УДК 621. 34-52

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ ВО ВРЕМЕНИ СИСТЕМЫ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.Г. ФИЛАТОВ

Предложена процедура синтеза регулятора состояния для дискретной во времени системы управления, основанная на теории модального управления и обеспечивающая произвольную степень устойчивости замкнутой системы в пространстве переменных состояния и их средних интегральных значений. Полученные результаты проиллюстрированы примером.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассмотрен метод синтеза достаточно простого в реализации модального регулятора состояния в дискретной во времени системе управления электрическими нагрузками электроэнергетических систем, обеспечивающий произвольную степень устойчивости системы в пространстве переменных состояния и их средних интегральных значений. Однако этот метод применим только для квазидинамических дискретных систем, характеризуемых единичной матрицей состояния. Ниже изложено развитие этого метода для дискретной во времени системы модального управления с произвольной матрицей состояния.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дискретную во времени систему управления, представленную следующими уравнениями состояния:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \qquad (1)$$

где $x(k)$ — n-мерный вектор состояния в момент времени t_k; $x(k+1)$ — n-мерный вектор состояния в момент времени t_{k+1}; $u(k)$ — n-мерный вектор управления в момент времени t_k; A и B — $n \times n$-матрица состояния и матрица управления соответственно с постоянными действительными элементами. Предположим, что пара матриц A, B является полностью управляемой, а все собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ матрицы A — различны. Будем также полагать, что элементы вектора состояния x являются кусочно-постоянными величинами на интервалах времени $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ и представлены их непосредственными измерениями или их оценками.

Как известно [2–4], в системе (1) при формировании управляющих сигналов с помощью обратной связи (ОС) по состоянию (регулятора состояния)

$$u(k) = Kx(k), \qquad (2)$$

где K — матрица коэффициентов ОС размерностью $n \times n$, собственные числа матрицы $(A + BK)$ замкнутой системы могут быть выбраны произвольным образом, если пара A, B полностью управляема. Соответствующим выбором собственных чисел замкнутой системы можно обеспечить желаемый характер свободного движения переменных состояния. Для уменьшения установившейся ошибки системы и противодействия неконтролируемым возмущениям в законы управления вводят интегральную составляющую. Однако введение интегральной составляющей, реализация которой в дискретных системах может быть достигнута различными способами, приводит к снижению степени устойчивости системы и усложняет устройство управления [4].

В данной работе интегральная составляющая формируется на основе средних интегральных значений переменных состояния объекта на текущий момент времени k с начала некоторого периода контроля $\Delta T_k >> \Delta t_k$. Это позволяет непосредственно включить в контур модального управления не только переменные состояния процесса, но и их средние интегральные значения на текущий момент времени. В итоге возникает возможность задания произвольного спектра замкнутой системы управления.

Под средним интегральным значением i-й переменной состояния на каждом k-м шаге управления будем понимать величину, определяемую следующим уравнением:

$$\delta_i(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_i(j), \quad i = 1, \ldots n, \tag{3}$$

где k — количество интервалов (шагов) управления $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, ($k = 1, 2, 3, \ldots$) с начала некоторого периода контроля ΔT_k на текущий момент времени t_k. В дальнейшем величину (3) будем именовать средней интегральной ошибкой управления. Совокупность величин (3) образует вектор $\Omega(k) = [\delta_1(k), \delta_2(k), \delta_3(k), \ldots, \delta_n(k)]^T$.

Закон управления с пропорциональной и интегральной составляющими в цепи обратной связи (дискретный регулятор состояния с ПИ-законом управления) можно сформировать в следующем виде:

$$u(k) = K_1 x(k) + K_2 \Omega(k), \tag{4}$$

где K_1 и K_2 — $n \times n$-матрицы коэффициентов усиления пропорциональной и интегральной обратных связей соответственно.

Затем можно определить нашу задачу, как задачу определения способа вычисления матриц K_1 и K_2 коэффициентов усиления обратных связей таким образом, чтобы собственные числа системы (1), замкнутой обратной связью (4), имели желаемые наперед заданные значения.

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА СОСТОЯНИЯ

Преобразуем систему (1) к каноническому диагональному виду. Пусть P — невырожденная матрица собственных векторов матрицы A, преобразующая вектор состояния $x(k)$ в вектор $y(k)$, т.е.

