

УДК 532.526

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В РАСЧЕТАХ ПРИСТЕННЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

М. ЛУНИС, ВИТ. И. МАМЧУК, В. Т. МОВЧАН, Л. А. РОМАНЮК, Е. А. ШКВАР

Киевский международный университет гражданской авиации

Получено 13.04.2000

Представлены разработанные и апробированные алгебраические модели коэффициентов турбулентной вязкости и теплопроводности. Модели выполнены в виде единой формулы для всего пограничного слоя, которые после модификации содержащихся в них коэффициентов и параметров для учета возникающих в реальных течениях усложняющих факторов обобщаются для расчета широкого класса задач пристенных течений. Полученные с их помощью результаты в виде приближенно-аналитических зависимостей и численных значений профилей скорости и температуры, параметров пограничного слоя и коэффициентов сопротивления трения, теплоотдачи приведены в сравнении с экспериментальными и расчетными данными различных авторов.

Наведено розроблені й апробовані алгебраїчні моделі коефіцієнтів турбулентної в'язкості і теплопровідності. Моделі сформульовано у вигляді єдиної формули для всього прилежого шару, так що після модифікації її коефіцієнтів та параметрів з метою врахування наявних у реальних течіях ускладнюючих факторів узагальнюються для розрахунку широкого класу задач пристінних течій. Отримані за їх допомогою результати у вигляді наближено-аналітичних залежностей та числових значень профілів швидкості й температури, параметрів прилежого шару та коефіцієнтів опору тертя, тепловіддачі представлено в порівнянні з експериментальними і розрахунковими даними різних авторів.

Developed and well tested algebraic models of turbulent viscosity and thermal conductivity are presented. Models are elaborated in the form of one formula valid along all the boundary layer thickness. By use of modifications and empirical coefficients to take in account action of several physical factors the models are generalized for application in computations of large class of near wall turbulent flows. Obtained approximate-analytical solutions and numerical results of velocity and temperature distributions, skin-friction and heat transfer coefficients are compared with experimental and computation data of several authors.

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$x, y, z$  – продольная, поперечная и нормальная декартовы координаты;

$u, v, w$  – составляющие осредненной скорости, согласно системе координат;

$T$  – осредненная температура;

$\rho$  – плотность жидкости;

$p$  – статическое давление жидкости;

$c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении;

$\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;

$\lambda, a = \lambda/(\rho c_p)$  – коэффициенты молекулярной теплопроводности и теплопроводности;

$\delta, \delta^*, \delta^{**}$  – толщины пограничного слоя, вытеснения и потери импульса;

$L$  – длина пластины или характерная длина тела;

$R, d = 2R$  – радиус и диаметр трубы;

$h$  – характерная высота шероховатости;

$U_E, T_E$  – скорость и температура на внешней границе пограничного слоя;

$U_m, T_m$  – среднemasовые скорость и температура соответственно;

$\tau_W, T_W, q_W$  – значения на стенке напряжения трения, температуры и плотности теплового потока соответственно;

$v_* = \sqrt{\tau_W/\rho}$  – динамическая скорость;

$y^+ = yv_*/\nu, h^+ = hv_*/\nu, u^+ = u/v_*, T^+ = \rho c_p (T_W - T_m) v_*/q_W$  – безразмерные параметры в координатах закона стенки;

$\Phi = \frac{\delta}{\tau_W} \frac{dp}{dx}, p^+ = \frac{\nu}{\rho v_*^3} \frac{dp}{dx}, \beta = \frac{\delta^*}{\tau_W} \frac{dp}{dx}$  – безразмерные параметры градиента давления;

$Re = U_E L/\nu, Re_d = U_m d/\nu, R^{**} = U_E \delta^{**}/\nu$  – числа Рейнольдса;

$Pr = \nu/a$  – молекулярное число Прандтля;

$Pe = U_m d/a$  – число Пекле;

$C_f = \tau_W/(\rho U_E^2/2)$  – локальный коэффициент поверхностного трения;

$Nu = q_W d/[\rho c_p (T_W - T_m)]$  – локальное число Нуссельта.

## ВВЕДЕНИЕ

Все используемые модели турбулентности зависят от эмпирической информации. Их эффективность обеспечивается коэффициентами, которые

могут рассматриваться переменными с целью учета того или иного фактора, влияющего на развитие течения. Анализ методов моделирования турбулентности показывает, что результаты расчетов пристенных течений с применением алгебраических моделей во многих случаях не уступают в точности расчетам с применением моделей более высокого уровня.

