УДК 517.5

Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанов

К задаче Дирихле для уравнений Бельтрами

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

В терминах комплексного коэффициента сформулированы критерии существования регулярных решений задачи Дирихле для вырожденных уравнений Бельтрами в произвольных жордановых областях, а также псевдорегулярных и многозначных решений в произвольных конечносвязных областях, ограниченных взаимно непересекающимися жордановыми кривыми.

Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и пусть $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в. *Уравнениями Бельтрами* называются уравнения вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z, \tag{1}$$

где $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y соответственно. Функция μ называется *комплексным коэффициентом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \quad - \tag{2}$$

дилатацией уравнения (1). Уравнение Бельтрами (1) называется *вырожденным*, если $K_\mu \notin L^\infty(D)$.

Граничные задачи для уравнений Бельтрами впервые изучались в известной диссертации Римана, который рассматривал частный случай аналитических функций, когда $\mu(z) \equiv \equiv 0$, и работах Гильберта (1904, 1924), который исследовал соответствующую систему Коши–Римана для действительной и мнимой части аналитических функций $f = u + iv$, а также работе Пуанкаре (1910) по приливам. Невырожденные уравнения Бельтрами хорошо изучены (см., например, [1]). Недавние результаты о существовании сильных кольцевых решений для вырожденных уравнений Бельтрами и развитие теории граничного поведения кольцевых гомеоморфизмов (см., например, ссылки в [2]) позволяют получить дальнейшие продвижения в области существования регулярных решений задачи Дирихле.

1. Постановка задачи. *Задача Дирихле* для уравнений Бельтрами (1) в области D состоит в нахождении непрерывной функции $f\colon D \to \mathbb{C}$, имеющей частные производные первого порядка п. в., удовлетворяющей (1) п. в. и такой, что

$$\lim_{z \to \zeta} \operatorname{Re} f(z) = \varphi(\zeta) \qquad \forall\, \zeta \in \partial D \tag{3}$$

для предписанной непрерывной функции $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$. При $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$ *регулярное решение* такой задачи есть непрерывное в $\mathbb{C}$, дискретное и открытое отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с якобианом $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$ п. в., удовлетворяющее условию (3) и п. в. (1).

Напомним, что отображение $f\colon D \to \mathbb{C}$ *дискретно*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{C}$ состоит из изолированных точек, и *открыто*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{C}$.

Как впервые заметил Боярский (см., например, [1, гл. 1, § 6]), в случае многосвязных областей задача Дирихле для уравнений Бельтрами, вообще говоря, не имеет решений в классе непрерывных (однозначных) в $\mathbb{C}$ функций. Поэтому естественно возникает вопрос: нельзя ли в этом случае существование решения задачи Дирихле получить в более широком классе? Оказывается можно, если решение задачи будем искать в классе функций, имеющих некоторое количество заранее фиксированных изолированных полюсов внутри области D. Точнее, при $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$ *псевдорегулярное решение* такой задачи есть непрерывное в $\overline{\mathbb{C}}$, дискретное и открытое отображение $f\colon D \to \overline{\mathbb{C}}$ класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ (вне полюсов) с якобианом $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$ п. в., удовлетворяющее условию (3) и п. в. (1).

2. О функциях конечного среднего колебания. Говорят, что функция $\psi\colon D \to \mathbb{R}$, $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$, имеет *ограниченное среднее колебание* по Джону–Ниренбергу (1961), сокр. $\psi \in \mathrm{BMO}$, если

$$\|\psi\|_* = \sup_{B\subset D} \frac{1}{|B|}\int\limits_B |\psi(x) - \psi_B|\, dxdy < \infty, \tag{4}$$

где точная верхняя грань берется по всем кругам $B \subset D$, а ψ_B — среднее значение функции ψ в круге B. Пишем $\psi \in \mathrm{BMO}(\overline{D})$, если $\psi \in \mathrm{BMO}(G)$, где G — область в $\mathbb{C}$, содержащая $\overline{D}$.

