (u_1, u_2), (u_2, u_2)\})$. Так как $(U, \succcurlyeq^*) \neq (U, \succcurlyeq^{**})$, то ССЗР $\mathcal{Z}$ будет с неопределенностью в классе $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$.

А то, что любой фрагмент этих ССЗР будет без неопределенности в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ легко проверить непосредственно, опираясь на условия X1 и X2.

Лемма доказана.

Фрагмент ССЗР, представляющий собой схему одного из типов I–V, также будем называть фрагментом соответствующего типа I–V.

Определение 11. Система элементарых фрагментов для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ называется **полной**, если любой элементарный фрагмент для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ изоморфен какому-то представителю этой системы.

Теорема 1. Полная система элементарных фрагментов для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ состоит из фрагментов типа I–V.

Доказательство. Пусть $\Phi := ((X, \succcurlyeq), U, R)$ является элементарным фрагментом для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}'_0)$. Тогда, в силу леммы 2, множество решений в Φ состоит из двух элементов, т.е. $U = \{u_1, u_2\}$.

Если множества $R(u_1)$ и $R(u_2)$ сравнимы относительно $(X, \succcurlyeq)$, то из условия $X1$ следует, что на $U = \{u_1, u_2\}$ определено, согласно условию $X2$, отношение предпочтения $(U, \succcurlyeq^*)$. А это противоречит элементарности фрагмента Φ.

Если же $R(u_1)$ и $R(u_2)$ не связаны соотношением $(\succcurlyeq)$, то, согласно лемме 1, в силу условия $X1$, в фрагменте Φ найдется подфрагмент вида:

- $((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}), \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_3), (u_2, x_2)\})$,

либо:

- $((\{x_1, x_2, y_1, y_2\}, \{(x_1, x_1), (x_1, y_1), (y_1, y_1), (x_2, x_1), (x_2, y_1), (x_2, x_2), (x_2, y_2), (y_2, x_1), (y_2, y_1), (y_2, x_2), (y_2, y_2)\}), \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_2), (u_2, y_1), (u_2, y_2)\})$, если $x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2$;
- $((\{x_1, x_2, y_1\}, \{(x_1, x_1), (x_1, y_1), (y_1, x_1), (y_1, y_1), (x_2, x_1), (x_2, y_1), (x_2, x_2)\}, \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_2), (u_2, y_1), (u_2, x_2)\})$, если $x_1 \neq y_1, x_2 = y_2$;
- $((\{x_1, x_2, y_2\}, \{(x_1, x_1), (y_2, x_1), (y_2, y_2), (y_2, x_2), (x_2, x_1), (x_2, y_2), (x_2, x_2)\}, \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, y_2), (u_2, x_1), (u_2, y_2)\})$, если $x_1 = y_1$, $x_2 \neq y_2$;

- $((\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2)\}), \{u_1, u_2\},$
  $\{(u_1, x_1), (u_1, x_2), (u_2, x_1), (u_2, x_2)\})$, если $x_1 = y_1, x_2 = y_2$.

А так как Φ является элементарным фрагментом для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$, то, в силу леммы 3, Φ будет фрагментом одного из типов I–V.

Теорема доказана.

Следствие 1.1. Схемы типа I–V и только они являются элементарными фрагментами для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 3 и доказательства теоремы 1.

Определение 12. Система неизоморфных элементарных фрагментов для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ называется **базой неопределенности фрагментов** ССЗР класса $\hat{\mathbf{Z}}'_0 \subseteq \hat{\mathbf{Z}}_0$, если любая ССЗР класса $\hat{\mathbf{Z}}'_0$ с неопределенностью в $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}'_0)$ имеет фрагмент, изоморфный какому-то представителю этой системы.

В дальнейшем фактор-множество множества X по отношению эквивалентности $(\sim)$ обозначим через $\widetilde{X}$, т.е. $\widetilde{X} := X \diagup_{(\sim)}$. А элементы множества $\widetilde{X}$ обозначим через $\widetilde{x}$, где $x \in X$ является произвольным представителем класса эквивалентности $\widetilde{x}$, т.е. $x \in \widetilde{x} \in \widetilde{X}$.