Относительная простота алгебраических моделей и удовлетворительная точность результатов расчетов, которые получены с их использованием, делают их привлекательными особенно для проведения трудоемких расчетов сложных течений, которые встречаются в инженерных приложениях и обеспечивают оптимальное сочетание точности и вычислительных затрат [1].

Обзор существующих алгебраических моделей турбулентности показывает, что большинство из них основано на двухслойной схеме, а это, как известно, приводит к вычислительным неудобствам, связанным со сращиванием решений на стыке областей и к неадекватному учету нелинейного взаимодействия между характерными зонами турбулентного пристенного течения. Кроме того, многие из моделей приспособлены для решения простых задач и не допускают возможности обобщений на более сложные течения.

При сопоставлении теоретических расчетов с обширным экспериментальным материалом Стенфордских конференций обнаружены проблемы при моделировании турбулентных пограничных слоев, развивающихся после сильных воздействий внешних возмущений, при значительных положительных градиентах давления с возможным отрывом, при малых значениях чисел Рейнольдса по толщине вытеснения и для течений, близких к равновесным. Кроме того, для прогнозирования развития течений должны быть адекватно учтены следующие особенности и факторы, которые эффективно влияют на поведение течения и на механизмы турбулентного переноса: виды течений (плоское, осесимметричное, внутреннее, трехмерное, след, струйное, ...); условия во внешнем потоке (внешняя турбулентность, градиент давления, двухфазность или многокомпонентность потока, сжимаемость, теплофизические свойства, кривизна линии тока...); условия на стенке (шероховатость, проницаемость, кривизна поверхности, отрыв, ...); наличие центробежных, кориолисовых, архимедовых сил и т. д.

Поэтому представляемая ниже модель разрабатывалась с целью устранения, по возможности, упомянутых выше недостатков и, как следствие, достижения преимуществ при исследовании тур-

булентных течений.

## 1. МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. МОДЕЛЬ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

### 1.1. Двумерные турбулентные течения

Для моделирования двумерных турбулентных пограничных слоев несжимаемой жидкости на гладкой поверхности предлагается алгебраическая модель коэффициента турбулентной кинематической вязкости в виде единой по всей толщине пограничного слоя формулы [2–15]:

$$\nu_t = \chi \Delta v_* \gamma(\bar{y}) \operatorname{th} \frac{l \sqrt{\tau^+}}{\chi \Delta}, \quad (1)$$

$$l = ky^+ \operatorname{th} \frac{\operatorname{sh}^2(\chi_1 y^+) \operatorname{th} [\operatorname{sh}^2(\chi_2 y^+)]}{ky^+ \sqrt{\tau^+}},$$

где  $\bar{y} = y/\delta$  – относительная координата;  $l$  – длина пути перемешивания,

$$\Delta = \int_0^\delta \frac{1}{v_*} (U_E - u) dy \quad —$$

параметр длины Ротта – Клаузера;  $\gamma(\bar{y}) = \sqrt{1 - \bar{y}}$  – коэффициент перемежаемости потока;  $\tau^+$  – напряжение трения в окрестности стенки:

$$\tau^+ = \begin{cases} 1 + \Phi \bar{y} & \text{при } \Phi \geq 0, \\ 1/(1 - \Phi \bar{y}) & \text{при } \Phi = 0; \end{cases}$$

$\chi_1, \chi_2, k, \chi$  – эмпирические коэффициенты модели, которые для безградиентного течения на пластине полагались равными  $\chi_1 = 0.072, \chi_2 = 0.2326, k = 0.4, \chi = 0.0215$ .

При построении модели (1) учтены известные сведения о структуре и процессах развития турбулентного пограничного слоя. Формулы (1) обеспечивают пропорциональность коэффициента турбулентной вязкости

- во вязком подслое:  $y^4$ ,
- в переходной зоне:  $y^2$
- в логарифмической зоне:  $y$ .

Модель (1) достоверно отражает непрерывное изменение турбулентной вязкости по всей толщине пограничного слоя и обеспечивает гладкие переходы через границы зон и областей. В предельных случаях формулы (1) приводят к следующим приближениям:

- $\nu_t \approx \nu \operatorname{sh}^2(\chi_1 y^+)$  в переходной и вязкой зонах;
- $\nu_t \approx k y v_* \sqrt{\tau^+}$  в логарифмической зоне (аналог модели Прандтля);
- $\nu_t \approx \chi \Delta v_* \gamma(\bar{y})$  во внешней области (аналог модели Клаузера).

