УДК 517.9

ДОВГОСТРОКОВІ ПРОГНОЗИ ФУНКЦІЙ СТАНУ КВАЗІЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ СИСТЕМ В $\mathbb{R}^n$

Н.В. ГОРБАНЬ

Розглянуто квазілінійну гіперболічну систему в просторі $\mathbb{R}^n$ з нелінійною, у загальному випадку, функцією взаємодії. Досліджено асимптотичну поведінку слабких розв'язків поставленої задачі. Доведено існування траєкторного та глобального атракторів для всіх слабких розв'язків вихідної задачі. Доведено, що потраєкторно всі слабкі розв'язки прямують до стаціонарних станів.

ВСТУП

Інтенсивні дослідження керованих п'єзоелектричних процесів і полів обумовлюють необхідність вивчення їх математичних моделей, які містять у собі квазілінійні диференціальні рівняння з частинними похідними гіперболічного типу. Більшої складності такі задачі набувають у випадках необмежених областей. У цій роботі ми зосередимось на дослідженні довгострокових прогнозів функцій стану таких задач із використанням теорії глобальних і траєкторних атракторів для м-напівпотоків, розроблених у роботах [1–10]. Зазначимо, що багатозначна динаміка розв'язків квазілінійних гіперболічних рівнянь в обмежених областях досліджувалась у роботах [1, 2, 3, 6, 9].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається рівняння

$$u_{tt} + \gamma u_t - \Delta u + f(x,u) = h(x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де $\gamma > 0$, $n \ge 3$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ — вимірна по x та неперервна по t функція, яка задовольняє умовам:

$$h \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad \exists\, C_1, C_2 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n), \ C_1 \ge 0, \ \exists \alpha > 0, \ \exists c \ge 0:$$

$$|f(x,u)| \le C_1(x) + c|u| \quad \forall\, (x,u) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\forall\, (x,u) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad f(x,u)u \ge \alpha u^2 - C_2(x). \tag{2}$$

Надалі γ, C_1, C_2, c, α називатимемо константами задачі (1).

Покладемо

$$F(x,u) := \int_0^u f(x,s)\,ds, \quad \forall (x,u) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Оскільки f задовольняє умовам Каратеодорі, то $\forall (x,u) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$|F(x,u)| \le C_1(x)|u| + \frac{c}{2}|u|^2, \quad F(x,u) \ge \frac{\alpha}{2}u^2 - C_2(x)|u|. \qquad (3)$$

Позначатимемио через $|\cdot|, (\cdot,\cdot)$ та $\|\cdot\|$ $((\cdot,\cdot))$ норму і скалярний добуток у $L^2(\mathbb{R}^n)$ та $H^1(\mathbb{R}^n)$ відповідно. Зауважимо, що $\forall u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$

$$((u,v)) = \frac{\alpha}{4}(u,v) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right).$$

Фазовим простором задачі (1) є простір $E = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$.

Розв'язок задачі (1) розумітимемо в сенсі такого означення.

Означення 1. Функція $\varphi(\cdot) = (u(\cdot), u_t(\cdot))^T \in L^\infty(\tau, T; E)$ називається слабким розв'язком задачі (1) на (τ, T), якщо $\forall \psi \in H_0^1(\mathbb{R}^n)$, $\forall \eta \in \mathbb{C}_0^\infty(\tau, T)$:

$$-\int_\tau^T (u_t, \psi)\eta_t + \int_\tau^T (\gamma(u_t, \psi) + ((u,\psi)) + (f(x,u), \psi) - (h,\psi))\eta = 0. \qquad (4)$$

Ставиться задача дослідження асимптотичної поведінки всіх слабких розв'язків задачі (1).

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглянемо клас функцій $W_\tau^T = \mathbb{C}([\tau, T]; E)$. Із умов (2), (3) для довільної функції $\varphi(\cdot) = (u(\cdot), u_t(\cdot))^T \in W_\tau^T$ коректно визначений такий функціонал:

$$V(\varphi(t)) = \frac{1}{2}|u_t(t)|^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + (F(\cdot, u(t)), 1) + (h, u(t)), \quad t \in [\tau, T].$$

Лема 1. Для довільного $\varphi(\cdot) = (u(\cdot), u_t(\cdot))^T \in W_\tau^T$ — слабкого розв'язку (1) на (τ, T) функція $V(\varphi(\cdot))$ є абсолютно неперервною на $[\tau, T]$ і для майже всіх $t \in [\tau, T]$

$$\frac{d}{dt}V(\varphi(t)) = -\gamma |u_t(t)|^2 .$$

Більше того, $\forall t \ge s$, $t, s \in [\tau, T]$: $V(\varphi(t)) \le V(\varphi(s))$.

