УДК 519.173+515.124

А. А. Довгошей, Е. А. Петров

Ультраметризация взвешенных графов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Пусть (G, w) — взвешенный граф. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых вес $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$ продолжается до псевдоультраметрики на $V(G)$, получен критерий единственности такого продолжения. Доказано, что граф является полным k-дольным с $k \geqslant 2$ тогда и только тогда, когда для любого веса, продолжающегося до псевдоультраметрики, среди всех таких продолжений найдется наименьшая псевдоультраметрика. Дана структурная характеристика графов, для которых субдоминантная псевдоультраметрика является ультраметрикой для любого строго положительного веса, продолжающегося до псевдоультраметрики.

Граф $G = (V, E)$ вместе с функцией $w\colon E \to \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ называется *взвешенным*, а функция w — *весом* или *весовой функцией*. Взвешенные графы будем обозначать через (G, w). В основном мы будем придерживаться терминологии, принятой в [1].

В [2] был сформулирован следующий вопрос. При каких условиях на w для данного взвешенного графа (G, w) существует ультраметрика (псевдоультраметрика) d, продолжающая вес w. Теорема 2 дает полный ответ на этот вопрос. Необходимые и достаточные условия единственности такого продолжения получены в теореме 7. Кроме того, для связных G мы находим "наибольшую" псевдоультраметрику d, продолжающую w, и показываем, что эта псевдоультраметрика является субдоминантной для "метрики кратчайшего пути" (теорема 3, следствие 1). Необходимые и достаточные условия, при которых субдоминантная псевдоультраметрика является метрикой, найдены в теореме 5. Используя эту теорему, в следствии 7 мы находим структурную характеристику графов G, для которых существует строго положительный вес $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$ такой, что множество псевдоультраметрик, продолжающих w, не пусто, но не содержит ни одной ультраметрики. В теореме 6 доказано, что граф является полным k-дольным с $k \geqslant 2$ тогда и только тогда, когда для любого веса, продолжающегося до псевдоультраметрики, среди всех таких продолжений найдется наименьшая псевдоультраметрика, согласованная с w.

Кроме того, мы приводим ряд результатов, показывающих, что субдоминантная псевдоультраметрика и псевдоультраметрика кратчайшего пути часто "ведут себя" аналогичным образом.

Субдоминантная псевдоультраметрика. На семействе $\mathfrak{F}$ псевдометрик, заданных на некотором непустом множестве X, определим частичный порядок $\preceq$ как

$$(d_1 \preceq d_2) \Leftrightarrow (\forall x, y \in X\colon d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y)).$$

Следующее определение расширяет понятие субдоминантной ультраметрики, хорошо известное для метрических пространств (см. [3]), на взвешенные графы.

Определение 1. Пусть (G, w) — непустой взвешенный граф, а $\mathfrak{F}_{w,u}$ — семейство всех псевдоультраметрик ρ, заданных на $V(G)$, и таких, что

$$\rho(u, v) \leqslant w(\{u, v\})$$

для любого ребра $\{u,v\} \in E(G)$. Если частично упорядоченное множество $(\mathfrak{F}_{w,u}, \preceq)$ содержит наибольший элемент, то называем его субдоминантной псевдоультраметрикой для веса w.

Перейдем теперь к построению субдоминантной псевдоультраметрики.

Пусть u, v — две различные вершины связного взвешенного графа (G,w). Обозначим через $\mathfrak{P}_{u,v}$ множество путей, соединяющих u и v. Определим на декартовом квадрате $V(G) \times \times V(G)$ функцию ρ_w как

$$\rho_w(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = y, \\ \inf\limits_{P \in \mathfrak{P}_{x,y}} \Big(\max\limits_{e \in P} w(e)\Big), & \text{если} \quad x \neq y. \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 1. *Функция ρ_w является субдоминантной псевдоультраметрикой для любого непустого связного взвешенного графа (G,w).*

Если G — конечный граф, а вес w определяется некоторой метрикой, то субдоминантная псевдоультраметрика ρ_w будет ультраметрикой. Для полных G этот классический случай рассматривался еще в [4]. Эффективную процедуру для вычисления субдоминантной ультраметрики для конечных метрических пространств можно найти в [5, 6]. Перейдем теперь к изучению связи между псевдометрикой кратчайшего пути и субдоминантной псевдоультраметрикой.