### 1.2. Пристенные струи

Течение в пристенной турбулентной струе характеризуется немонотонностью профиля скорости в поперечном сечении. Пограничный слой струи состоит из трех монотонных участков – областей: пристенной с толщиной  $\delta_m$ , струйной с толщиной  $\delta_c$  и следной с толщиной  $\delta_{cl}$  [4, 10–12]. В случае немонотонности составляющей скорости удобно использовать понятие интегральной вихревой вязкости

$$\nu_t \approx \int_0^y y \frac{\partial u}{\partial y} dy. \quad (2)$$

Для пограничного слоя при отсутствии струи интегрирование по частям в пределах пограничного слоя приводит к формуле Клаузера  $\nu_t \approx U_E \delta^* = \Delta v_*$ . Введение поправочных множителей  $\gamma(\bar{y}) = \sqrt{1-y/\delta}$  и  $\operatorname{th}(l\sqrt{\tau^+}/\Delta)$  для учета влияния перемежаемости и стенки приведет к формуле (1). В струйной и следной областях формула (2) видоизменяется следующим образом:

$$\nu_t \approx \int_{\delta_1}^{\delta_2} (y - \delta_m - \delta_c) \frac{\partial(u - U_p)}{\partial y} dy,$$

где

- в струйной области  $U_p = U_m$ ;  $\delta_1 = \delta_m$ ,  $\delta_2 = \delta_m + \delta_c$ ;
- в следной области  $U_p = U_{\min}$ ;  $\delta_1 = \delta_m + \delta_c$ ;  $\delta_2 = \delta_m + \delta_c + \delta_{cl}$ .

Таким образом для каждой из областей находим  $\nu_t \approx U_m \delta_m^*$ ,  $\nu_t \approx (U_m - U_{\min}) \delta_c^*$ ,  $\nu_t \approx (U_E - U_{\min}) \delta_{cl}^*$  где масштабы длин типа толщины вытеснения определяются таким образом:

$$\delta_c^* = \int_{\delta_m}^{\delta_m + \delta_c} \left(1 - \frac{u - U_{\min}}{U_m - U_{\min}}\right) dy;$$

$$\delta_{cl}^* = \int_{\delta_m + \delta_c}^{\delta_m + \delta_c + \delta_{cl}} \left(1 - \frac{u - U_{\min}}{U_E - U_{\min}}\right) dy.$$

Учитывая, что  $\delta_c^*$  и  $\delta_{cl}^*$  пропорциональны  $\delta_c$  и  $\delta_{cl}$ , для каждой из областей можно получить [4, 10–12]:

$$\nu_t = \chi \Delta v_* \operatorname{th} \frac{l\sqrt{\tau^+}}{\chi \Delta} \gamma(\bar{y}),$$

$$\nu_t = \chi_c \delta_c (U_{\max} - U_{\min}) \gamma(\bar{y}), \quad (3)$$

$$\nu_t = \chi_{cl} \delta_{cl} (U_E - U_{\min}) \gamma(\bar{y}).$$

### 1.3. Трехмерные течения

Решение задачи развития турбулентного пограничного слоя со скольжением (основное движение по продольной координате, вторичное течение по  $z$ ) определяется уравнениями пограничного слоя, в которых составляющие турбулентного напряжения трения записываются так [7]:

$$(\tau_t)_x = \rho \left[ (\nu_t)_{xx} \frac{\partial u}{\partial y} + (\nu_t)_{xz} \frac{\partial w}{\partial y} \right],$$

$$(\tau_t)_z = \rho \left[ (\nu_t)_{xz} \frac{\partial u}{\partial y} + (\nu_t)_{zz} \frac{\partial w}{\partial y} \right].$$

