

УДК 532.516:518:517.9

## ЧИСЕЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ В'ЯЗКОЇ ТЕЧІЇ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ ОБЕРТОВОМУ ЦИЛІНДРІ

Ю. В. НАУМЕНКО

Рівненський державний гуманітарний університет

Отримано 14.06.2000 ◊ Переглянуто 14.09.2001

Розглянуто чисельне визначення двовимірного неусталеного руху рідини, що частково заповнює горизонтальний стаціонарно обертовий циліндр. Використовується метод "маркерів і комірок" у полярній системі координат. Наведено результати чисельних розрахунків режиму пристінного шару та циркуляційного режиму течії, що виникають при швидкому та повільному обертанні циліндра. Аналізуються особливості задавання початкових умов задачі визначення цих режимів.

Рассмотрено численное определение двумерного неустойчившегося движения жидкости, частично заполняющей горизонтальный стационарно вращающийся цилиндр. Используется метод "маркеров и ячеек" в полярной системе координат. Приведены результаты численных расчетов режима пристенного слоя и циркуляционного режима течения, возникающих при быстром и медленном вращении цилиндра. Обсуждаются особенности задания начальных условий задачи определения этих режимов.

The numerical simulation of time-dependent, two-dimensional flow of viscon fluid, which partially fills stationary rotating, horizontal cylinder, is considered. The Marker-and-Cell method in polar coordinates is used. The results of numerical simulation of the wall layer flow and circulating flow, which take place when cylinder rotates fast and slowly, are represented. The characteristic properties of setting the initial conditions of the problem on calculation these flows are discussed.

### ВСТУП

Задача визначення руху рідини, яка частково заповнює горизонтальний циліндр, що обертається навколо власної осі, викликає сталий прикладний інтерес. Усталена течія при стаціонарному обертанні циліндра характеризується двома режимами руху. Перший режим у вигляді малорухливого пристінного квазікільцевого шару виникає при швидкому обертанні циліндра. Другий характеризується складним циркуляційним рухом із значними відносними швидкостями та деформаціями вільної поверхні й виникає при тиххідному обертанні.

В [1] чисельно на підставі теорії пограничного шару з експериментальною перевіркою розв'язувалась задача визначення положення вільної поверхні тонкого пристінного шару рідини при першому режимі руху. Чисельні підходи до визначення течії у вигляді пристінного шару, що базуються на різних методах, представлено в [2-5].

Внаслідок складності течії моделювання другого режиму руху істотно ускладнено порівняно з описом першого. Результати експериментальних та частково теоретичних досліджень циркуляційного режиму руху наведено в [6-8]. Спроби чисельного визначення окремих параметрів циркуляційної течії зроблено в [9-11].

Характерною особливістю задачі, що розгля-

дається, є складна геометрія, велика деформація вільної границі та рухомість твердої стінки. Однак моделювання такої течії за допомогою відомих спрощених чисельних методів [1-5, 9-11] не забезпечує достатньої точності. В той же час досить широкого розповсюдження набув один з найефективніших алгоритмів для розв'язування нестационарних задач течії з складною формою вільної поверхні – метод "маркерів і комірок" або Marker-and-Cell (MAC) method [12]. Особливістю методу є використання мішаного ейлерова-лагранжева підходу. Область, що вивчається, розбивається нерухомою рознесеною ейлеровою сіткою на комірки. Одночасно для визначення положення вільної поверхні та візуалізації течії використовується лагранжева сітка частинок-маркерів, що переносяться полем швидкостей. Застосовується повна система рівнянь Нав'є-Стокса для найпростіших фізичних змінних складових швидкості та тиску. Різницева схема для рівнянь кількості руху базується на різницях вперед по часу та центральних різницях по просторових змінних. На кожному кроці по часу ітераційними методами розв'язується різницева рівняння Пуассона для тиску, що задовільняє умові нестисливості.