Доведення. Нехай $\varphi(\cdot) = (u(\cdot), u_t(\cdot))^T \in W_\tau^T$ — довільний слабкий розв'язок задачі (1) на (τ, T). Тоді, внаслідок (2), $f(x,u) \in L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n))$. Отже, із [1] функція $t \mapsto |u_t(t)|^2 + \|u(t)\|^2$ є абсолютно неперервною на $[\tau, T]$ і майже скрізь.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{|u_t|^2 + \|u\|^2\} = -\gamma|u_t|^2 - (f(x,u), u_t) + (h, u_t). \qquad (5)$$

Для того, щоб довести, що функція $t \mapsto (F(x, u(t)), 1)$ є абсолютно неперервною на $[\tau, T]$ і майже скрізь на $[\tau, T]$ виконується рівність

$$\frac{d}{dt}(F(x,u), 1) = (f(x,u), u_t). \qquad (6)$$

Внаслідок [1] достатньо показати її неперервність на $[\tau, T]$ і виконання (6) у сенсі скалярних розподілів на (τ, T). Доведення аналогічне [2, 3]. Таким чином, твердження леми стає очевидним.

Лему доведено.

Зауваження 1. Із твердження леми 1 випливає, що V — функція Ляпунова для задачі (1).

Оскільки $H^1(\mathbb{R}^n)$ неперервно вкладається в $L^2(\mathbb{R}^n)$, то з умов (2) для $u \in L^\infty(\tau, T; H^1(\mathbb{R}^n))$ маємо вкладення $f(x,u) \in L^2(\tau, T; L^2(\mathbb{R}^n))$. Отже, згідно з [1], для кожного слабкого розв'язку задачі (1) $\varphi(\cdot)$ на (τ, T) маємо $\varphi(\cdot) \in C([\tau, T]; E)$. Це зумовлює вибір класу W_τ^T. Вкладення $\varphi(\cdot) \in$ $\in C([\tau, T]; E)$ дозволяє для (1) ставити задачу Коші з початковими умовами

$$u|_{t=0} = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad u_t|_{t=0} = v_0 \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{7}$$

і шукати розв'язок лише в класі $L^\infty(\tau, T; E)$.

Теорема 1. Для довільних $\varphi_0 = (u_0, v_0)^T \in E$, $T > 0$ задача Коші (1), (7) за виконання умов (2), має принаймні один слабкий розв'язок у класі W_0^T.

Доведення. З певними технічними модифікаціями повторює доведення теореми 1 із [4].

Поєднуючи результати теореми 1 та леми 1, одержимо, що для довільних $\varphi_0 = (u_0, v_0)^T \in E$ задача Коші (1), (7) за умов (2), має принаймні один розв'язок у класі $C^{\text{loc}}((0,+\infty); E) \cap L^\infty_{\text{loc}}((0;+\infty); E)$. Покладемо $W_0^\infty =$ $= C^{\text{loc}}((0,+\infty); E)$. Для довільного $\varphi_0 \in E$ нехай $\mathcal{D}(\varphi_0)$ — сукупність усіх слабких розв'язків (визначених на $[0, +\infty)$) задачі (1) з початковими даними $\varphi(0) = \varphi_0$. Тепер для довільних $t \ge 0$, $\varphi_0 \in E$ розглянемо множину

$$G(t, \varphi_0) = \{\varphi(t) \mid \varphi(\cdot) \in \mathcal{D}(\varphi_0)\} \subset E.$$

Для непорожніх $A, B \subset E$:

$$\operatorname{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \| x - y \|_E, \quad \operatorname{dist}_H(A, B) = \max\{\operatorname{dist}(A, B), \operatorname{dist}(B, A)\},$$

$$O_\delta(A) = \{x \in E \mid \operatorname{dist}(x, A) < \delta\}, \quad B_r = \{x \in E \mid \rho(x, 0) \le r\},$$

$\overline{A} = \operatorname{cl}_E A$ — замикання A у E, $P(E)$ — сукупність усіх непорожніх підмножин E, $\beta(E)$ — сукупність усіх непорожніх обмежених підмножин E, $C(E)$ — сукупність усіх непорожніх замкнених підмножин в E, $K(E)$ — сукупність усіх непорожніх компактних підмножин E.

Зазначимо, що відображення $G: \mathbb{R}_+ \times E \mapsto P(E)$ — строгий м-напівпотік на E, тобто

- $G(0, \cdot) = I_E$ — тотожне відображення E;

- $G(t+s,x)=G(t,G(s,x))\quad \forall\, t,s\in\mathbb{R}_+,\ \forall\, x\in E$.