Для задания коэффициентов турбулентной вязкости используем подход Ротта, учитывающий анизотропность турбулентности:

$$(\nu_t)_{xx} = \nu_t (u^2 + N w^2) / U_E^2,$$

$$(\nu_t)_{xz} = \nu_t (u w^2 + N u w) / U_E^2,$$

$$(\nu_t)_{zz} = \nu_t (w^2 + N u^2) / U_E^2.$$

В этих условиях модель (1) турбулентной вязкости обобщена на пространственный случай [7] и принимает вид:

$$\nu_t = \chi U_E \Lambda \gamma(\bar{y}) \operatorname{th} \frac{l \sqrt{v_{*x}^4 \tau_x^{+2} + v_{*z}^4 \tau_z^{+2}}}{\chi U_E \Lambda}, \quad (4)$$

$$l = k y \operatorname{th} \frac{\operatorname{sh}^2(\chi_1 y^+) \operatorname{th}[\operatorname{sh}^2(\chi_2 y^+)]}{k y^+ \sqrt{(v_{*x}/v_{*\Sigma})^4 \tau_x^{+2} + (v_{*z}/v_{*\Sigma})^4 \tau_z^{+2}}},$$

где  $N$  – отношение значений коэффициентов турбулентной вязкости в направлениях вторичного и основного течений;  $\Lambda$  – интегральная характеристика трехмерного профиля скорости по формуле Мэллора – Херринга или Себечи. Модельные параметры определяются по характеристикам основного движения.

**1.4. Модель с использованием кинетической энергии турбулентности**

Предлагается единая по всей толщине пограничного слоя модель вида [8]:

$$\nu_t = C_1 \Delta \sqrt{E} \operatorname{th} \frac{l v_* \sqrt{\tau^+}}{C_1 \Delta \sqrt{E}}, \quad (5)$$

где  $E$  – кинетическая энергия турбулентности;  $C_1$  – эмпирический коэффициент;  $l$ , как и остальные параметры, берется из формулы (1).

**1.5. Модель коэффициента турбулентной теплопроводности**

При исследовании конвективного теплообмена в турбулентных течениях часто используют полуэмпирические модели коэффициента турбулентной теплопроводности или турбулентного числа Прандтля. Для коэффициента турбулентной теплопроводности предложен аналог формулы (1) [7, 13 – 15] вида

$$a_t = \chi_h \Delta v_* \gamma(\bar{y}) \operatorname{th} \frac{l_h \sqrt{\tau^+}}{\chi_h \Delta_h}, \quad (6)$$

$$l_h = k_h y \operatorname{th} \frac{\operatorname{sh}^2(\chi_{1h} y^+) \operatorname{th} [\operatorname{sh}^2(\chi_{2h} y^+)]}{k_h y^+ \sqrt{\tau^+}},$$

где  $l_h$  – аналог длины пути перемешивания;  $\chi_{1h}$ ,  $\chi_{2h}$ ,  $k_h$ ,  $\chi_h$ , – эмпирические коэффициенты модели.

Формулы (1) и (6) имеют одинаковую структуру, что вытекает из аналогии между гидродинамическим и тепловым турбулентными пограничными слоями. Единственное различие состоит в модельных коэффициентах, с помощью которых учитывается неполная аналогия или разница между процессами переноса тепла и импульса. Особенность развития теплового пограничного слоя заключается в зависимости его определяющих параметров и характеристик от теплофизических свойств потока – от молекулярного числа Прандтля ( $Pr$ ). Поэтому коэффициенты модели (6) задаются в виде  $\chi_{1h} = f_1(Pr)\chi_1$ ,  $\chi_{2h} = f_2(Pr)\chi_2$ ,  $k_h = f_k(Pr)k$ ,  $\chi_h = f(Pr)\chi$ .

Также как и для гидродинамического пограничного слоя, анализ модели (6) в предельных случаях приводит к аналогичным приближениям в характерных зонах пограничного слоя. Из формул (1) и (6) видно, что  $Pr_t = \varepsilon_m / \varepsilon_h$  находится в зависимости от поперечной координаты пограничного слоя и от теплофизических свойств жидкости. Для газов ( $Pr = 1$ ) при отсутствии ненагрываемых участков и при изотермичности обтекаемой поверхности гидродинамический и тепловой пограничные

слои развиваются одинаково, имеют одинаковую толщину и их структурные зоны совпадают. В этом случае

- во вязко-переходной зоне  $Pr_t = \operatorname{sh}^2(\chi_{1h} y^+) / \operatorname{sh}^2(\chi_{1h} y^+)$ ,
- в логарифмической зоне  $Pr_t = 1 / f_k(Pr)$ ,
- во внешней области  $Pr_t = 1 / f(Pr)$ .