Теорема 2. Любая ССЗР любого класса $\hat{\mathbf{Z}}'_0 \subseteq \hat{\mathbf{Z}}_0$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}'_0)$ содержит фрагмент одного из типов I–V.

Доказательство. Из определения неопределенности ССЗР $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq),$ $U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}'_0$ следует, что найдутся такие ПВП $\pi', \pi'' \in \Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}'_0)$, для которых имеет место соотношение $(U, \succcurlyeq^*) := \pi'_{\mathcal{Z}} \neq \pi''_{\mathcal{Z}} =: (U, \succcurlyeq^{**})$.

Если $\widetilde{X}$ — фактор-множество множества X по отношению эквивалентности $(\sim)$ (в силу того, что $(X, \succcurlyeq)$ — нестрогий порядок), то через $\widetilde{R}$ обозначим, следующим образом определенное, отношение из U в $\widetilde{X}$. Для любых $u \in U$ и $x \in X$

$$u\widetilde{R}\widetilde{x} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{найдется } x \in X, \text{ что } uRx. \tag{3}$$

В множестве $\widetilde{X}$ определим отношение $(\succcurlyeq')$ для любых $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}$ полагая, что

$$\widetilde{x}_1 \succcurlyeq' \widetilde{x}_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x_1 \succcurlyeq x_2. \tag{4}$$

В силу того, что $(X, \succcurlyeq)$ — нестрогий порядок, то данное определение корректно и $(\widetilde{X}, \succcurlyeq')$ будет линейным порядком ([7], теорема 2.1).

Лемма 4. Для любых $u_1, u_2 \in U$

$$\widetilde{R}(u_1) \succcurlyeq' \widetilde{R}(u_2) \Leftrightarrow R(u_1) \succcurlyeq R(u_2).$$

Доказательство. Согласно соотношению (2), для любых $u_1, u_2 \in U$

$$\widetilde{R}(u_1) \succcurlyeq' \widetilde{R}(u_2) \Leftrightarrow \widetilde{x}_1 \succcurlyeq' \widetilde{x}_2 \quad \forall \widetilde{x}_1 \in \widetilde{R}(u_1),\ \forall \widetilde{x}_2 \in \widetilde{R}(u_2).$$

Тогда из соотношений (3) и (4) следует, что для любых $u_1, u_2 \in U$

$$\widetilde{R}(u_1) \succcurlyeq' \widetilde{R}(u_2) \Leftrightarrow x_1 \succcurlyeq x_2 \quad \forall x_1 \in R(u_1),\ \forall x_2 \in R(u_2),$$

а значит, согласно соотношению (2), имеем что для любых $u_1, u_2 \in U$

$$\widetilde{R}(u_1) \succcurlyeq' \widetilde{R}(u_2) \Leftrightarrow R(u_1) \succcurlyeq R(u_2).$$

Лемма доказана.

Теперь покажем, что найдутся такие несовпадающие $u_1, u_2 \in U$, для которых соответствие $\widetilde{R}|_{\{u_1, u_2\}}$ будет многозначным и при этом будет выполняться соотношение

$$u_1 \succcurlyeq^* u_2,\ u_2 \succ^{**} u_1. \tag{5}$$

Предположим противное, т.е. что для любой пары $u_1, u_2 \in U$, удовлетворяющей соотношению (5), соответствие $\widetilde{R}|_{\{u_1, u_2\}}$ будет отображением $\{u_1, u_2\}$ в $\widetilde{X}$. В таком случае, для $u_1, u_2 \in U$, удовлетворяющих соотношению (5), будет справедливым соотношение

$$u_1 \succcurlyeq^* u_2 \Leftrightarrow \widetilde{R}(u_1) \succcurlyeq' \widetilde{R}(u_2) \Leftrightarrow u_1 \succcurlyeq^{**} u_2. \tag{6}$$

Действительно, если $u_1 \succcurlyeq^* u_2\ (u_1 \succcurlyeq^{**} u_2)$, а $\widetilde{R}(u_1) \overline{\succcurlyeq'} \widetilde{R}(u_2)$, что, в силу однозначности соответствия $\widetilde{R}|_{\{u_1, u_2\}}$ и того, что $(\widetilde{X}, \succcurlyeq')$ — линейный порядок, равносильно соотношению $\widetilde{R}(u_1) \succ' \widetilde{R}(u_2)$. Следовательно, согласно лемме 4, $R(u_2) \succ R(u_1)$. Тогда, учитывая условие $X2$ на п′ и п″, имеем, что $u_2 \succ^* u_1\ (u_2 \succ^{**} u_1)$. А это, в силу условия $X1$ на п′ и п″, противоречит соотношению $u_1 \succcurlyeq^* u_2\ \ (u_1 \succcurlyeq^{**} u_2)$. Значит $\widetilde{R}(u_1) \succcurlyeq' \widetilde{R}(u_2)$.