Означення 2. Множина $A\subset E$ називається притягуючою множиною для м-напівпотока G, якщо для довільного $B\in\beta(E)$ і довільного околу $N(A)$ множини A в E існує $T=T(N(A),B)\in\mathbb{R}_+$ така, що $\forall\, t\geq T$ $G(t,B)\subset N(A)$ $\forall\, t\geq T$ [5].

Означення 3. Множина $\Theta\subset E$ називається глобальним атрактором для м-напівпотока G, якщо:

- Θ притягуюча множина;
- для довільної притягуючої множини Y $\Theta\subset \mathrm{cl}_E Y$ (мінімальність);
- $\Theta\subset G(t,\Theta)$, для всіх $t\geq 0$ (півінваріантність) [5].

Означення 4. М-напівпотік G називається асимптотично компактним, якщо для довільного $B\in\beta(E)$ існує $A(B)\in K(E)$ таке, що

$$\mathrm{dist}\,(G(t,B),A(B))\to 0,\ \ t\to+\infty\ \ [6].$$

Теорема 2. Нехай для задачі (1) виконано мови (2). Тоді відображення G є м-напівпотоком, для якого у фазовому просторі $E=H^1(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ існує компактний, інваріантний глобальний атрактор.

Доведення. Для доведення виконання твердження цієї теореми, беручи до уваги [6], твердження леми 1 та теореми 1, достатньо перевірити такі властивості:

- Нехай $\{\varphi^n\}\subset W_\tau^T$ — послідовність розв'язків задачі (1), причому $\varphi^n(\tau)\to\varphi_\tau$ слабо в E. Нехай задана послідовність $\{t_n\}\subset[\tau,T]$ така, що $t_n\to t_0\in[\tau,T]$. Тоді існує $\varphi\in W_\tau^T$ — розв'язок (1) такий, що $\varphi(\tau)=\varphi_\tau$ і принаймні з точністю до підпослідовності $\varphi^n(t_n)\to\varphi(t_0)$ слабо в E. Якщо ж $\varphi^n(\tau)\to\varphi_\tau$ сильно в E, то принаймні з точністю до підпослідовності $\varphi^n(t_n)\to\varphi(t_0)$ сильно в E.
- М-напівпотік G асимптотично компактний.

Ці твердження перевіряються (із певними технічними модифікаціями) за допомогою техніки, поданої в роботах [4, 7].

Теорему доведено.

Відповідно до [6], позначимо сукупність стаціонарних станів G через $Z(G)$. Зазначимо, що

$$Z(G)=\{(z,\overline{0})\in E\,|\,((z,\psi))+(f(x,z),\psi)=(h,\psi)\ \ \forall\psi\in H^1(\mathbb{R}^n)\}$$

є обмеженою множиною в E.

Розглянемо сімейство $K_+=\cup_{y_0\in H}\mathcal{D}(y_0)$ усіх слабких розв'язків рівняння (1), визначених на $[0,+\infty)$. Зазначимо, що K_+ є трансляційно інваріантним, тобто $\forall u(\cdot)\in K_+$, $\forall h\geq 0$ $u_h(\cdot)\in K_+$, де $u_h(s)=u(h+s)$, $s\geq 0$. Задамо на K_+ напівгрупу трансляцій $\{T(h)\}_{h\geq 0}$, $T(h)u(\cdot)=u_h(\cdot)$, $h\geq 0$, $u\in K_+$. Внаслідок трансляційної інваріантності K_+ отримуємо, що $T(h)K_+\subset K_+$ при $h\geq 0$.

Побудуємо атрактор трансляційної напівгрупи $\{T(h)\}_{h\geq 0}$, що діє на K_+. На K_+ розглядатимемо топологію, індуковану з простору Фреше $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E)$. Зауважимо, що

$$f_n(\cdot)\to f(\cdot) \text{ в } C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E) \Leftrightarrow \forall M>0\colon \Pi_M f_n(\cdot)\to \Pi_M f(\cdot) \text{ в } C([0,M];E),$$

де Π_M — оператор обмеження на відрізку $[0,M]$ [8]. Позначимо через Π_+ оператор обмеження на $[0,+\infty)$.