**2. УЧЕТ ОСНОВНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ**

**2.1. Градиент давления, малые числа Рейнольдса**

Проведенные вычислительные эксперименты [3, 5] позволяют использовать для модельных коэффициентов зависимости, которые записываются в виде  $\Pi = \Pi_0 \cdot \Pi_R \cdot \Pi_p$  и свидетельствуют о мультипликативности воздействий этих факторов, где  $\Pi$  – модельный коэффициент;  $\Pi_0$  – его значение для плоского безградиентного пограничного слоя;  $\Pi_R$  – поправка на малые числа Рейнольдса;  $\Pi_p$  – поправка на продольный градиент давления.

В вязко-переходной зоне предлагаются поправки вида

$$\chi_{1R} = 1 + 0.01 \left( 1 - e^{-\frac{14}{1 + (0.001 R^{**})^2}} \right), \quad \chi_{2R} = 1,$$

$$\chi_{1R} = 1 + 15.089 p^+ r_1 r_2, \quad \chi_{2R} = 1 + 30.178 p^+,$$

где

$$r_1 = 1 - 0.5 e^{-0.1436 \beta} + 0.5 e^{-0.3531 \beta};$$

$$r_2 = 1 - e^{-76.1528 p^+ / \beta} + e^{-361.4064 p^+ / \beta}.$$

В логарифмической зоне и во внешней области пограничного слоя  $k_R = 1$ ,

$$k_p = \begin{cases} 1 + 0.45568(1 + p^+)s & \text{при } dp/dx \geq 0, \\ 1 + 146.27568(p^+/\beta)s & \text{при } dp/dx < 0, \end{cases}$$

$$\chi_R = 1.55 / [1 + 0.55(1 - e^{-0.243\sqrt{Z_1} - 0.298Z_1})],$$

$$\chi_p = 0.0095 + [74.6 + (2.4 + \beta)^2]^{-1},$$

где  $s = 1 - e^{-0.32068\beta}$ ;  $Z_1 = (R^{**}/425) - 1$ . При значениях параметра

$$-\frac{\nu}{U_E^2} \frac{dU_E}{dx} > 10^{-7}$$

рекомендуется использовать зависимость

$$\chi_p = 0.0168 + [212.85 + (2.4 + \beta)^2]^{-1}.$$

Анализ результатов расчетов показал, что все модели, приспособленные к моделированию неравновесных течений, не обеспечивают достоверности расчетов для равновесных течений. Обнаружены проблемы и при расчете восстанавливающихся течений после внешних воздействий. Результаты проведенных вычислительных экспериментов для пограничных слоев с  $dH/dx < 0$  показали, что модель (1) способна прогнозировать такие течения при условии внесения модификаций в некоторые модельные коэффициенты. Для этого случая получены поправки для коэффициентов логарифмической зоны и внешней области в зависимости от  $H = \delta^*/\delta^{**}$ ,  $dH/dx$ ,  $R^{**}$ ,  $\beta$  [3].

## 2.2. Шероховатость стенки

С целью учета шероховатости стенки в модели (1) для пристенной области, согласно предложению Ротта, производится сдвиг координаты  $y$  на некоторую величину  $\Delta y$ , т.е.  $l(y^+)$  заменяется на  $l(y^+ + \Delta y^+)$ . Шкваром [6] предложены такие зависимости для нахождения величины  $\Delta y^+$ :

$$\Delta y^+ = \begin{cases} (1/\chi_1) \operatorname{arcth}(\chi_1 \Delta u^+) & \text{при } h^+ \leq h^*, \\ h^+ e^{-k B(h^+)} & \text{при } h^+ > h^*, \end{cases}$$

где

$$h^* = 25.3611 e^{k(C+2.89)};$$

$$\Delta u^+ = (1/k) \ln h^+ - B(h^+) + C;$$

$$B(h^+) = C + S \operatorname{th}[\ln h^+ / (kS)];$$

$$S = 2.89 / [1 - 87(\ln h^+ / 8)^{2.03} (1 - \ln h^+ / 8)^{8.386}];$$

$$k = 0.4; C = 5.6.$$

## 2.3. Проницаемость (пористость) стенки

В случае наличия пористого равномерного нормального вдува (отсоса) на стенке скорости  $V_W$  исследования приближенно-аналитическим методом показали, что проявление его эффекта на профиль скорости достаточно хорошо учитывается моделью (1) с помощью замены  $p^+$  или  $\Phi$  в функции напряжения трения  $\tau^+$  на величины  $p^+ + V_W/v_*$  или  $\Phi + V_W \delta/\nu$  соответственно [7]. Для улучшения результатов следует принять  $\beta_b = \beta(1/b)^{0.7} (\ln(1+b))^{0.7}$ , где  $b = (V_W/U_E)/(C_f/2)$ . В работе [15] при изучении течения в канале под воздействием нормального и направленного пористого отсоса (вдува) установлено, что модель (1) обеспечивает удовлетвори-

тельные результаты при условии, что интенсивность массообмена мала относительно основного потока.