Розроблену спочатку для прямокутної декартової системи координат методику згодом було розповсюджено і на циліндричну систему для випадку осьової симетрії [13, 14]. В [15] для чисельного ро-

зв'язання двовимірної нестационарної задачі, що розглядається, використовується метод "маркерів і комірок", який застосовано в полярних координатах, що найближче відповідають геометрії течії та границь.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Область кругового поперечного перерізу циліндра, що вивчається, покривається полярною сіткою комірок у вигляді кільцевого сектора із сторонами  $\Delta r$  і  $\Delta\phi$  та центром  $(i, j)$ , де  $i$  та  $j$  – індекси радіальної та кутової координат (рис.1). Радіальна  $U$  та тангенціальна  $V$  компоненти швидкості визначаються на границях комірки, а тиск  $p$  – у центрі.

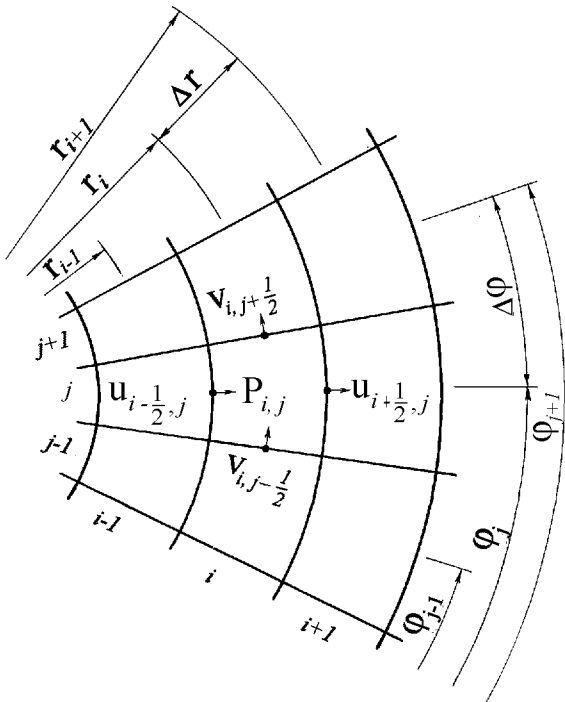


Рис. 1. Розрахункова сітка

Тоді кінцево-різницева апроксимація рівнянь Нав'є-Стокса в консервативній формі у безрозмірному вигляді може бути записана таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - U_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta t} &= \frac{(rU^2)_{i+1,j} - (rU^2)_{i,j}}{r_{i+\frac{1}{2}}\Delta r} - \\ &- \frac{(UV)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (UV)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{r_{i+\frac{1}{2}}\Delta\phi} + \\ &+ \left(\frac{V^2}{r}\right)_{i+\frac{1}{2},j} - \frac{\sin\varphi_j}{Fr} - \frac{P_{i+1,j} - P_{i,j}}{\Delta r} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{Re} \left\{ \left[ \frac{(rU)_{i+\frac{3}{2},j} - (rU)_{i+\frac{1}{2},j}}{r_{i+1}} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{(rU)_{i+\frac{1}{2},j} - (rU)_{i-\frac{1}{2},j}}{r_i} \right] (\Delta r^2)^{-1} + \right. \\ &+ \frac{U_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2U_{i+\frac{1}{2},j} + U_{i+\frac{1}{2},j-1}}{r_{i+\frac{1}{2}}^2\Delta\phi^2} - \\ &\left. \left. \frac{2(V_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - V_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})}{r_{i+\frac{1}{2}}\Delta\phi} \right\}, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - V_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} &= \\ &= - \frac{(rUV)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (rUV)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{r_i\Delta r} - \\ &- \frac{V_{i,j+1}^2 - V_{i,j}^2}{r_i\Delta\phi} - \left(\frac{UV}{r}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \\ &- \frac{\cos\varphi_{j+\frac{1}{2}}}{Fr} - \frac{P_{i,j+1} - P_{i,j}}{r_i\Delta\phi} + \\ &+ \frac{1}{Re} \left\{ \left[ \frac{(rV)_{i+1,j+\frac{1}{2}} - (rV)_{i,j+\frac{1}{2}}}{r_{i+\frac{1}{2}}} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{(rV)_{i,j+\frac{1}{2}} - (rV)_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{r_{i-\frac{1}{2}}} \right] (\Delta r^2)^{-1} + \right. \\ &+ \frac{V_{i,j+\frac{3}{2}} - 2V_{i,j+\frac{1}{2}} + V_{i,j-\frac{1}{2}}}{r_i^2\Delta\phi^2} + \\ &\left. \left. + \frac{2(U_{i,j+1} - U_{i,j})}{r_i^2\Delta\phi} \right\}; \quad (2) \end{aligned}$$