Нагадаємо, що множину $P\subset C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E)\cap L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ називають притягуючою для простору траєкторій K_+ рівняння (1) в топології $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E)$, якщо для довільної обмеженої в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$ множини $B\subset K_+$ та довільного числа $M\geq 0$ виконується співвідношення

$$\operatorname{dist}_{C([0,M];E)}(\Pi_M T(t)B,\Pi_M P)\to 0,\quad t\to+\infty.$$

Множина $U\subset K_+$ називається траєкторним атрактором у просторі траєкторій K_+ відносно топології $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E)$ [8], якщо:

- U — компактна в $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E)$ та обмежена в $L_\infty(\mathbb{R}_+;E)$;
- U — строго інваріантна відносно $\{T(h)\}_{h\geq 0}$, тобто $T(h)U=U$ $\forall h\geq 0$;
- U є притягуючою множиною для простору траєкторій K_+ у топології $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E)$.

Розглянемо рівняння (1) на всій числовій прямій. Аналогічно простору $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;E)$ простір $C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};E)$ оснащується топологією локальної рівномірної збіжності на кожному відрізку $[-M,M]\subset\mathbb{R}$ [8]. Функція $u\in C^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};E)\cap L_\infty(\mathbb{R};E)$ називається повною траєкторією рівняння (1), якщо $\forall h\in\mathbb{R}$ $\Pi_+ u_h(\cdot)\in K_+$ [8]. Нехай K — сукупність усіх повних траєкторій рівняння (1). Зазначимо, що

$$\forall h\in\mathbb{R},\ \forall u(\cdot)\in K:\ u_h(\cdot)\in K.$$

Теорема 3. Нехай A — глобальний атрактор з теореми 2. Тоді в просторі K_+ існує траєкторний атрактор $P\subset K_+$. При цьому істинна формула

$$P=\Pi_+K=\Pi_+\{y\in K\mid y(t)\in A\ \ \forall t\in\mathbb{R}\}.$$

Доведення. Твердження теореми є прямим наслідком теореми 3.9 з [9].

Теорема 4. Для довільної повної траекторії $\psi\in K$ граничні множини

$$\alpha(\psi)=\{z\in E\,|\,\psi(t_j)\to z \text{ для деякої послідовності } t_j\to-\infty\},$$

$$\omega(\psi)=\{z\in E\,|\,\psi(t_j)\to z \text{ для деякої послідовності } t_j\to+\infty\}$$

є зв'язними підмножинами $Z(G)$ на яких функція Ляпунова V стала.

Доведення. Твердження теореми є прямим наслідком теореми 2.7 з [6], леми 1 та теореми 2.

ВИСНОВКИ

Для квазілінійного гіперболічного рівняння (1) у необмеженій області з нелінійною, у загальному випадку, неперервною функцією взаємодії доведено існування глобального та траєкторного атракторів у природному фазовому та, відповідно, природному розширеному фазовому просторі. Перевірено також, що потраєкторно всі слабкі розв'язки прямують до стаціонарних положень. Результати можуть знайти своє застосування в задачах керування п'єзоелектричними процесами у формі оберненого зв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. — Berlin: Springer, 1988. — 500 p.
2. *Капустян О.В., Іоване Ж.* Глобальний атрактор для неавтономного хвильового рівняння без єдиності розв'язку // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2006. — № 2. — С. 107–120.
3. *Капустян О.В.* Властивість Кнезера для неавтономного хвильового рівняння без єдиності розв'язку // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2007. — № 2. — С. 107–120.
4. *Stanzhyts'kyi O.M., Horban' N.V.* Global attractor for the autonomous wave equation in with continious nonlinearity // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — **60**, № 2. — P. 299–309.
5. *Melnik V.S., Valero J.* On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions // Set-Valued Analysis. — 1998. — **6**, № 1. — P. 83–111.
6. *Ball J.M.* Global attractors for damped semilinear wave equations // Discrete and Continuous Dynamical System. — 2004. — **10**. — P. 31–52.
7. *Stanzhitsky A.N., Gorban N.V.* On the dynamics of solutions for autonomous reaction-diffusion equation in with multivalued nonlinearity // Український математичний вісник. — 2009. — Т. 6, № 2. — С. 235–251.
8. *Вишик М.И., Чепыжов В.В.* Траекторный и глобальный аттракторы 3D системы Навье-Стокса // Математические заметки. — 2002. — Т. 71, № 2. — С. 194–213.
9. *Kapustyan O.V., Valero J.* Comparison between trajectory and global attractors for evolution systems without uniqueness of solutions // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2010. — **20**, Issue 9. — P. 2723–2734.
10. *Zgurovsky M.Z., Mel'nik V.S., Kasyanov P.O.* Evolution Inclusions and Variation Inequalities of Earth Data Processing II. — Heidelberg: Springer, 2011. — 274 p.

Надійшла 07.06.2011