$$x(k) = Py(k)\,, \tag{5}$$

$$y(k) = P^{-1}x(k)\,. \tag{6}$$

Сделав замену переменных в (1) с помощью (5), получим

$$Py(k+1) = APy(k) + Bu(k)\,. \tag{7}$$

Умножая (7) слева на P^{-1}, получаем

$$y(k+1) = P^{-1}APy(k) + P^{-1}Bu(k). \tag{8}$$

Напомним теперь определение собственных чисел и собственных векторов. Если Λ — диагональная $n \times n$ матрица собственных чисел квадратной $n \times n$ матрицы A:

$$\Lambda = \mathrm{diag}\,\{\lambda_i,\ i = 1,\ldots,n\}, \tag{9}$$

то справедливо следующее соотношение:

$$P\Lambda = AP\,. \tag{10}$$

Умножая (10) слева на P^{-1} получим:

$$\Lambda = P^{-1}AP\,. \tag{11}$$

С учетом (11) уравнение (8) примет следующий канонический диагональный вид:

$$y(k+1) = \Lambda y(k) + Gu(k)\,, \tag{12}$$

где

$$G = P^{-1}B\ \ (n \times n\,). \tag{13}$$

Аналогично запишем уравнение (3) для переменных $y(k)$ линейно преобразованного вектора $x(k)$, т.е. средняя интегральная ошибка управления для переменных $y_i(k)$, $i = 1,\ldots,n$ будет иметь вид:

$$\theta_i(k) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} y_i(j),\ \ i = 1,\ldots,n. \tag{14}$$

Величины $\theta_i(k)$, $i = 1,\ldots,n$ будут линейной комбинацией наблюдаемых по предположению переменных состояния $x_i(k)$, $i = 1,\ldots,n$.

Рассмотрим динамическое уравнение, определяющее среднюю интегральную ошибку $\theta_i(k+1)$ на $(k+1)$-м шаге в зависимости от номера шага управления и от величины ошибки $\theta_i(k)$ на k-м шаге или величины ошибки $\theta_i(k-1)$ на $(k-1)$-м шаге:

$$\theta_i(k+1) = \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{k+1} y_i(j) = \frac{1}{k+1}y_i(k+1) + \frac{k}{k+1}\theta_i(k) =$$

$$= \frac{1}{k+1}y_i(k+1) + \frac{1}{k+1}y_i(k) + \frac{k-1}{k+1}\theta_i(k-1),\quad i = 1,\ldots,n\,. \tag{15}$$

Необходимым требованием к системе управления (1) или (12) является требование асимптотической устойчивости. Этому требованию эквивалентно условие:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = 0\,. \tag{16}$$

Воспользуемся условием (16) и будем считать, что система управления функционирует таким образом, чтобы обеспечить отклонение состояния на $(k+1)$-м шаге управления равным нулю, т.е. примем $y_i(k+1)=0$, $i=1,\dots,n$. Тогда уравнение (15) примет следующий вид:

$$\theta_i(k+1) = \frac{1}{k+1} y_i(k) + \frac{k-1}{k+1}\theta_i(k-1),\ \ i=1,\dots,n\,. \tag{17}$$

Запишем уравнение (17) в матричном виде:

$$\Theta(k+1) = Dy(k) + F\Theta(k)\,, \tag{18}$$

где $\Theta(k+1)$ и $\Theta(k-1)$ вектора-столбцы вида:

$$\Theta(k+1) = \left[\theta_1(k+1),\ \theta_2(k+1),\dots,\theta_n(k+1)\right]^T, \tag{19}$$

$$\Theta(k-1) = \left[\theta_1(k-1),\ \theta_2(k-1),\dots,\theta_n(k-1)\right]^T. \tag{20}$$

D и F — $n\times n$ диагональные матрицы:

$$D = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \dfrac{1}{k+1}\end{bmatrix},\ \ F = \begin{bmatrix} \dfrac{k-1}{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \dfrac{k-1}{k+1}\end{bmatrix}. \tag{21}$$

Сформируем расширенный вектор состояния системы управления в следующем виде:

$$z(k+1) = \begin{bmatrix} y(k+1) \\ \Theta(k+1)\end{bmatrix},\ \ z(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ \Theta(k-1)\end{bmatrix}. \tag{22}$$

Таким образом, расширенный вектор состояния (22) включает в себя линейно-преобразованные вектора переменных состояния $y(k)$ и средних интегральных ошибок управления $\Theta(k-1)$.

Далее, объединив уравнения (12) и (18), получим расширенное уравнение состояния системы управления:

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ \Theta(k+1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ D & F\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(k) \\ \Theta(k-1)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0\end{bmatrix} u(k) \tag{23}$$

или

$$z(k+1) = \hat{A}z(k) + \hat{B}u(k)\,, \tag{24}$$

где

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ D & F\end{bmatrix}, \tag{25}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} G \\ 0\end{bmatrix}. \tag{26}$$

Вектор управляющих сигналов $u(k)$ будем искать в виде следующей обратной связи по расширенному вектору состояния $z(k)$, т.е.

$$u(k) = B^{-1}P\left[C_1;\ C_2\right]\begin{bmatrix} y(k) \\ \Theta(k-1) \end{bmatrix}, \tag{27}$$

где C_1 и C_2 — $n \times n$-матрицы коэффициентов усиления соответственно пропорциональной ОС по состоянию и ОС по средней интегральной ошибке управления. Множитель $B^{-1}P$ введен для компенсации взаимодействий между управляющими сигналами.