Напомним, что псевдометрика кратчайшего пути это псевдометрика, заданная на $V(G)$ как

$$d_w(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = y, \\ \inf\limits_{P \in \mathfrak{P}_{x,y}} \sum\limits_{e \in P} w(e), & \text{если} \quad x \neq y. \end{cases}$$

По аналогии с определением 1 введем следующее определение.

Определение 2. Пусть (G,w) — непустой взвешенный граф, а $\mathfrak{F}_{w,m}$ — множество всех псевдометрик d таких, что

$$d(u,v) \leqslant w(\{u,v\})$$

для всех ребер $\{u,v\} \in E(G)$. Субдоминантной псевдометрикой (для веса w) назовем наибольший элемент ч. у. множества $(\mathfrak{F}_{w,m} \preceq)$, если такой элемент существует.

Утверждение. *Пусть (G,w) — непустой связный взвешенный граф. Тогда d_w — субдоминантная псевдометрика для веса w.*

Следствие 1. *Пусть (G,w) — непустой связный взвешенный граф. Тогда псевдометрика ρ_w, построенная по правилу (1), является субдоминантной псевдоультраметрикой для d_w, т. е. $\rho_w \preceq d_w$ и $\rho \preceq \rho_w$ для каждой псевдоультраметрики ρ, удовлетворяющей $\rho \preceq d_w$.*

Интерес представляет вопрос о том, когда d_w и ρ_w являются метрикой и, соответственно, ультраметрикой. Мы вернемся к этому ниже. Отметим, что задача нахождения критерия существования субдоминантной ультраметрики ставилась в [7].

Псевдоультраметризация взвешенных графов. Введем необходимые определения.

Определение 3. Пусть (G,w) — взвешенный граф, $d\colon V(G) \times V(G) \to \mathbb{R}^+$ — ультраметрика (псевдоультраметрика). Будем говорить, что d продолжает w, если равенство $w(\{x,y\}) = d(x,y)$ выполняется при всех $\{x,y\} \in E(G)$.

Определение 4. Вес w является *ультраметризуемым* (*псевдоультраметризуемым*), если существует продолжающая его ультраметрика (псевдоультраметрика).

Следующая теорема дает критерий псевдоультраметризуемости веса w.

Теорема 2. *Пусть (G, w) — непустой взвешенный граф. Вес w псевдоультраметризуем тогда и только тогда, когда для любого цикла $C \subseteq G$ существуют как минимум два различных ребра $e_1, e_2 \in E(C)$ таких, что*

$$w(e_1) = w(e_2) = \max_{e \in E(C)} w(e).$$

Если G — связный граф, а w — псевдоультраметризуемый вес, то субдоминантная псевдоультраметрика продолжает w.

Непосредственно из теоремы 2 следует, что псевдоультраметризуемость веса является локальным свойством, т. е. если для любого *конечного* подграфа H взвешенного графа (G, w) ограничение веса w на $E(H)$ — псевдоультраметризуемый вес, то и сам вес w псевдоультраметризуем.

Следствие 2. *Пусть G — непустой граф. G является лесом, если и только если любой вес $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$ псевдоультраметризуем.*

Пусть (G, w) — непустой взвешенный граф с псевдоультраметризуемым весом w. Обозначим через $\mathfrak{U}_w$ семейство всех псевдоультраметрик на $V(G)$, продолжающих w.

Теорема 3. *Если G связный, то субдоминантная псевдоультраметрика ρ_w является наибольшим элементом ч. у. множества $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$. Обратно, если ч. у. множество $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$ имеет наибольший элемент, то граф G связен.*

Используя эту теорему, легко получить утверждение, обратное следствию 1.