де  $Re = \omega R^2 / \nu$  – число Рейнольдса;  $Fr = \omega^2 R / g$  – число Фруда;  $R$  – радіус циліндра;  $\omega$  – кутова швидкість циліндра;  $\nu$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості;  $g$  – гравітаційне прискорення;  $\delta t$  – крок по часу;  $n, n+1$  – номер часового циклу (для простоти індекс  $n$  в правих частинах рівнянь опущено). Як характерні параметри приймаються: довжина  $R$ , швидкість –  $\omega R$ , тиск –  $\rho\omega^2 R^2$ , час –  $1/\omega$ .

Кінцево-різницевий аналог рівняння Пуассона для тиску при умові соленоїдальності поля швидкостей в комірни в момент часу  $n+1$  ( $D_{i,j}^{n+1} = 0$ ) приймає вигляд

$$\left[ \frac{r_{i+\frac{1}{2}}(P_{i+1,j} - P_{i,j}) - r_{i-\frac{1}{2}}(P_{i,j} - P_{i-1,j})}{r_i\Delta r^2} + \right.$$



або

$$P_{i,j} = P_{i,j+1} \left[ 1 - \frac{\Delta\varphi}{(\varphi_j + \Delta\varphi - \varphi_s)} \right], \quad (7)$$

де  $r_s$  і  $\varphi_s$  – координати точки перетину вільної границі з радіальними або дуговими відрізками, що сполучають центри комірок (рис. 3).

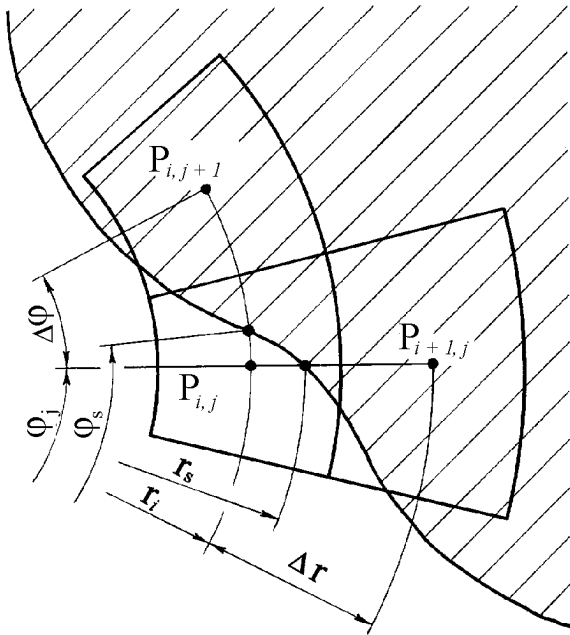


Рис. 3. Інтерполяція тиску в поверхневій комірці

### 3. ПОЧАТКОВІ УМОВИ

Використовувались два варіанти початкових умов.

У першому випадку в початковий момент часу вважалося, що  $\omega_0 = \infty$ , а рідина обертається разом з циліндром як тверде тіло і займає в перерізі кільцеву область з вільною поверхнею радіуса  $R_0$  (рис. 4). Тоді початкові умови для вільної поверхні  $r_s$  і значень полів швидкостей та тиску для області, що зайнята рідиною, у безрозмірній формі мають вигляд:

$$r_s = \frac{R_0}{R}; \quad U_{i,j} \equiv 0; \quad V_{i,j} = r_i; \quad P_{i,j} = \frac{r_i^2 - r_s^2}{2}.$$

У другому випадку вважалося, що  $\omega_0 = 0$ , а рідина перебуває в стані спокою і займає в перерізі сегменту область із стрілкою  $H$  та горизонтальною