Подставив уравнение (27) в уравнение (23) и учитывая уравнение (13), получим расширенное уравнение замкнутой системы управления:

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ \Theta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ D & F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(k) \\ \Theta(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P^{-1}B \\ 0 \end{bmatrix} B^{-1}P\left[C_1; C_2\right]\begin{bmatrix} y(k) \\ \Theta(k-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Lambda + C_1 & C_2 \\ D & F \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(k) \\ \Theta(k-1) \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Окончательно задача синтеза регулятора состояния формулируется следующим образом: найти такие ($n \times n$)-матрицы коэффициентов усиления ОС C_1 и C_2, чтобы при управлении (27) корни характеристического уравнения расширенной замкнутой системы (28) размещались в наперед заданных точках комплексной плоскости. Это позволит обеспечить асимптотическую устойчивость (сходимость) системы (28). Кроме того, матрицы C_1 и C_2 будем искать в виде диагональных ($n \times n$)-матриц, что значительно упрощает реализацию управляющего устройства, т.е.

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{1n} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} C_{21} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{2n} \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Асимптотическая устойчивость замкнутой дискретной системы (28) будет обеспечена, если собственные числа ее матрицы состояния

$$H = \begin{bmatrix} \Lambda + C_1 & C_2 \\ D & F \end{bmatrix} \tag{30}$$

будут лежать внутри единичного круга комплексной плоскости.

Для нахождения собственных чисел рассмотрим характеристическое уравнение системы (28):

$$\det\left(\begin{bmatrix} \Lambda + C_1 & C_2 \\ D & F \end{bmatrix} - \hat{\Lambda}\right) = \det\left[H - \hat{\Lambda}\right] = 0, \tag{31}$$

где $\hat{\Lambda}$ — диагональная ($2n \times 2n$)-матрица:

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Произведем $2(n-1)$ перестановок строк и столбцов в матрице $[H-\hat{\Lambda}]$ размерности $2n \times 2n$ так, чтобы в результате получить следующую блок-диагональную матрицу:

$$\left[H-\hat{\Lambda}\right]=\underset{i=1,\ldots,n}{\text{blokdiag}}\begin{bmatrix} \lambda_1 + C_{1i} - \lambda & C_{2i} \\ \dfrac{1}{k+1} & \dfrac{k-1}{k+1} - \lambda \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Так как четное число перестановок строк и столбцов матрицы не изменяет её определителя, то характеристическое уравнение (31) можно записать так:

$$\det\left[H-\hat{\Lambda}\right]=\prod_{i=1}^{n}\det\begin{bmatrix} \lambda_1 + C_{1i} - \lambda & C_{2i} \\ \dfrac{1}{k+1} & \dfrac{k-1}{k+1} - \lambda \end{bmatrix}=$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda^2-\left(\frac{\lambda_i k+\lambda_i+C_{1i}k+C_{1i}+k-1}{k+1}\right)\lambda+\frac{(\lambda_i+C_{1i})(k-1)-C_{2i}}{k+1}\right)=0\,. \tag{34}$$

Из (34) следует, что для нахождения коэффициентов усиления C_{1i} и C_{2i} ($i=1,\ldots,n$) матриц обратных связей C_1 и C_2 достаточно определить способ нахождения коэффициентов C_{1i} и C_{2i} одного из сомножителей, который представляет собой полином второго порядка:

$$\lambda^2-\left(\frac{\lambda_i k+\lambda_i+C_{1i}k+C_{1i}+k-1}{k+1}\right)\lambda+\frac{(\lambda_i k-\lambda_i+C_{1i}k-C_{1i}-C_{2i})}{k+1}=0\,. \tag{35}$$

$$i=1,\ldots,n\,.$$

Коэффициенты C_{1i} и C_{2i} определим так, чтобы корни характеристического уравнения замкнутой системы, т.е. корни всех полиномов второго порядка (35), имели наперед заданные значения $\tilde{\lambda}_{1i}$, $\tilde{\lambda}_{2i}$, $i=1,\ldots,n$. Пусть желаемый *i-й* характеристический полином второго порядка равен $\lambda^2+\alpha_{1i}\lambda+\alpha_{2i}=0$. Коэффициенты α_{1i}, α_{2i} этого полинома можно определить по заданным значениям корней $\tilde{\lambda}_{1i}$, $\tilde{\lambda}_{2i}$ с помощью формул Виета, или же путем раскрытия скобок в произведении $\left(\lambda-\tilde{\lambda}_{1i}\right)\left(\lambda-\tilde{\lambda}_{2i}\right)$, т.е.

$$\left(\lambda-\tilde{\lambda}_{1i}\right)\left(\lambda-\tilde{\lambda}_{2i}\right)=\lambda^2-\left(\tilde{\lambda}_{1i}+\tilde{\lambda}_{2i}\right)\lambda+\tilde{\lambda}_{1i}\tilde{\lambda}_{2i}=0\,,\ i=1,\ldots,n\,. \tag{36}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях полиномов (35) и (36) для *i*-го полинома второго порядка, получим:

$$\tilde{\lambda}_{1i}+\tilde{\lambda}_{2i}=\frac{\lambda_i k+\lambda_i+C_{1i}k+C_{1i}+k-1}{k+1}\,, \tag{37}$$

$$\tilde{\lambda}_{1i}\tilde{\lambda}_{2i}=\frac{\lambda_i k-\lambda_i+C_{1i}k-C_{1i}-C_{2i}}{k+1}\,. \tag{38}$$