Покажем справедливость соотношения (6) в обратную сторону. Если $\widetilde{R}(u_1) \succcurlyeq' \widetilde{R}(u_2)$, то, согласно лемме 4, $R(u_1) \succcurlyeq R(u_2)$. Отсюда, в силу условия $X2$ на п′ и п″ получим, что $u_1 \succcurlyeq^* u_2\ (u_1 \succcurlyeq^{**} u_2)$. Но, согласно условию $X1$ на п′ и п″, соотношение (6) противоречит соотношению (5).

Таким образом, действительно найдутся такие несовпадающие $u_1, u_2 \in U$, для которых соответствие $\widetilde{R}|_{\{u_1, u_2\}}$ будет многозначным и при этом будет выполняться условие (5).

В таком случае, в ССЗР $\widetilde{\mathcal{Z}} := ((\widetilde{X}, \succcurlyeq'), U, \widetilde{R}) \in \hat{\mathbf{Z}}_0$ обязательно наличие либо фрагмента вида

$$((\{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2\}, \{(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1), (\widetilde{x}_2, \widetilde{x}_1), (\widetilde{x}_2, \widetilde{x}_2)\}, \{u_1, u_2\}, \{(u_1, \widetilde{x}_1), (u_1, \widetilde{x}_2), (u_2, \widetilde{x}_1), (u_2, \widetilde{x}_2)\})$$

и тогда ССЗР $\mathcal{Z}$ содержит фрагмент одного из типов I–IV и теорема доказана, либо подсхему ССЗР $\widetilde{\mathcal{Z}}$ вида

$$((\{\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2\},\{(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_1),(\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_1),(\widetilde{x}_2,\widetilde{x}_2)\},\{u_1,u_2\},\{(u_1,\widetilde{x}_1),(u_2,\widetilde{x}_1),(u_2,\widetilde{x}_2)\}).$$

Тогда, если $\{x\in R(u_2):x_1\succ x\}\neq\varnothing$, то ССЗР $\mathcal{Z}$ содержит фрагмент типа V и теорема доказана. Если $\{x\in R(u_1):x\succ x_1\}\neq\varnothing$, то ССЗР $\mathcal{Z}$ также содержит фрагмент типа V и теорема доказана. В противном случае, т.е. если $\{x\in R(u_2):x_1\succ x\}=\varnothing$ и $\{x\in R(u_1):x\succ x_1\}=\varnothing$, то $R(u_2)\succ R(u_1)$, что противоречит, в силу условия $X2$ для $\text{п}'$, соотношению $u_1\succcurlyeq^* u_2$.

Теорема доказана.

Теорема 3. База неопределенности фрагментов ССЗР любого класса $\hat{\mathbf{Z}}'_0\subseteq\hat{\mathbf{Z}}_0$ пустая, если этот класс не содержит ССЗР с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}'_0)$, и состоит из элементов в количестве от одного до пяти в противном случае.

Доказательство. Следует из следствия 1.1 и теоремы 2.

Теорема доказана.

Интуитивно представляется правдоподобным утверждение обратное к сформулированному в теореме 2. Это действительно так. Указанный факт представим в виде следующей теоремы.

Теорема 4. Если ССЗР класса $\hat{\mathbf{Z}}_0$ содержит фрагмет одного из типов I–V, то эта ССЗР с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$.