## 2.4. Двухфазный поток

В упрощенной модели двухфазного потока, состоящего из турбулентного пограничного воздушного слоя и жидкой пленки, течение в пленке считается ламинарным, в пограничном слое – турбулентным, теплообмен отсутствующим. На границе раздела фаз используется условие непрерывности напряжения трения и скорости. Модель турбулентной вязкости (1) остается работоспособной в турбулентной части при  $k=0.64$ ,  $\chi+0.0268$ . Поверхность пленки рассматривается как волнистая, подвижная и шероховатая, что учитывается видоизменением формул учета шероховатости [9]:

$$\Delta y^+ = \begin{cases} \operatorname{arcth}(\chi_1 \Delta u_0) / \chi_1 & \text{при } h^+ \leq h^*, \\ h^+ e^{B-u_0} & \text{при } h^+ > h^*, \end{cases}$$

где  $h^* = y^* e^{B-u_0}$ ;  $u_0$  – скорость на границе раздела фаз.

## 2.5. Кривизна поверхности

Для моделирования развития плоского турбулентного пограничного слоя вдоль сильно искривленного профиля в определяющих уравнениях сохранения появляются дополнительные члены, обусловленные влиянием кривизны. Эффективное касательное напряжение трения в этом случае определяется как

$$\tau = (\nu + \nu_i) \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u/R_W}{1 + u/R_W} \right),$$

где  $R_W$  – радиус продольной кривизны.

Эффект кривизны на турбулентный перенос в модели турбулентной вязкости (1) учитывается введением множителя типа Брэдшоу  $B$  и модификациями модельного коэффициента и функции напряжения трения на стенке следующим образом:  $\nu = (\nu_i)_0 B$ , где  $(\nu_i)_0$  – турбулентная вязкость при отсутствии кривизны ( $1/R_W \rightarrow 0$ ) из формулы (1),

$$B = \left( 1 + \frac{2q R_W u}{(\partial u / \partial y)} \right)^{-2}.$$

Для вогнутой поверхности  $q=7$ , а для выпуклой –  $q=4$ ; для вогнутой стенки  $k=0.4+9.23\delta/R_W$ , а для выпуклой –  $k=0.4-1.97/R_W$ ;  $\tau^+ = 1 + (\Phi + 2\delta/R_w) y^+$ .

**2.6. Теплофизические свойства потока (число Прандтля)**

Проведенные вычислительные эксперименты автором модели и другими [7,13–15] показывают, что для достижения удовлетворительного соответствия с опытными результатами, для плоского пограничного слоя несжимаемой жидкости в широком диапазоне чисел Pr значения модельных констант могут быть заданы выражениями

$$f_1(Pr) = 1 + \sum_{i=1}^6 A_i (\lg Pr)^i,$$

$$f_2(Pr) = \frac{\sqrt{Pr}}{1.5367} \left( 1.3446 + \sum_{j=1}^4 B_j (\lg Pr)^j \right),$$

$$f_k(Pr) = 1/\sqrt{0.86},$$

$$f(Pr) = \begin{cases} Pr^{-6.157} & \text{при } 0.5 \leq Pr \leq 1, \\ 0.916 Pr^{-1.885} & \text{при } 1 < Pr < 3, \\ 0.313 Pr^{-1.143} & \text{при } 3 \leq Pr \leq 64, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= 1.0953; & A_2 &= 0.3478; \\ A_3 &= -0.6678; & A_4 &= 0.3539; \\ A_5 &= 0.2388; & A_6 &= -0.1211; \\ B_1 &= 1.1073; & B_2 &= 1.3058; \\ B_3 &= 0.2346; & B_4 &= -0.0246. \end{aligned}$$