Следствие 3. *Пусть (G, w) — непустой взвешенный граф. Если субдоминантная для w псевдоультраметрика существует, то G связный.*

Отметим, что в следствиях 1 и 3 мы не требуем псевдоультраметризуемости веса w.

Для того чтобы проследить аналогию между ρ_w и d_w, обозначим $\mathfrak{M}_w$ семейство всех псевдометрик, продолжающих w.

Как показано в [2], для связных G псевдометрика кратчайшего пути d_w принадлежит $\mathfrak{M}_w$ для любого псевдометризуемого w, а если на $\mathfrak{M}_w$ ввести отношение частичного порядка $\preceq$, то справедлив следующий аналог теоремы 3.

Теорема 4 [2]. *Пусть (G, w) — непустой взвешенный граф с псевдометризуемым весом w. Если G связный, то d_w — наибольший элемент ч. у. множества $(\mathfrak{M}_w, \preceq)$. Обратно, если $(\mathfrak{M}_w, \preceq)$ имеет наибольший элемент, то граф G связен.*

Теоремы 3 и 4 дают

Следствие 4. *Пусть G — непустой граф. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) G — связный граф;

(ii) ч. у. множество $(\mathfrak{M}_w, \preceq)$ имеет наибольший элемент для любого псевдометризуемого веса $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$;

(iii) ч. у. множество $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$ имеет наибольший элемент для любого псевдоультраметризуемого веса $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$.

Используя следствие 2, теорему 3 и соответствующие результаты, из [2] получаем

Следствие 5. *Пусть G — непустой граф. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) G — дерево;

(ii) любой вес $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$ псевдометризуем и ч. у. множество $(\mathfrak{M}_w, \preceq)$ содержит наибольший элемент;

(iii) любой вес $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$ псевдоультраметризуем и ч. у. множество $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$ содержит наибольший элемент.

Если вес w псевдометризуем, но не псевдоультраметризуем, то возникает задача построения продолжения w, которое было бы "ультраметрично" настолько, насколько это возможно. Подходящую меру "ультраметричности" можно ввести, используя так называемый показатель промежуточности — supremum тех $\alpha \geqslant 1$, для которых d^{α} продолжает оставаться метрикой для данной метрики d (см. [8, 9]).

Ультраметризация взвешенных графов. Если псевдоультраметризуемый вес w строго положителен, а граф G конечен и связен, то, как легко видеть, субдоминантная псевдоультраметрика ρ_w будет ультраметрикой. Не трудно привести пример, показывающий, что для бесконечных G строгая положительность w не гарантирует того, что ρ_w будет ультраметрикой.

Из теоремы 3 следует, что для связных G множество $\mathfrak{U}_w$ содержит ультраметрики тогда и только тогда, когда ρ_w является ультраметрикой.

В следующей теореме мы опишем строение графов G, для которых ρ_w является ультраметрикой при любом строго положительном псевдоультраметризуемом весе w.

Отметим, что в работе [10] дана полная характеристика тех метрических пространств (X, d), для которых субдоминантная для d псевдоультраметрика является ультраметрикой.

Теорема 5. *Пусть $G = (V, E)$ — непустой связный граф. Следующие два утверждения эквивалентны.*

(i) Для любого строго положительного псевдоультраметризуемого веса w субдоминантная псевдоультраметрика ρ_w является ультраметрикой.

(ii) Для любой пары различных вершин u^*, $v^* \in V(G)$ и произвольной последовательности $\widetilde{F}$ путей $F_j \in \mathfrak{P}_{u^*,v^*}$, $j \in \mathbb{N}$, найдется ребро $e^0 = \{u^0, v^0\} \in E(G)$ такое, что для всех $i > 0$

$$u^0, v^0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} V(F_{i+k}).$$

Из приведенной выше теоремы и соответствующего результата из [2] получаем

Следствие 6. *Пусть G — непустой связный граф. Следующие два утверждения эквивалентны.*

(i) Для любого строго положительного псевдоультраметризуемого веса $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$ субдоминантная псевдоультраметрика ρ_w является ультраметрикой.