Доказательство. Пусть ССЗР $\mathcal{Z}:=((X,\succcurlyeq),U,R)\in\hat{\mathbf{Z}}_0$ содержит фрагмент одного из типов I–V и $\{u_1,u_2\}$, где $u_1,u_2\in U$ является множеством решений этого фрагмента. Тогда множества $R(u_1)$ и $R(u_2)$ не связны соответствием $(X,\succcurlyeq)$ расширенным на множество 2^X, что следует из соотношения (2), т.е. $R(u_1)\overline{\succcurlyeq}R(u_2)$ и $R(u_2)\overline{\succcurlyeq}R(u_1)$. При этом асимметричная составляющая этого расширения, т.е. $(2^X,\succ)$ является строгим частичным порядком.

Определим пару соответсвий $(2^X,\succ')$ и $(2^X,\succ'')$ следующим образом. Для любых множеств $A,B\in 2^X$ положим

$$A\succ' B\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}A\succ B \text{ либо } (A\succcurlyeq R(u_1) \text{ и } R(u_2)\succcurlyeq B) \tag{7}$$

и

$$A\succ'' B\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}A\succ B \text{ либо } (A\succcurlyeq R(u_2) \text{ и } R(u_1)\succcurlyeq B). \tag{8}$$

Ясно, что $R(u_1)\succ' R(u_2)$ и $R(u_2)\succ'' R(u_1)$. Покажем, что соответствия $(2^X,\succ')$ и $(2^X,\succ'')$ являются строгими частичными порядками. Из соображений симметрии доказательство достаточно провести, например, для соответствия $(2^X,\succ')$.

Сначала покажем нерефлексивность соответствия $(2^X, \succ')$, рассуждая от противного. Предположим, что $A \succ' A$, где $A \in 2^X$. Тогда, в силу соотношения (7), $A \succcurlyeq R(u_1)$ и $R(u_2) \succcurlyeq A$. Следовательно, согласно транзитивности соответствия $(2^X, \succcurlyeq)$, получим, что $R(u_2) \succcurlyeq R(u_1)$, что противоречит не связности этих множеств соотношением $(2^X, \succcurlyeq)$.

Покажем теперь транзитивность соответствия $(2^X, \succ')$. Предположим, что $A \succ' B$ и $B \succ' C$, где множества $A, B, C \in 2^X$. Тогда рассмотрим все возможные варианты:

• Если $A \succ B$ и $B \succ C$, то $A \succ C$, в силу транзитивности соответствия $(2^X, \succ)$. Значит, из соотношения (7), имеем, что $A \succ' C$.

• Если $A \succ B$, $B \succcurlyeq R(u_1)$ и $R(u_2) \succcurlyeq C$, то, в силу транзитивности соответствия $(2^X, \succcurlyeq)$, имеем, что $A \succ R(u_1)$. Тогда, согласно соотношению (7), $A \succ' C$.

• Если $A \succcurlyeq R(u_1), R(u_2) \succcurlyeq B$ и $B \succ C$, то, как и выше, $R(u_2) \succ C$ и тогда, в силу соотношения (7), $A \succ' C$.

• И наконец, оставшийся вариант — условия $A \succcurlyeq R(u_1), R(u_2) \succcurlyeq B$, $B \succcurlyeq R(u_1)$ и $R(u_2) \succcurlyeq C$, которые несовместны, т.к. из них следует (согласно транзитивности), что $R(u_2) \succcurlyeq R(u_1)$, а это противоречит не связности множеств $R(u_1)$ и $R(u_2)$ соответствием $(2^X, \succcurlyeq)$.

Теперь, воспользовавшись теоремой Шпильрайна, продолжим строгие частичные порядки $(2^X, \succ')$ и $(2^X, \succ'')$ до строгих порядков, которые обозначим $(2^X, \succ'_0)$ и $(2^X, \succ''_0)$. Тогда их сужения на множество $\{R(u) : u \in U\}$ определяют линейные порядки, которые будем обозначать соответственно через $(U, \succcurlyeq'_0)$ и $(U, \succcurlyeq''_0)$.

Определим ПВП $\text{п}', \text{п}'' \in \Pi(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ таким образом, что для всех ССЗР $\mathcal{Z}' \in \hat{\mathbf{Z}}_0$, неравных ССЗР $\mathcal{Z}$, $\text{п}'_{\mathcal{Z}'} \overset{\text{def}}{=} \text{п}''_{\mathcal{Z}''} := (U, U^2)$. А для ССЗР $\mathcal{Z}$ $\text{п}'_{\mathcal{Z}} :=$ $:= (U, \succcurlyeq'_0)$, $\text{п}''_{\mathcal{Z}} := (U, \succcurlyeq''_0)$, Тогда по построению $\text{п}', \text{п}'' \in \Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ и $\text{п}'_{\mathcal{Z}} \neq \text{п}''_{\mathcal{Z}}$, т.е. ССЗР $\mathcal{Z}$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$.