Следуя работе [3], говорим, что функция $\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $z_0 \in \overline{D}$, пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(z_0)$, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \ \ -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{B(z_0,\varepsilon)} |\psi(z) - \widetilde{\psi}_\varepsilon|\, dxdy < \infty, \tag{5}$$

где $B(z_0,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < \varepsilon\}$, а $\widetilde{\psi}_\varepsilon$ — среднее значение ψ в $B(z_0,\varepsilon)$. Пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(D)$, если (5) выполнено для каждой точки $z_0 \in D$. Также пишем $\psi \in \mathrm{FMO}(\overline{D})$, если (5) выполнено для всех $z_0 \in \overline{D}$.

Как известно, $L^\infty(D) \subset \mathrm{BMO}(D) \subset L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ для всех $p \in [1,\infty)$. Однако $\mathrm{FMO}(D)$ не является подклассом $L^p_{\mathrm{loc}}(D)$ ни для какого $p > 1$, хотя $\mathrm{FMO}(D) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D)$. Таким образом, FMO существенно шире $\mathrm{BMO}_{\mathrm{loc}}$.

3. О регулярных и псевдорегулярных решениях.

Теорема 1. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в. такая, что*

$$K_\mu(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{FMO}(\overline{D}). \tag{6}$$

Если область D односвязна (n-связна, $n \geqslant 2$), то уравнение Бельтрами (1) *имеет регулярное (псевдорегулярное с полюсами в n предписанных внутренних точках D) решение задачи Дирихле* (3) *для любой непрерывной функции $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$.*

Следствие 1. *В частности, заключение теоремы 1 остается в силе, если $K_\mu(z) \leqslant Q(z) \in \mathrm{BMO}(\overline{D})$.*

Следствие 2. *Заключение теоремы 1 также имеет место, если*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \ \ -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{B(z_0,\varepsilon)} K_\mu(z)\, dxdy < \infty \qquad \forall\, z_0 \in \overline{D}. \tag{7}$$

Здесь и далее подразумевается, что K_μ продолжена нулем вне области D.

Теорема 2. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в. такая, что $K_\mu \in L^1(D)$ и*

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)} \frac{dr}{\|K_\mu(z_0, r)\|_1(r)} = \infty \qquad \forall\, z_0 \in \overline{D}, \tag{8}$$

где $\|K_\mu\|_1(z_0, r) = \int\limits_{\gamma_r} K_\mu(z)|dz|$ — нормы в L^1 функции K_μ на окружностях $S(z_0, r) = \{z \in \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| = r\}$, $0 < r < \delta(z_0) < d(z_0)$, $d(z_0) = \sup\limits_{z\in D} |z - z_0|$. Если область D односвязна (n-связна, $n \geqslant 2$), то уравнение Бельтрами (1) *имеет регулярное (псевдорегулярное с полюсами в n предписанных внутренних точках D) решение задачи Дирихле* (3) *для любой непрерывной функции $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$.*

Следствие 3. *В частности, заключения теоремы 2 имеют место, если*

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \forall\, z_0 \in \overline{D} \tag{9}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $k_{z_0}(\varepsilon)$ — среднее значение функции K_μ на $S(z_0, \varepsilon)$.

Теорема 3. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в. такая, что*

$$\int\limits_D \Phi(K_\mu(z))\, dxdy < \infty, \tag{10}$$

где $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — неубывающая выпуклая функция, с условием

$$\int\limits_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{11}$$

для некоторого $\delta > \Phi(0)$. Если область D односвязна (n-связна, $n \geqslant 2$), то уравнение Бельтрами (1) *имеет регулярное (псевдорегулярное с полюсами в n предписанных внутренних точках D) решение задачи Дирихле* (3) *для любой непрерывной функции $\varphi\colon \partial D \to \to \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$.*

Условие (11) является не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы уравнения Бельтрами (1) с интегральными ограничениями на дилатацию вида (10) имели регулярные решения задачи Дирихле (3) для любой непостоянной непрерывной функции $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$.