(ii) Для любого строго положительного псевдометризуемого веса $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$ псевдометрика кратчайшего пути d_w является метрикой.

Используя теоремы 3 и 5, легко описать структурные свойства графа G, для которого существует строго положительный псевдоультраметризуемый вес w такой, что $\mathfrak{U}_w$ не содержит ни одной ультраметрики.

Для этого напомним некоторые определения.

Для произвольной последовательности множеств $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *верхним пределом* этой последовательности, $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, называется множество всех элементов a таких, что $a \in A_n$ для бесконечного числа значений индекса n, т. е.

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n+k} \right).$$

Подмножество V_0 вершин графа G называется *независимым*, если любые две вершины из V_0 не смежны.

Следствие 7. *Пусть $G = (V, E)$ — непустой связный граф. Следующие утверждения эквивалентны.*

(i) Существует строго положительный псевдоультраметризуемый вес такой, что множество $\mathfrak{U}_w$ не содержит ни одной ультраметрики.

(ii) Существуют две вершины u^*, $v^* \in V(G)$ и последовательность путей $\{F_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $F_j \in \mathfrak{P}_{u^*,v^*}$ такая, что

$$\limsup_{j\to\infty} V(F_j)$$

есть независимое множество.

Наименьший элемент $\mathfrak{U}_w$ и единственность продолжения веса до псевдоультраметрики. Будем обозначать через TM (twice-max) множество тех неупорядоченных пар p, q различных несмежных вершин графа (G, w), для которых *любой* путь $P \in \mathfrak{P}_{p,q}$ содержит по крайней мере два различных ребра e_1 и e_2 таких, что $w(e_1) = w(e_2) = \max\limits_{e\in P} w(e)$.

Теорема 6. *Следующие условия эквивалентны для каждого непустого графа G.*

(i) Для каждого псевдоультраметризуемого веса $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$ ч. у. множество $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$ содержит наименьшую псевдоультраметрику $\rho_{0,w}$, т. е.

$$\rho_{0,w}(u, v) \leqslant \rho(u, v)$$

для всех $\rho \in \mathfrak{U}_w$ и всех u, $v \in V(G)$.

(ii) G — полный k-дольный граф с $k \geqslant 2$.

Если условие (ii) выполнено и w — псевдоультраметризуемый вес, тогда при $u \neq v$

$$\rho_{0,w}(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \{u, v\} \in \mathrm{TM}, \\ \max\limits_{e\in F} w(e), & \text{если} \quad \{u, v\} \notin \mathrm{TM}, \end{cases}$$

где F — любой путь из $\mathfrak{P}_{u,v}$, для которого $\max\limits_{e\in F} w(e)$ достигается на единственном ребре.

В качестве применения теоремы 6 можно получить характеризацию графов, являющихся звездами. Напомним, что звездой называется полный двудольный граф, одна из долей которого — одноточечное множество.

Следствие 8. *Следующие условия эквивалентны.*

(i) Любой вес $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^+$ псевдоультраметризуем и ч. у. множество $(\mathfrak{U}_w, \preceq)$ содержит наименьший элемент.

(ii) G — звезда.

Обратимся теперь к условиям единственности в задаче продолжения веса w до псевдоультраметрики. С этой целью введем

Определение 5. Пусть (G, w) — непустой взвешенный связный граф, u, v — две его различные несмежные вершины. Назовем u, v *хорошо сцепленными*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует путь $u = u_1, u_2, \ldots, u_n = v$ такой, что $\{u_i, u_{i+1}\} \in E(G)$ и $w(\{u_i, u_{i+1}\}) \leqslant \varepsilon$ для $i = 1, \ldots, n-1$.

Будем обозначать множество всех таких пар $\{u, v\}$ через WCh (well chained).