Теорема доказана.

В качестве непосредственного следствия теоремы 2 и теоремы 4 получаем **критерий неопределенности ССЗР** в классе $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ в терминах фрагментов: ССЗР класса $\hat{\mathbf{Z}}_0$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы один из фрагментов типа I–V.

Если через $\hat{\mathbf{Z}}_1$ обозначить подкласс таких ССЗР $\hat{\mathcal{Z}} := ((X, \succcurlyeq_{\hat{\mathcal{Z}}}), U, R)$ класса $\hat{\mathbf{Z}}$, у которых $(X, \succcurlyeq_{\hat{\mathcal{Z}}})$ — линейный порядок, то ясно, что $\hat{\mathbf{Z}}_1 \subseteq \hat{\mathbf{Z}}_0$

и критерий неопределенности ССЗР в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_1')$ в терминах фрагментов принимает следующий вид: ССЗР класса $\hat{\mathbf{Z}}_1$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_1)$ тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы один из фрагментов типа IV или типа V.

По аналогии с понятием элементарного фрагмента введем понятие элементарной схемы.

Определение 13. ССЗР класса $\hat{\mathbf{Z}}_0$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ называется **элементарной схемой** для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$, если ее любая подсхема будет без неопределенности в классе $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$.

Ясно, что элементарный фрагмент будет элементарной схемой, но обратное, вообще говоря, не верно.

Лемма 5. В элементарной схеме для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ множество решений состоит из двух элементов.

Доказательство. Пусть ССЗР $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}_0$ является элементарной схемой. Тогда, в силу теоремы 2, ССЗР $\mathcal{Z}$ содержит элементарный фрагмент. Отсюда, согласно лемме 5, множество решений этого элементарного фрагмента состоит из двух элементов. Предположим, что это будут $u_1, u_2 \in U$. Тогда, в силу теоремы 4, ССЗР $\overline{\mathcal{Z}} := ((X, \succcurlyeq), \{u_1, u_2\}, R|_{\{u_1,u_2\}}) \in \hat{\mathbf{Z}}_0$ будет с неопределнностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ и является подсхемой ССЗР $\mathcal{Z}$. Следовательно $\mathcal{Z} = \overline{\mathcal{Z}}$.

Лемма доказана.

Лемма 6. ССЗР класса $\hat{\mathbf{Z}}$, изоморфные либо одному из фрагментов типа I–V, либо одной из ССЗР:

- $((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}),$ $\{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_3), (u_2, x_1), (u_2, x_2)\});$
- $((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}),$ $\{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_3), (u_2, x_2), (u_2, x_3)\});$
- $((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}),$ $\{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_2), (u_1, x_3), (u_2, x_2)\}),$

называемые соответственно схемами типа I–VIII, являются элементарными схемами для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$.

Доказательство. В силу леммы 3 лемму достаточно доказать для схем типа VI–VIII. При этом доказательство неопределенности схем типа VI–VIII и принадлежности их к классу $\hat{\mathbf{Z}}_0$ дословно повторяет доказательство неопределенности схем типа I–V и принадлежности их к классу $\hat{\mathbf{Z}}_0$ в доказательстве леммы 3. А то, что любая подсхема этих ССЗР будет без неопределенности в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ легко проверяется непосредственно, согласно определению.

Лемма доказана.

Определение 14. Система элементарных схем для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ называется **полной**, если любая элементарная схема для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ изоморфна какому-то представителю этой системы.

Теорема 5. Полная систем элементарных схем для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ состоит из схем типов I–VIII.

Доказательство. Пусть ССЗР $\mathcal{Z}$ является элементарной для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$. Тогда, в силу теоремы 2, в нее входит хотя бы один из фрагментов типа I–V.