Теперь из уравнений (37) и (38) можно выразить неизвестные коэффициенты C_{1i} и C_{2i} обратных связей через остальные известные величины:

$$C_{1i} = \tilde{\lambda}_{1i} + \tilde{\lambda}_{2i} - \lambda_i - \frac{k-1}{k+1}, \tag{39}$$

$$C_{2i} = \left(\tilde{\lambda}_{1i} + \tilde{\lambda}_{2i} - \frac{k-1}{k+1} \right)(k-1) - \tilde{\lambda}_{1i}\tilde{\lambda}_{2i}(k+1), \ \ i = 1,\dots,n. \tag{40}$$

Таким образом, найденные уравнения (39) и (40) позволяют вычислить коэффициенты усиления C_{1i} и C_{2i} ($i = 1,\dots,n$) регулятора состояния (27) по заданным желаемым собственным числам $\tilde{\lambda}_{1i}$ и $\tilde{\lambda}_{2i}$ ($i = 1,\dots,n$) замкнутой системы (28). Очевидно, что коэффициенты C_{1i} и C_{2i} ($i = 1,\dots,n$) являются переменными во времени коэффициентами, т. к. зависят от номера шага управления k. Смысл этого состоит в том, что коэффициенты C_{1i} и C_{2i} формируют динамическую обратную связь системы управления.

Задав желаемые корни характеристического уравнения дискретной системы в начале координат комплексной плоскости, т.е. задав $\tilde{\lambda}_{1i} = \tilde{\lambda}_{2i} = 0$, $i = 1,\dots,n$, получим из (39) и (40) коэффициенты обратных связей, обеспечивающие максимальную степень устойчивости дискретной системы (23), т.е.

$$C_{1i} = -\left(\lambda_i + \frac{k-1}{k+1} \right), \ i = 1,\dots,n, \tag{41}$$

$$C_{2i} = -\frac{(k-1)^2}{k+1}, \ i = 1,\dots,n. \tag{42}$$

В этом случае матрицы обратных связей C_1 и C_2 уравнения регулятора состояния (27) будут иметь следующий вид:

$$C_1 = \begin{bmatrix} -\left(\lambda_i + \frac{k-1}{k+1} \right) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\left(\lambda_n + \frac{k-1}{k+1} \right) \end{bmatrix}, \tag{43}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -\frac{(k-1)^2}{k+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\frac{(k-1)^2}{k+1} \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Очевидно, что использование регулятора состояния в виде (27) приводит к разложению замкнутой системы (28) на независимые матричные подсистемы второго порядка:

$$\begin{bmatrix} y_i(k+1) \\ \theta_i(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i + C_{1i} & C_{2i} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{k-1}{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i(k) \\ \theta_i(k-1) \end{bmatrix}, \ \ i = 1,\dots,n. \tag{45}$$

Изменяя коэффициенты C_{1i} и C_{2i} согласно уравнениям (39) и (40), можно как угодно менять собственные числа каждой замкнутой подсистемы (45) независимо друг от друга, т.е. изменение коэффициентов C_{1i} и C_{2i} будет влиять только на *i*-ю переменную y_i и соответствующую ей среднюю интегральную ошибку θ_i.

Возвращаясь в уравнении (28) к исходным переменным состояния, получим следующее уравнение состояния замкнутой системы:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ \Omega(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(\Lambda + C_1)P^{-1} & PC_2P^{-1} \\ PDP^{-1} & PFP^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \Omega(k-1) \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Аналогично получим и уравнение регулятора состояния (27) для исходных переменных:

$$u(k) = B^{-1}P\left[C_1; C_2\right]P^{-1} \begin{bmatrix} x(k) \\ \Theta(k-1) \end{bmatrix} =$$

$$= B^{-1}\left[PC_1P^{-1}x(k) + PC_2P^{-1}\Theta(k-1)\right] = K_1x(k) + K_2\Theta(k-1), \quad (47)$$

где

$$K_1 = B^{-1}PC_1P^{-1},$$

$$K_2 = B^{-1}PC_2P^{-1}.$$

Матрица состояния замкнутой системы (28)

$$A_y = \begin{bmatrix} \Lambda - C_1 & C_2 \\ D & F \end{bmatrix} \quad (48)$$

полностью определяется характеристическим полиномом, который остается неизменным при эквивалентных преобразованиях. Поэтому матрица состояния системы (46)

$$A_x = \begin{bmatrix} P(\Lambda + C_1)P^{-1} & PC_2P^{-1} \\ PDP^{-1} & PFP^{-1} \end{bmatrix} \quad (49)$$

будет иметь такой же характеристический полином, что и матрица (48). Отсюда следует, что изменяя коэффициенты усиления C_{1i} и C_{2i} в матрицах C_1 и C_2 можно как угодно менять и собственные числа замкнутой системы (46) с первоначальными переменными состояния $\bar{x}$ и их средними интегральными ошибками Ω.