Наконец, заметим, что соответствующие теоремы могут быть сформулированы в терминах так называемой касательной дилатации K_μ^T.

4. О существовании многозначных решений. В многосвязных областях $D \in \mathbb{C}$, помимо псевдорегулярных решений, задача Дирихле (3) для уравнений Бельтрами (1) допускает многозначные решения в духе теории многозначных аналитических функций. Говорим, что дискретное и открытое отображение $f\colon B(z_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{C}$, где $B(z_0, \varepsilon_0) \subset D$ является *локальным регулярным решением* уравнения (1), если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$, $J_f \neq 0$ и f удовлетворяет (1) п. в. Два локальных регулярных решения $f_0\colon B(z_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{C}$ и $f_*\colon B(z_*, \varepsilon_*) \to \mathbb{C}$ уравнения (1) будем называть продолжением друг друга, если существует конечная цепь таких решений $f_i\colon B(z_i, \varepsilon_i) \to \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n}$, что $f_1 = f_0$, $f_n = f_*$ и $f_i(z) \equiv f_{i+1}(z)$ при $z \in E_i\colon = B(z_i, \varepsilon_i) \cap B(z_{i+1}, \varepsilon_{i+1}) \neq \varnothing$, $i = \overline{1, n-1}$. Совокупность локальных регулярных решений $f_j\colon B(z_j, \varepsilon_j) \to \mathbb{C}$, $j \in J$, будем называть *многозначным решением уравнения* (1) в D, если круги $B(z_j, \varepsilon_j)$ накрывают всю область D и f_j попарно являются продолжениями друг друга в этой совокупности. Многозначное решение (1) будем называть *многозначным решением задачи Дирихле* (3), если $u(z) = \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f_j(z)$, $z \in B(z_j, \varepsilon_j)$, $j \in J$, является однозначной функцией в D, которая удовлетворяет условию (3).

Следующая теорема представляет собой аналог известной теоремы о монодромии для аналитических функций.

Теорема 4. *Любое многозначное решение уравнения Бельтрами* (1) *в односвязной области D является его регулярным однозначным решением.*

Теорема 5. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}$, граница которой состоит из конечного числа попарно непересекающихся жордановых кривых, и пусть $\mu\colon D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п. в., удовлетворяющая посылкам теорем 1–3 или следствий 1–3. Тогда уравнение Бельтрами* (1) *имеет многозначное решение задачи Дирихле* (3) *для любой непрерывной функции $\varphi\colon \partial D \to \mathbb{R}$, $\varphi(\zeta) \not\equiv \mathrm{const}$.*

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – Москва: Физматгиз, 1959. – 628 с.
2. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On recent advances in the degenerate Beltrami equations // Укр. мат. вісн. – 2010. – **7**, No 4. – С. 467–515.
3. *Ignat'ev A. A., Ryazanov V. I.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Там само. – 2005. – **2**, No 3. – С. 395–417.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 23.08.2011

Д. О. Ковтонюк, І. В. Пєтков, В. І. Рязанов

До задачі Діріхле для рівнянь Бельтрамі

У термінах комплексного коефіцієнта сформульовано критерії існування регулярних розв'язків задачі Діріхле для вироджених рівнянь Бельтрамі у довільних жорданових областях, а також псевдорегулярних та багатозначних розв'язків у довільних скінченнозв'язних областях, які обмежені взаємно непретинними жордановими кривими.

D. A. Kovtonyuk, I. V. Petkov, V. I. Ryazanov

On the Dirichlet problem for Beltrami equations

In terms of the complex coefficient, we formulate the criteria for the existence of regular solutions of the Dirichlet problem for degenerate Beltrami equations in arbitrary Jordan domains, as well as pseudoregular and multivalued solutions in arbitrary finitely connected domains bounded by disjoint Jordan curves.