Если в ССЗР $\mathcal{Z}$ входит фрагмент типа IV, то он является подсхемой ССЗР $\mathcal{Z}$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$. Значит в этом случае ССЗР $\mathcal{Z}$, в силу ее элементарности, совпадает с фрагментом типа IV.

Если в ССЗР $\mathcal{Z}$ входит фрагмент одного из типов I–III, то подсхема ССЗР $\mathcal{Z}$ определенная множествами последствий и решений, совпадающих с соответсвующими множествами этого фрагмента, либо совпадает с этим фрагментом, либо содержит фрагмент типа IV. Следовательно в этом случае ССЗР $\mathcal{Z}$, в силу ее элементарности, совпадает с одним из фрагментов типа I–IV.

Если же в ССЗР $\mathcal{Z}$ входит фрагмент типа V, то подсхема ССЗР $\mathcal{Z}$, определенная множествами последствий и решений совпадающими с соответствующими множествами этого фрагмента, может иметь вид любого фрагмента ССЗР

$$\overline{\mathcal{Z}} := ((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}),$$

$$\{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_2), (u_1, x_3), (u_2, x_1), (u_2, x_2), (u_2, x_3)\}),$$

содержащего подфрагмент одного из типов I–V. Но наличие фрагмента одного из типов I–IV нами уже рассмотрено, следовательно можно считать, что это будет фрагмент типа V (его можно выбрать из ССЗР $\mathcal{Z}$ двумя способами), возможно дополненный одной, двумя или тремя точками из $\{u_1, u_2\} \times \{x_1, x_2, x_3\}$. Дополнение двумя либо тремя точками приводит к наличию фрагмента типа III, что нами уже рассмотрено. А дополнив фрагмент типа V в ССЗР $\mathcal{Z}$ одной точкой, получим ССЗР изоморфную одной из схем типа VI–VIII.

Теорема доказана.

Следствие 5.1. Схемы типов I–VIII и только они являются элементарными схемами для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 6 и доказательства теоремы 5.

Определение 15. Система неизоморфных в классе $\hat{\mathbf{Z}}$ элементарных схем для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ называется **базой неопреденности схем** для класса $\hat{\mathbf{Z}}'_0 \subseteq \hat{\mathbf{Z}}_0$, если любая ССЗР класса $\hat{\mathbf{Z}}'_0$ с неопределенностью в $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}'_0)$ содержит подсхему, изоморфную какому-либо представителю этой системы.

Теорема 6. Любая ССЗР любого класса $\hat{\mathbf{Z}}'_0 \subseteq \hat{\mathbf{Z}}_0$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}'_0)$ содержит подсхему вида схемы хотя бы одного из типов I−VIII.

Доказательство. Следует из теоремы 2 и доказательства теоремы 5.

Теорема доказана.

Теорема 7. База неопределенности схем для любого класса $\hat{\mathbf{Z}}'_0 \subseteq \hat{\mathbf{Z}}_0$ пустая, если этот класс не содержит ССЗР с неопределенностью в $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}'_0)$ и состоит из элементов в количестве от одного до восьми в противном случае.

Доказательство. Следует из следствия 2 и теоремы 6.

Теорема доказана.

Теорема 8. Если ССЗР класса $\hat{\mathbf{Z}}_0$ содержит подсхему виду схемы одного из типов I–VIII, то эта ССЗР с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$.

Доказательство. Так как схема любого из типов I–VIII содержит фрагмент одного из типов I–V то, согласно теореме 4, получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

В качестве непосредственного следствия теорем 6 и 8 получаем **критерий неопределенности ССЗР** в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ в терминах подсхем: ССЗР класса $\hat{\mathbf{Z}}_0$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну подсхему типа I−VIII.

Тогда критерий неопределенности ССЗР в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_1)$ в терминах подсхем будет иметь следующий вид: ССЗР класса $\hat{\mathbf{Z}}_1$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_1)$ тогда и только тогда, когда она содержит хотя бы одну подсхему типа IV–VIII.

Далее для любого подкласса ССЗР $\hat{\mathbb{Z}}'$ класса $\hat{\mathbb{Z}}$ через $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}}')$ обозначим все такие ПВП класса $\hat{\mathbb{Z}}'$, что для любой ССЗР $\hat{Z} :=$ $:= (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}'$ выполняются следующие условия:

$XX1$. $(U, \succcurlyeq^*)$ — нестрогий порядок.