Следует отметить, что совокупность всех собственных векторов, отвечающих заданному собственному числу, образует линейное подпространство в пространстве всех числовых векторов размерности n. Однако, в рассматриваемом случае, когда все собственные числа системы (1) предполагаются различными, каждое из этих подпространств одномерное, т.е. для каждого собственного числа соответствующий собственный вектор определен с точностью до числового множителя [5]. Эта одномерность вытекает из того, что ненулевые собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, обязательно линейно независимы, а в n-мерном пространстве числовых векторов не может быть более n линейно независимых векторов. Поэтому, каноническое преобразование $P^{-1}AP = \Lambda$ в данном случае не зависит от численных значений элементов матрицы собственных векторов P и является однозначным. Отсюда следует, что результат предлагаемого способа вычисления матриц обратной связи K_1 и K_2, при вычислении которых используется умножение на прямую и обратную матрицу собственных векторов

P, также является однозначным и независящим от численных значений матрицы P.

Следует также отметить, что если размерность вектора управления m меньше размерности вектора состояния n (матрица управления B имеет размерность $n \times m$), то изложенный метод модального управления может быть применен к первым m собственным числам матрицы A, а значит управляемыми будут только первые m переменных состояния.

Блок-схема системы управления вида (46) с регулятором состояния вида (47) приведена на рис. 1. На схеме выделены те вычисления, которые можно провести вне контура управления (в режиме off-line). Начальная установка индекса дискреты времени $k=1$, используемая в блок-схеме системы управления (рис. 1), может осуществляться по условию

$$\|x(k)\| \le \delta_{\text{доп}1}, \quad \|\Omega(k)\| \le \delta_{\text{доп}2}, \tag{50}$$

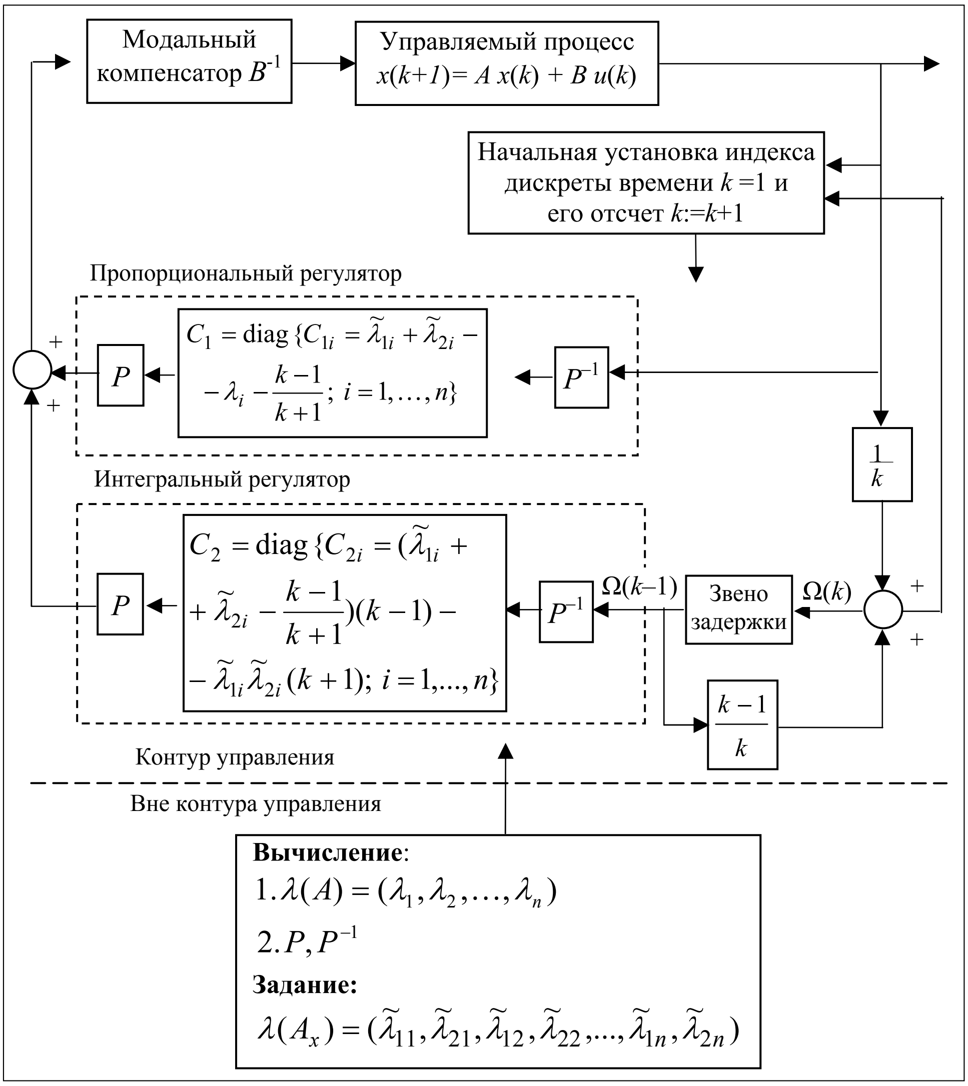

Рис. 1. Блок-схема модальной дискретной во времени системы управления

где $\delta_{\text{доп}1}$, $\delta_{\text{доп}2}$ — заданные допустимые значения нормы векторов состояния и средних интегральных ошибок состояния.