Понятие хорошо сцепленных точек часто используется в теории метрических континуумов [11, с. 60] и играет важную роль при рассмотрении задач, относящихся к связности в метрических пространствах (см., например, [12]). "Хорошая сцепленность" натуральным образом возникает при исследовании субдоминантных ультраметрик (см. [6, 10]). В частности, для строго положительного псевдоультраметризуемого веса w и связного G легко показать, что вершины u и v, $u \neq v$, хорошо сцеплены тогда и только тогда, когда $\rho_w(u, v) = 0$.

Теорема 7. *Пусть (G, w) — непустой взвешенный связный граф с псевдоультраметризуемым весом w. Множество $\mathfrak{U}_w$ состоит из одного элемента тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{TM} \subseteq \mathrm{WCh}.$$

1. *Bondy J. A., Murty U. S. R.* Graph theory. – New York: Springer, 2008. – 651 p.
2. *Dovgoshey O., Martio O., Vuorinen M.* Metrization of weighted graphs // Reports in Math. University of Helsinki. – 2011. – **516**. – 12 p.
3. *Bayod J. M., Martiner-Maurica J.* Subdominant ultrametrics // Proc. Amer. Math. Soc. – 1990. – **109**, No 3. – P. 829–834.
4. *Jardine J. P. J., Jardine N., Sibson R.* The structure and construction of taxonomic hierarchies // Math. Biosci. – 1967. – **1**. – P. 171–179.
5. *Rammal R., Angles d'Auriac J. C., Doucot B.* On degree of ultrametricity // J. Phys. Lett. – 1985. – **46**. – P. 945–952.
6. *Rammal R., Toulouse G., Virasoro M. A.* Ultrametricity for physicists // Rev. Mod. Phys. – 1986. – **58**, No 3. – P. 765–788.
7. *Marcu D.* A study on metric and statistical analysis // Stud. Univ. Babes-Bolyai. Ser. Math. – 2004. – **49**, No 3. – P. 43–74.
8. *Dovgoshey O., Martio O.* Blow up of balls and coverings in metric spaces // Manuscr. Math. – 2008. – **127**. – P. 89–120.
9. *Dovgoshey O., Dordovskyi D.* Ultrametricity and metric betweenness in tangent spaces to metric spaces // P-adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. – 2010. – **2**, No 2. – P. 100–113.
10. *Lemin A. J.* On ultrametrization of general metric spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 2002. – **131**, No 3. – P. 979–989.
11. *Nadler S. B., Jr.* Continuum theory. An introduction. – New York: Marcel Dekker, 1992. – 328 p.
12. *O'Farrel A. G.* When uniformly-continuous implies bounded // Irish Math. Soc. Bull. – 2004. – **53**. – P. 53–56.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 14.10.2011

О. А. Довгоший, Є. О. Петров

Ультраметризація зважених графів

Нехай (G, w) — зважений граф. Знайдені необхідні і достатні умови, за яких вага $w \colon E(G) \to \to \mathbb{R}^+$ продовжується до псевдоультраметрики на $V(G)$, отримано критерій единості такого продовження. Доведено, що граф є повним k-частковим з $k \geqslant 2$ тоді і тільки тоді, коли для будь-якої ваги, що продовжується до псевдоультраметрики, серед усіх таких продовжень знайдеться найменша псевдоультраметрика. Дано структурну характеристику графів, для яких субдомінантна псевдоультраметрика є ультраметрикою для будь-якої строго додатної ваги, що продовжується до псевдоультраметрики.

A. A. Dovgoshey, E. A. Petrov

Ultrametrization of weighted graphs

Let (G, w) be a weighted graph. The necessary and sufficient conditions under which the weight $w\colon E(G) \to \mathbb{R}^{+}$ can be extended to a pseudoultrametric on $V(G)$ are found. A criterion of the uniqueness of this extension is also obtained. It is proved that a graph is a complete k-partite with $k \geqslant 2$ if and only if, for every pseudoultrametrizable weight w, there exists the smallest pseudoultrametric, agreed with w. We characterize the structure of graphs, for which a subdominant pseudoultrametric is an ultrametric for every strictly positive pseudoultrametrizable weight.