$XX2$. Если для любых $u_1, u_2 \in U$:

- $R(u_1) \succ R(u_2)$, то $u_1 \succ^* u_2$;
- $R(u_1) \sim R(u_2)$, то $u_1 \sim^* u_2$.

$XX3$. $(X, \succcurlyeq)$ — нестрогий порядок.

Из рассуждений аналогичных использованным при обосновании непустоты $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ следует, что $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}}) \neq \varnothing$.

ССЗР класса $\hat{\mathbb{Z}}$ изоморфные ССЗР вида:

- $(\{x_1,x_2\},\{u_1,u_2\},\{(u_1,x_1),(u_1,x_2),(u_2,x_1),(u_2,x_2)\})$,
- $(\{x_1,x_2,x_3\},\{u_1,u_2\},\{(u_1,x_1),(u_2,x_2),(u_2,x_3)\})$,
- $(\{x_1,x_2,x_3\},\{u_1,u_2\},\{(u_1,x_1),(u_1,x_3),(u_2,x_2),(u_2,x_3)\})$

будем называть соответственно схемами типа I–III класса $\hat{\mathbb{Z}}$.

Тогда критерий неопределенности ССЗР в классе $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}}')$, где $\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$ в терминах фрагментов сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 9. Любая ССЗР класса $\hat{\mathbb{Z}}$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$ тогда и только тогда, когда эта ССЗР содержит фрагмент вида схемы типа I либо II класса $\hat{\mathbb{Z}}$.

Доказательство. Пусть ССЗР $Z := (X,U,R) \in \hat{\mathbb{Z}}$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$. Тогда найдутся $\pi', \pi'' \in \Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$, для которых $\pi'_{1Z} = \pi''_{1Z} := (X, \succcurlyeq)$ — нестрогий порядок и $(U, \succcurlyeq^*) := \pi'_{2Z} \neq \pi''_{2Z} =: (U, \succcurlyeq^{**})$. А это означает, что ССЗР $\mathcal{Z} := ((X,\succcurlyeq),U,R) \in \hat{\mathbf{Z}}$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\{\mathcal{Z}\})$. Следовательно, в силу теормы 2, ССЗР $\mathcal{Z}$ содержит фрагмент одного из типов I–V. Если ССЗР $\mathcal{Z}$ содержит фрагмент типа IV, то он определяет в ССЗР Z фрагмент вида схемы типа I класса $\hat{\mathbb{Z}}$. Если же ССЗР $\mathcal{Z}$ содержит какой-либо из фрагментов типа I–III,V, то он определяет в ССЗР Z фрагмент вида схемы типа II класса $\hat{\mathbb{Z}}$.

В обратную сторону. Если ССЗР $Z := (X,U,R) \in \hat{\mathbb{Z}}$ содержит фрагмент вида схемы типа I класса $\hat{\mathbb{Z}}$, то определим строгий частичный порядок как $(X, \succ') := (X, \{(x_2, x_1)\})$. Если же ССЗР Z содержит фрагмент вида схемы типа II класса $\hat{\mathbb{Z}}$, то определим строгий частичный порядок $(X, \succ'') := (X, \{(x_1,x_2),(x_3,x_2),(x_3,x_1)\})$. В силу теоремы Шпильрайна эти строгие частичные порядки можем продолжить до линейных порядков, которые обозначим соответственно $(X, \succcurlyeq'_0)$ и $(X, \succcurlyeq''_0)$. Тогда, согласно теореме 4, либо ССЗР $((X,\succcurlyeq'_0),U,R)$, либо ССЗР $(X,\succcurlyeq''_0),U,R)$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$. Следовательно ССЗР $Z = (X,U,R)$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$.

Теорема доказана.

Определение 16. ССЗР класса $\hat{\mathbb{Z}}$ с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$ называется **элементарным фрагментом (элементарной схемой)** для $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$, если любой фрагмент (любая подсхема) этой ССЗР будет без неопределенности в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$.

Аналогично понятию элементарного фрагмента (элементарной схемы) для $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$, вводятся как и в классе $\hat{\mathbf{Z}}$ понятия полной системы элементарных фрагментов (элементарных схем) для $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$ и базы неопределенности фрагментов (схем) класса $\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$.