Пример. Для иллюстрации изложенного метода рассмотрим дискретную систему

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)\text{, где } A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}233 \\ -0{,}466 & -0{,}097 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пара матриц $[A; B]$ является управляемой. Задача состоит в определении матриц K_1 и K_2 таких, чтобы при наличии обратной связи вида $u(k) = K_1x(k) + K_2\Omega(k-1)$, собственные значения замкнутой системы располагались в точках $\tilde{\lambda}_{11} = \tilde{\lambda}_{12} = \tilde{\lambda}_{21} = \tilde{\lambda}_{22} = 0$.

Так как матрицы K_1 и K_2 согласно (43), (44) и (47) являются функциями шага управления *k*. Рассмотрим вычисление этих матриц на нескольких последовательных шагах управления, начиная с $k = 1$ при $x(1) = [1; 1]^T$ и $\Omega(0) = [0; 0]^T$, т.е. рассмотрим вычисление переходной функции замкнутой системы управления. Одновременно на каждом шаге покажем вычисление переменных $u(k)$, $x(k)$ и $\Omega(k)$.

Собственные числа матрицы состояния A равны $\lambda_1 = 0{,}138$ и $\lambda_2 = 0{,}365$. Соответствующая матрица собственных векторов

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ и } P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

При этом значения собственных чисел и собственных векторов округлены, что дает несущественную погрешность (около $1{-}3\%$) в приведенных ниже вычислениях.

Найдем выражения для матриц обратной связи K_1 и K_2, воспользовавшись формулой (47):

$$K_1 = B^{-1}PC_1P^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}138 - \left(\dfrac{k-1}{k+1}\right) & 0 \\ 0 & -0{,}365 - \left(\dfrac{k-1}{k+1}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\cong \begin{bmatrix} -0{,}592 - \left(\dfrac{k-1}{k+1}\right) & -0{,}227 \\ 0{,}454 & 0{,}089 - \left(\dfrac{k-1}{k+1}\right) \end{bmatrix};$$

$$K_2 = B^{-1}PC_2P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dfrac{(k-1)^2}{k+1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{(k-1)^2}{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\dfrac{(k-1)^2}{k+1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{(k-1)^2}{k+1} \end{bmatrix}.$$

Тогда управляющий сигнал можно вычислить по формуле (47):

$$u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + K_2 \begin{bmatrix} \delta_1(k-1) \\ \delta_2(k-1) \end{bmatrix}.$$

Вектор состояния согласно формуле (46) можно вычислить так:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}233 \\ -0{,}466 & -0{,}097 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}.$$

Средние интегральные ошибки управления, составляющие вектор $\Omega(k) = [\delta_1(k), \delta_2(k)]^T$ вычисляются по формуле (3).

Матрица состояния замкнутой системы согласно формуле (49) имеет вид:

$$A_x = \begin{bmatrix} P(\Lambda + C_1)P^{-1} & PC_2P^{-1} \\ PDP^{-1} & PFP^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\left(\dfrac{k-1}{k+1}\right) & 0 & -\dfrac{(k-1)^2}{k+1} & 0 \\ 0 & -\left(\dfrac{k-1}{k+1}\right) & 0 & -\dfrac{(k-1)^2}{k+1} \\ \dfrac{1}{k+1} & 0 & \dfrac{k-1}{k+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{k+1} & 0 & \dfrac{k-1}{k+1} \end{bmatrix}.$$

Последовательные во времени вычисления:

$k = 1$

$$K_1(1) = \begin{bmatrix} -0{,}592 & -0{,}227 \\ 0{,}454 & 0{,}089 \end{bmatrix}, \quad K_2(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$u(1) = \begin{bmatrix} -0{,}819 \\ 0{,}543 \end{bmatrix}, \quad x(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Omega(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_x(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda(A_x) \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$k = 2$

$$K_1(2) = \begin{bmatrix} -0{,}925 & -0{,}227 \\ 0{,}454 & -0{,}244 \end{bmatrix}, \quad K_2(2) = \begin{bmatrix} -0{,}333 & 0 \\ 0 & -0{,}333 \end{bmatrix},$$

$$u(2)=\begin{bmatrix}-0{,}34\\-0{,}322\end{bmatrix},\quad x(2)=\begin{bmatrix}0{,}014\\-0{,}02\end{bmatrix},\quad \Omega(2)=\begin{bmatrix}0{,}507\\0{,}49\end{bmatrix},$$

$$A_x^{(2)}=\begin{bmatrix}-0{,}333 & 0 & -0{,}333 & 0\\ 0 & -0{,}333 & 0 & -0{,}333\\ 0{,}333 & 0 & 0{,}333 & 0\\ 0 & 0{,}333 & 0 & 0{,}333\end{bmatrix},\ \lambda(A_x)\cong\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