вільною поверхнею в нижній частині порожнини (рис. 5). Тоді аналогічні початкові умови мають вигляд:

$$r_s = \frac{H - R}{R \sin \varphi_j}; \quad U_{i,j} \equiv 0;$$

$$V_{i,j} \equiv 0; \quad P_{i,j} = \frac{\frac{H - R}{R} - r_i \sin \varphi_j}{Fr}.$$

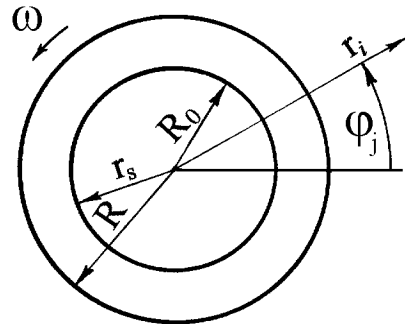


Рис. 4. Нескінченно швидке обертання

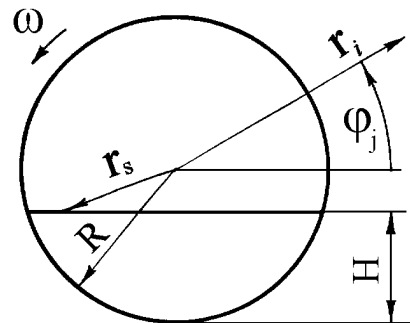


Рис. 5. Стан спокою

### 4. ОРГАНІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ

Обчислювальний процес складався з кроків по часу та циклів. Розрахунковий цикл для одного часового шару містив такі етапи:

1. Розрахунок для поля тиску з виразів (3) – (6) та (9) – (7).

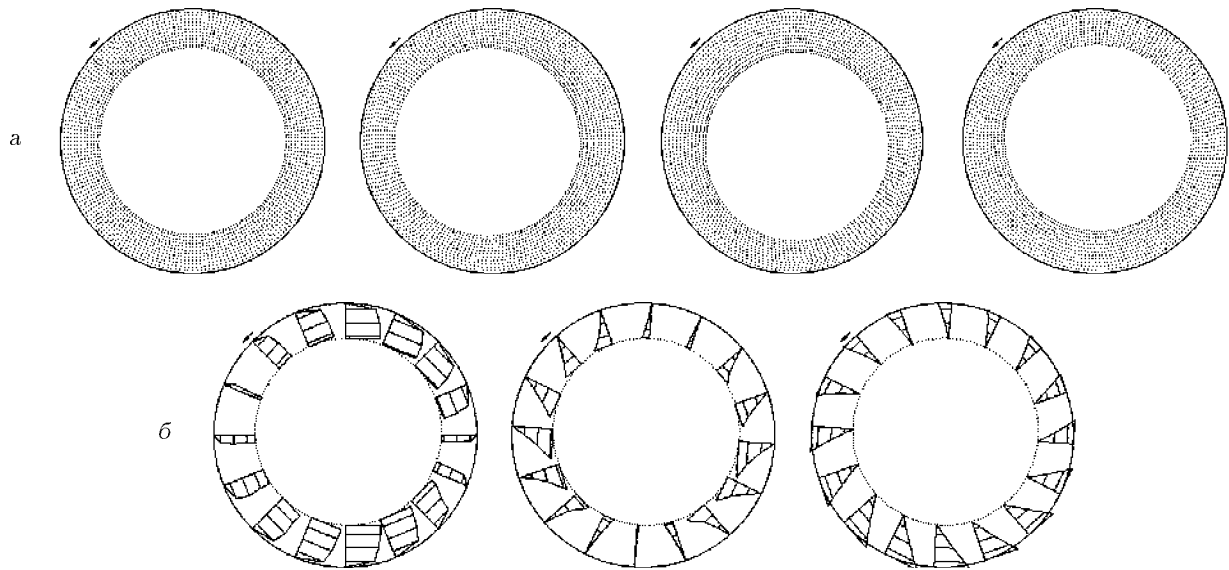


Рис. 6. Розрахунок режиму пристінного шару при  $Re = 133\,000$ ,  $Fr = 4.24$  та  $\kappa = 0.5$ :  
 а – течія для  $t = 0; 10.1; 20.2; 30.3$ ; б – епюри  $V_r, U$  та  $p$  для  $t = 30.3$