Определение 17. Система элементарных фрагментов (элементарных схем) для $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$ называется **полной**, если любой элементарный фрагмент (любая элементарная схема) для $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$ изоморфен (изоморфна) какому-то представителю этой системы.

Определение 18. Система неизоморфных элементарных фрагментов (схем) для $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$ называется **базой неопределенности фрагментов (схем)** класса $\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$, если любая ССЗР класса $\hat{\mathbb{Z}}'$ с неопределенностью в $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}}')$ имеет фрагмент (подсхему), изоморфный (изоморфную) какому-то представителю этой системы.

Тогда из теоремы 9 получим критерий элементарности фрагментов класса $\hat{\mathbb{Z}}$ в виде следующей теоремы.

Теорема 10. Схемы типов I и II класса $\hat{\mathbb{Z}}$ и только они являются элементарными фрагментами для $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$.

Из теоремы 9 также получаем критерий неопределенности ССЗР класса $\hat{\mathbb{Z}}$ в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$ в терминах подсхем в виде следующей теоремы.

Теорема 11. Всякая ССЗР класса $\hat{\mathbb{Z}}$ будет с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$ тогда и только тогда, когда эта ССЗР содержит подсхему вида схемы одного из типов I–III класса $\hat{\mathbb{Z}}$.

Доказательство. Следует из теоремы 9 и того факта, что минимальная подсхема анализируемой ССЗР, содержащая фрагмент вида схемы типа II класса $\hat{\mathbb{Z}}$ и не совпадающая с ним, будет изоморфна схеме типа III класса $\hat{\mathbb{Z}}$ либо содержать подсхему изоморфную схеме типа I класса $\hat{\mathbb{Z}}$.

Теорема доказана.

Из теоремы 11 следует критерий элементарности схем класса $\hat{\mathbb{Z}}$ формулируемый в следующей теореме.

Теорема 12. Схемы типов I–III класса $\hat{\mathbb{Z}}$ и только они являются элементарными схемами для $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$.

Из доказанных теорем 9 и 11 получаем критерий полноты системы элементарных фрагментов (схем) для $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$ и классификацию неопределенности в $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}}')$ любого подкласса $\hat{\mathbb{Z}}'$ класса $\hat{\mathbb{Z}}$ в виде следующих теорем.

Теорема 13. Полная система элементарных фрагментов (схем) для $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}})$ состоит из схем типов I, II (I–III) класса $\hat{\mathbb{Z}}$.

Теорема 14. База неопределенности фрагментов (схем) любого класса $\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$ пустая, если этот класс не содержит ССЗР с неопределенностью в классе ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbb{Z}}')$, и состоит в количестве от одного до двух (трех) элементов в противном случае.

ВЫВОДЫ

Предложенный подход к изучению неопределенности схем ситуаций задач принятия решений помимо критериев, позволяющих проанализировать ситуацию на наличие неопределенности при выборе оптимального решения в указанных классах ПВП, также дает возможность сужать эти классы ПВП, добавляя новые аксиомы и проверяя наличие неопределенности в схемах анализируемых ситуаций, используя при этом предложенные критерии неопределенности, вплоть до получения формализма модели критерия оптимальности решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иваненко В.И., Лабковский В.А.* Проблема неопределенности в задачах принятия решений. — К.: Наук. думка, 1990. — 134 с.
2. *Ivanenko V.I.* Decision systems and non-stochastic randomness. — Berlin: Springer, 2010. — 272 p.
3. *Иваненко В.И., Михалевич В.М.* К моделированию стохастических ситуаций принятия решения // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2010. — № 1. — С. 78–80.
4. *Иваненко В.И., Михалевич В.М.* К вопросу о неопределенности в задачах принятия решения // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 2. — С. 116–120.
5. *Михалевич В.М.* К параметрической форме моделирования ситуации в общей задаче принятия решений // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2011. — № 3. — С. 77–87.
6. *Szpilrajn E.* Sur l’extension de l’ordre partiel. Fundamenta Mathematicae. — 1930. — 16 (1930). — P. 386–389.
7. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений. — М.: Наука, 1978. — 352 с.

Поступила 21.10.2011