$k=3$

$$K_1(3)=\begin{bmatrix}-1{,}092 & -0{,}227\\ 0{,}454 & -0{,}411\end{bmatrix},\ K_2(3)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},$$

$$u(3)=\begin{bmatrix}-0{,}005\\-0{,}508\end{bmatrix},\quad x(3)=\begin{bmatrix}-0{,}336\\-0{,}327\end{bmatrix},\quad \Omega(3)=\begin{bmatrix}0{,}226\\0{,}218\end{bmatrix},$$

$$A_x(3)=\begin{bmatrix}-0{,}5 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -0{,}5 & 0 & -1\\ 0{,}25 & 0 & 0{,}5 & 0\\ 0 & 0{,}25 & 0 & 0{,}5\end{bmatrix},\ \lambda(A_x)\cong\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

$k=4$

$$K_1(4)=\begin{bmatrix}-1{,}192 & -0{,}227\\ 0{,}454 & -0{,}511\end{bmatrix},\ K_2(4)=\begin{bmatrix}-1{,}8 & 0\\ 0 & -1{,}8\end{bmatrix},$$

$$u(4)=\begin{bmatrix}0{,}073\\-0{,}378\end{bmatrix},\quad x(4)=\begin{bmatrix}-0{,}328\\-0{,}32\end{bmatrix},\quad \Omega(4)=\begin{bmatrix}0{,}087\\0{,}083\end{bmatrix},$$

$$A_x(4)=\begin{bmatrix}-0{,}6 & 0 & -1{,}8 & 0\\ 0 & -0{,}6 & 0 & -1{,}8\\ 0{,}2 & 0 & 0{,}6 & 0\\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0.6\end{bmatrix},\ \lambda(A_x)\cong\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

$k=5$

$$K_1(5)=\begin{bmatrix}-1{,}259 & -0{,}227\\ 0{,}454 & -0{,}578\end{bmatrix},\ K_2(5)=\begin{bmatrix}-2{,}667 & 0\\ 0 & -2{,}667\end{bmatrix},$$

$$u(5)=\begin{bmatrix}0{,}071\\-0{,}199\end{bmatrix},\quad x(5)=\begin{bmatrix}-0{,}198\\-0{,}194\end{bmatrix},\quad \Omega(5)=\begin{bmatrix}0{,}03\\0{,}028\end{bmatrix},$$

$$A_x(5)=\begin{bmatrix}-0{,}667 & 0 & -2{,}667 & 0\\ 0 & -0{,}667 & 0 & -2{,}667\\ 0{,}167 & 0 & 0{,}667 & 0\\ 0 & 0{,}167 & 0 & 0{,}667\end{bmatrix},\ \lambda(A_x)\cong\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

$k = 6$

$$K_1(6)=\begin{bmatrix}-1{,}306 & -0{,}227\\ 0{,}454 & -0{,}625\end{bmatrix},\quad K_2(6)=\begin{bmatrix}-3{,}571 & 0\\ 0 & -3{,}571\end{bmatrix},$$

$$u(6)=\begin{bmatrix}0{,}034\\ -0{,}087\end{bmatrix},\quad x(6)=\begin{bmatrix}-0{,}093\\ -0{,}088\end{bmatrix},\quad \Omega(6)=\begin{bmatrix}0{,}01\\ 0{,}009\end{bmatrix},$$

$$A_x(6)=\begin{bmatrix}-0{,}714 & 0 & -3{,}571 & 0\\ 0 & -0{,}714 & 0 & -3{,}571\\ 0{,}143 & 0 & 0{,}714 & 0\\ 0 & 0{,}143 & 0 & 0{,}714\end{bmatrix},\quad \lambda(A_x)\cong\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

На основании полученных в примере результатов для шести расчетных шагов управления, построены соответствующие графики переходных процессов по каждому из двух каналов управления. На рис. 2 приведены переходные дискретные функции системы для переменных состояния x_1 и x_2. На рис. 3 приведены дискретные процессы изменения управляющих сигналов u_1 и u_2. На рис. 4 приведены дискретные графики изменения средних интегральных ошибок управления δ_1 и δ_2. Анализ полученных в примере результатов показывает, что замкнутая модальная система управления под