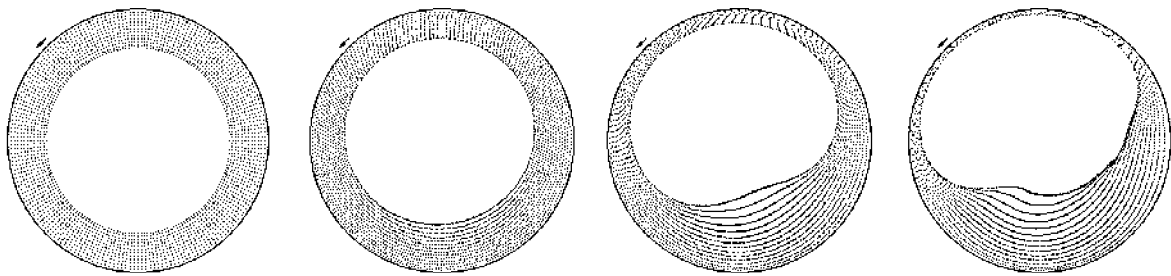


Рис. 7. Розрахунок циркуляційного режиму течії з стану нескінченно швидкого обертання  
 $Re = 133\,000$ ,  $Fr = 4.24$  та  $\kappa = 0.5$  для  $t = 0; 10.1; 20.2$  та  $30.3$

2. Розрахунок поля швидкостей з виразів (1), (2), (7) та (8).

3. Розрахунок нових координат маркерів після переміщення та нового положення вільної поверхні.

4. Уточнення полів швидкостей та тиску поблизу границі.

5. Перехід до нового часового шару та нового розрахункового циклу.

Одержання стійкого чисельного розв'язку забезпечувалось точним визначенням поля тиску, при досягненні наперед заданого критерію збіжності. При реалізації методу більша частина машинного часу витрачалась на цей розрахунок. Рівняння Пуасона для тиску розв'язувалось методом Гауса-Зейделя з послідовною верхньою релаксацією. Оптимальне значення параметра релаксації визначалось експериментально.

Стійкість розрахунку забезпечувалась вибором

кроку по часу з умови обмеження максимального переміщення маркера відповідним розмірам комірки.

## 5. РЕЖИМ ПРИСТІННОГО ШАРУ

Для визначення режиму течії у вигляді пристінного шару використовується перший варіант початкових умов ( $\omega_0 = \infty$ ). На рис. 6 показано послідовні картини такого режиму при ступені заповнення циліндра  $\kappa = 0.5$  для чотирьох моментів часу, а також епюри відповідно відносної тангенціальної  $V_r = V - 1$  і абсолютної радіальної  $U$  швидкості та тиску  $p$  для останньої картини (при співпаданні ординати епюри з напрямом обертання її значення додатне, при неспівпаданні – від'ємне). Величина максимальної ординати епюри  $V_r$  складала 0.0403, епюри  $U$  – 0.0196 та епюри  $p$  – 0.373.