**2.7. Течение в трубах и каналах**

Исследование и расчет гидродинамики и теплообмена турбулентного течения в канале можно успешно проводить с помощью моделей (1) и (6). В этих условиях особенности турбулентного переноса в канале учитываются модификациями некоторых зависимостей модельных коэффициентов и параметров моделей турбулентной вязкости и теплопроводности, полученными в ходе вычислительных экспериментов [2,15]. Установлено, что в отличие от внешнего пограничного слоя, на ядро потока течения в канале сильно влияет режим течения – число Рейнольдса. Предложены следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= 0.0688, \\ \chi &= -\frac{0.01074}{1 + (1.065 \cdot 10^{-7} Re_d)^{0.556}} + 0.0333, \end{aligned}$$

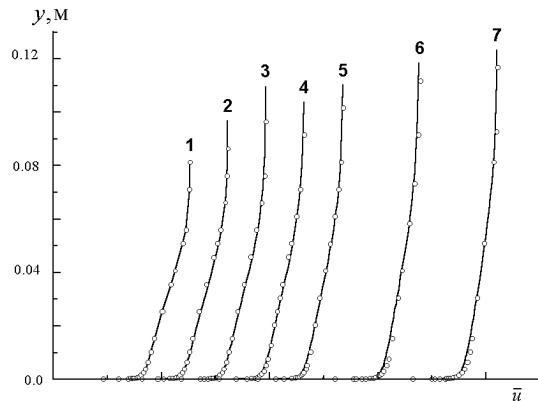


Рис. 1. Расчет скорости  $\bar{u} = F(y)$  в продольных сечениях  $\bar{x} = \text{const}$  ( $L = 7.917$  м):  
 линии – расчеты,  
 кружки – экспериментальные данные (id. 2400) [18],  
 1 –  $x = 1.194$  м, 2 –  $x = 1.346$  м, 3 –  $x = 1.499$  м,  
 4 –  $x = 1.651$  м, 5 –  $x = 1.804$  м,  
 6 –  $x = 2.108$  м, 7 –  $x = 2.412$  м

$$f_1(Pr) = \begin{cases} 1.218 Pr^{0.3} & \text{при } Pr < 1, \\ 1.207 - 0.214 \lg Pr & \text{при } 1 \leq Pr \leq 2000, \end{cases}$$

$$f(Pr) = \begin{cases} 1 & \text{при } Pr > 0.5, \\ 1 - 1.037(1 + 8.94 \cdot 10^{-4} Pe^{1.053}) & \text{при } Pr \ll 1, \quad Pe \geq 100. \end{cases}$$

**3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ**

Использование приведенных моделей турбулентной вязкости и теплопроводности совместно со степенными аппроксимациями для распределений относительных напряжений трения и плотности теплового потока поперек течения [2–15] позволяют находить приближенно-аналитические зависимости для профилей скорости и температуры как для турбулентных пограничных слоев, так и для течений в каналах и в струях с учетом воздействующих усложняющих физических факторов. Эти формулы, как показали расчеты, удовлетворительно описывают известные опытные результаты. Кроме того, установлено, что они являются эффективным и удобным средством для задания начальных условий и пристеночных функций при использовании моделей турбулентности более высокого уровня.

Авторами работы проведено большое количество расчетов различных видов пристенных турбулентных течений с использованием представ-

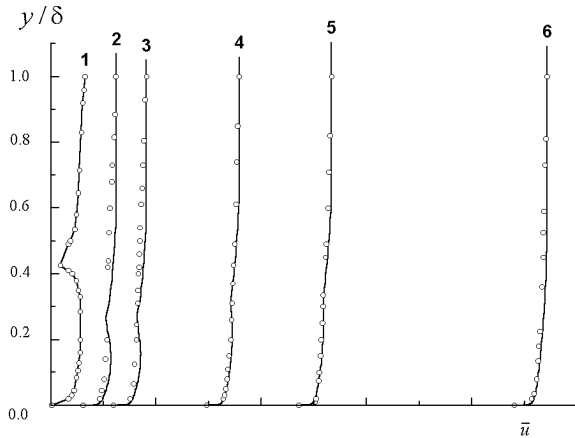


Рис. 2. Расчет скорости  $\bar{u} = F(y/\delta)$  в продольных сечениях  $\bar{x} = X/d = \text{const}$  ( $d = 0.0065$  м,  $\delta = 0.01625$  м,  $U_E = 190$  м/с,  $m_0 = 1.333$ ):  
 линии - расчеты,  
 кружки - экспериментальные данные работы [19],  
 1 -  $x/d = 0$ , 2 -  $x/d = 10$ , 3 -  $x/d = 20$ ,  
 4 -  $x/d = 50$ , 5 -  $x/d = 80$ , 6 -  $x/d = 150$

вленных моделей, в которых дифференциальные уравнения решались методами прямых (конечно-дифференциальный), сеток (конечно-разностной) и другими численными методами. Полученные результаты сопоставлялись с экспериментальными и расчетными данными различных авторов. Ниже приведены некоторые из этих результатов.