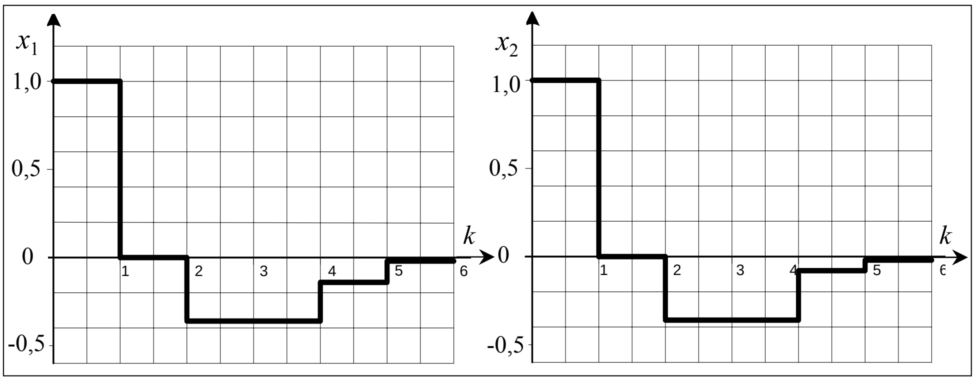

Рис. 2. Переходные дискретные функции системы

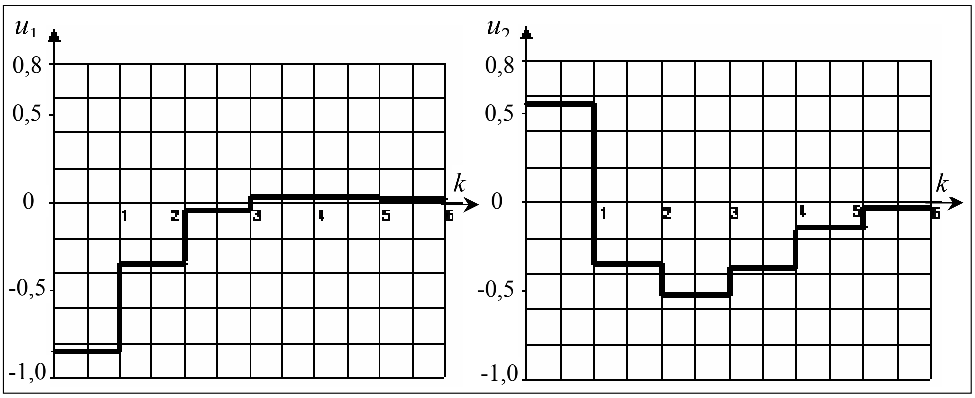

Рис. 3. Дискретные процессы изменения управляющих сигналов

действием управлений u_1 и u_2 имеет заданный спектр и небольшое перерегулирование при экспоненциальном затухании средних интегральных ошибок управления δ_1 и δ_2.

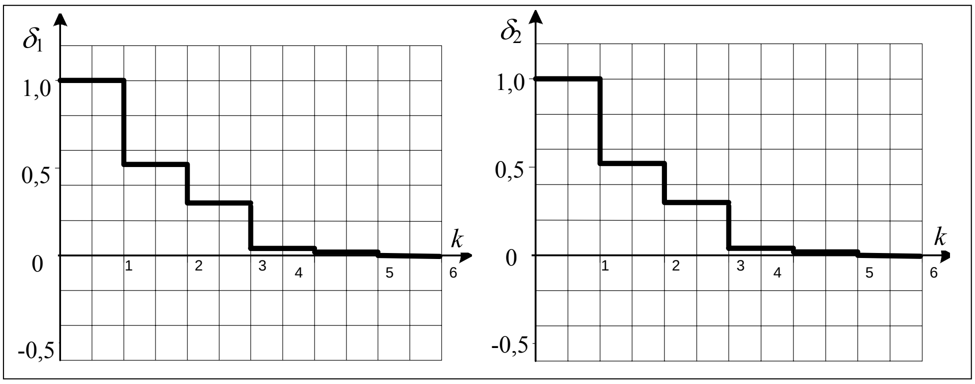

Рис. 4. Дискретные процессы изменения средних интегральных ошибок управления

ВЫВОДЫ

Для дискретной во времени системы управления разработан метод синтеза модального регулятора состояния, который позволяет обеспечить произвольную, в том числе и максимальную степень устойчивости замкнутой системы в пространстве переменных состояния и их средних интегральных значений. Полученный закон управления позволяет обеспечить экспоненциальный характер переходной функции для средних интегральных ошибок управления системы при наименьшем перерегулировании переменных состояния и минимально возможном при этом времени сходимости переходной функции для переменных состояния к установившейся ошибке. Регулятор имеет достаточно простую структуру, что упрощает его физическую реализацию, а использование средних интегральных ошибок управления системы в цепи обратной связи позволяет использовать потенциально полезное влияние случайных возмущений в реальных условиях работы на процесс поддержания их заданных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филатов А.Г.* Стабилизация электрических нагрузок в электроэнергетических системах // Технічна електродинаміка. Тематичний випуск «Проблеми сучасної електротехніки», частина 5. — 2006. — С. 3–8.
2. *Воронов А.А.* Введение в динамику сложных управляемых систем. — М.: Наука, 1985. — 352 с.
3. *Рей У.* Методы управления технологическими процессами. — М.: Мир, 1983. — 368 с.
4. *Куо Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления. — М.: Машиностроение, 1986. — 448 с.
5. *Мышкис А. Д.* Лекции по высшей математике. — М.: Наука, 1973. — 640 с.

Поступила 02.06.2008