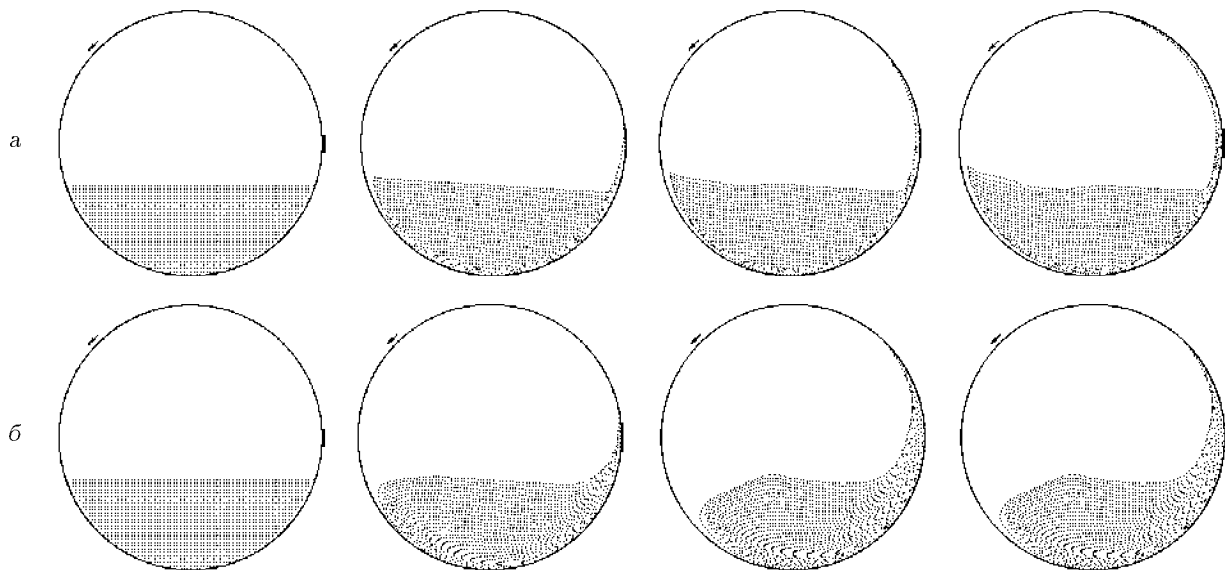


Рис. 8. Розрахунок циркуляційного режиму течії з стану спокою при  $Fr = 3.06$  та  $\kappa = 0.3$  для  $t = 0; 0.57; 1.13$ :  
 а –  $Re = 225\ 000$ ; б –  $Re = 1125$

Невелика деформація вільної поверхні та незначні швидкості відносного руху обумовили досить хорошу збіжність ітераційного обчислювального процесу. Однак при зменшенні швидкості обертання до величини нижньої граничної, при якій відбувається перехід режиму пристінного шару в циркуляційний режим під час сповільнення циліндра [16], збіжність різко знижувалась.

## 6. ЦИРКУЛЯЦІЙНИЙ РЕЖИМ

Складний характер циркуляційної течії обумовлював необхідність підвищеної точності визначення компонентів швидкості та тиску на вільній границі для забезпечення стійкості розрахункової схеми [17].

Для моделювання такого режиму також може бути використаний перший варіант початкових умов ( $\omega_0 = \infty$ ), вважаючи обертання циліндра повільним порівняно з швидким відносним рухом рідини. На рис. 7 показано картини розвитку режиму при цих умовах для параметрів течії, що відповідають рис. 6. Однак такі початкові умови забезпечують стійкість розв'язку тільки при існуванні вихідного режиму пристінного шару при швидкості обертання не менше нижньої граничної. Крім того, незважаючи на відносну простоту, ці умови вносять специфічні спотворення положення вільної поверхні.

Для більш точного визначення режиму використовувася другий варіант початкових умов ( $\omega_0 = 0$ ). На рис. 8 показано, для порівняння, кар-

тини розвитку циркуляційного режиму з використанням таких умов при великих та малих числах Рейнольдса відповідно.

Використання другого варіанта початкових умов, порівняно з першим, підвищує точність визначення положення вільної поверхні. Розширюється, також, швидкісний діапазон розв'язку, оскільки збіжність обчислювального процесу істотно знижується лише при збільшенні швидкості обертання до величини верхньої граничної, при якій відбувається перехід циркуляційного режиму в режим пристінного шару під час прискорення циліндра [16].

## 7. ПІДСУМКОВІ ЗАУВАЖЕННЯ

Для чисельного визначення двовимірного неусталеного руху рідини, що частково заповнює горизонтальний обертовий циліндр, може бути використаний метод "маркерів і комірок" в полярних координатах, які найближче відповідають геометрії течії та границь. Характерною особливістю задачі, що розглядається, є складна геометрія, велика деформація вільної поверхні та рухомість твердої стінки. При швидкому обертанні циліндра виникає режим течії у вигляді малорухливого квазікільцевого пристінного шару, а при повільному обертанні - циркуляційний режим із значним відносним рухом та деформацією вільної поверхні. Для визначення першого режиму використовуються початкові умови, що відповідають

нескінченно швидкому обертанню, для визначення другого доцільно використати умови, що відповідають стану спокою. Складний характер течії обумовлює необхідність точного визначення компонентів швидкості та тиску на вільній границі, особливо для циркуляційного режиму. При розв'язанні обох задач визначення режимів течії було проведено контрольні розрахунки, які показали хорошу апроксимаційну збіжність та алгоритмічну універсальність методу.

1. *Deiber J. A., Cerro R.L.* Viscous flow with a free surface inside a horizontal rotating drum. 1. Hydrodynamics // *Ind. and Engng. Chem., Fundam.*– 1976.– **15**, N 2.– P. 102-110.
2. *Ruschak K. J., Scriven L. E.* Rimming flow of liquid in a rotating horizontal cylinder // *J. Fluid Mech.*– 1976.– **76**, N 1.– P. 113-125.
3. *Orr F. M., Scriven L.E.* Rimming flow: numerical simulation of steady, viscons, free-surface flow with surface tension // *J. Fluid Mech.*– 1978.– **84**, N 1.– P. 145-165.
4. *Gans R. F.* On steady flow in a partially filled rotating cylinder // *J. Fluid Mech.*– 1977.– **82**, N 3.– P. 415-427.
5. *Gans R. F.* On the flow around a buoyant cylinder withing a rapidly rotating horizontal cylindrical container // *J. Fluid Mech.*– 1979.– **93**, N 3.– P. 529-548.
6. *Gavish J., Chadwick R.S., Gutfinger C.* Viscous flow in a partially filled rotating horizontal cylinder // *Isr. J. Technol.*– 1978.– **16**, N 5-6.– P. 264-272.
7. *Suzyki Y., Tanida Y.* Behavior of liquid partially – filled in a horizontal rotating cylinder//*Proc. 3rd Asian Symp. Visual.*- Tokyo, 1994. P. 230-235.
8. *Jackson K. A., Finck J.E., Bednarski C.R., Clifford L.R.* Viscous and nonviscous models of the partially filled rolling can // *Amer. J.Phys.*– 1996.– **64**, N 3.– P. 277-282.
9. *Haji Sheikh A., Lakshimanarayanan R., Lou D.Y.S., Ryan P.J.* Confined flow in a partially filled rotating horizontal cylinder // *Trans. ASME. J.Fluids Engeg.*– 1984.– **106**, N 3.– P. 270-278.
10. *Трусов С. А., Лапицкий В. И., Вачевских В. В., Филимонова Л.К.* Моделирование течения в горизонтальном вращающемся цилиндре // *Реология, процессы и аппараты хим. технологии.* – Волгоград, 1989. с. – 71-77.
11. *Якутенок В.А.* Численное моделирование медленных течений вязкой жидкости со свободной поверхностью методом граничных элементов // *Мат. моделирование.*– 1992.– **4**, N 10.– С. 62-70.
12. *Harlow F. H., Welch J. E.* Numerical calculation of time dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // *Phys. Fluids.*– 1965.– **8**, N12.– P. 2182– 2189.
13. *Harlow F. H., Shannon J.P.* Distartion of a splashing liquid drop // *Science.*– 1967.– **157**, N 3788.– P. 547- 550.
14. *Daly B. J.* Numerical study of the effect of surface tension on interfac instability // *Phys. Fluids.*– 1996.– **12**, N 7.– P. 1340–354.
15. *Науменко Ю.В.* Применение численного метода "маркеров и ячеек" в полярной системе координат // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.*– 1999.– **39**, N 2.– С. 294 - 299.
16. *Науменко Ю. В.* Скоростные режимы движения вязкой жидкости в горизонтальном вращающемся цилиндре // *Инженерно физ. журн.*– 1993.– **64**, N 5.– С. 558 - 565.
17. *Nichols B. D., Hirt C. W.* Improved free surface boundary conditions for numerical incompressible flow calculations // *J. Comput. Phys.*– 1971.– **8**, N 3.– P. 434 - 448.