В расчетах при использовании в начальном сечении и на внешней границе пристенных течений экспериментальных данных, кроме приближенно-аналитических зависимостей, использовались линейная аппроксимация и улучшенные кубические сплайны. Предпочтение следует отдать сплайновой аппроксимации [10, 11].

В качестве иллюстрации на рис. 1 приводится сравнение расчетных распределений скорости  $\bar{u}(y)$  с данными канонического эксперимента (id.2400) Стенфордской конференции [18] в различных сечениях в направлении развития пограничного слоя. Сравнение демонстрирует достаточно надежное воспроизведение в расчетах тенденции деформации профилей скорости вдоль координаты  $x$ , соответствующей условиям развития перехода течения от положительного градиента к безградиентному обтеканию пластины (П. Брэдшоу).

Расчет турбулентных пристенных струй – это более сложного пристенного течения – с использованием модели (3) базировался на методе сеток [16], построенном [10–12] на конечно-разностной схеме, характеризующейся свойствами сильной стабилизации высокочастотных воз-

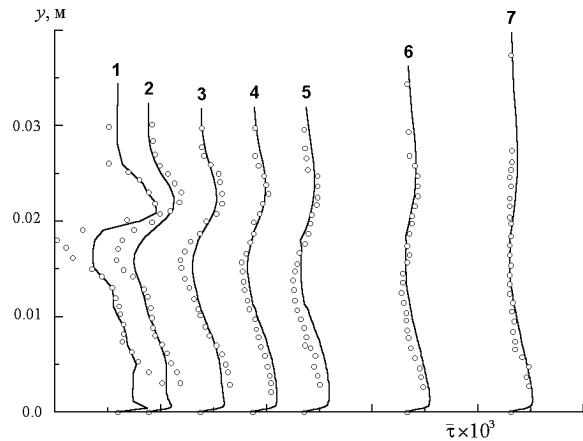


Рис. 3. Распределение касательного напряжения  $\bar{\tau}$  в области взаимодействия следа профиля NACA 0012 с пограничным слоем гладкой поверхности в продольных сечениях  $\bar{x} = \text{const}$  ( $d = 0.2$  м,  $L = 0.4$  м,  $U_E = 13 \div 14$  м/с):  
 линии - расчеты,  
 кружки - экспериментальные данные [17],  
 1 -  $x = 0.02$  м, 2 -  $x = 0.05$  м, 3 -  $x = 0.10$  м,  
 4 -  $x = 0.15$  м, 5 -  $x = 0.20$  м,  
 6 -  $x = 0.30$  м, 7 -  $x = 0.40$  м

мущений. Применение метода в расчетах позволило ликвидировать возмущения в расчетных зависимостях, которые характерны другим методам. Вычислительные эксперименты, в случае расчета течения пристенных струй, позволяют принять, что  $k = 0.4$ ,  $\chi = 0.0168$ ,  $\chi_1 = 0.072$ ,  $\chi_2 = 0.223$ ,  $\chi_e = 0.021$ ,  $\chi_{сл} = 0.011$  [10–12]. На рис. 2 показаны результаты моделирования пристенных турбулентных струй в сравнении с экспериментальными результатами [19]. Результаты Кекера и Уайтло характеризуются наличием в начальном сечении значительного пограничного слоя на внешнем срезе сопла. Экспериментальные профили скоростей приведены в начальном, переходном и основном участках для сечений, указанных на рисунке. Результаты расчетов, как и в эксперименте, демонстрируют постепенный переход немонотонного распределения скорости, характерного для пристенной струи, к монотонному профилю скорости, характерному для пограничного слоя. Кроме того, выполнен расчет течения, которое по своей структуре напоминает течение в пристенной струе – турбулентного следа за телами, одно из которых находится в пограничном слое другого. На рис. 3 приведено сравнение расчетных турбулентных напряжений трения для течения в следе за профилем NACA-0012, находящимся в пограничном слое, который развивается на гладкой поверхности другого тела.

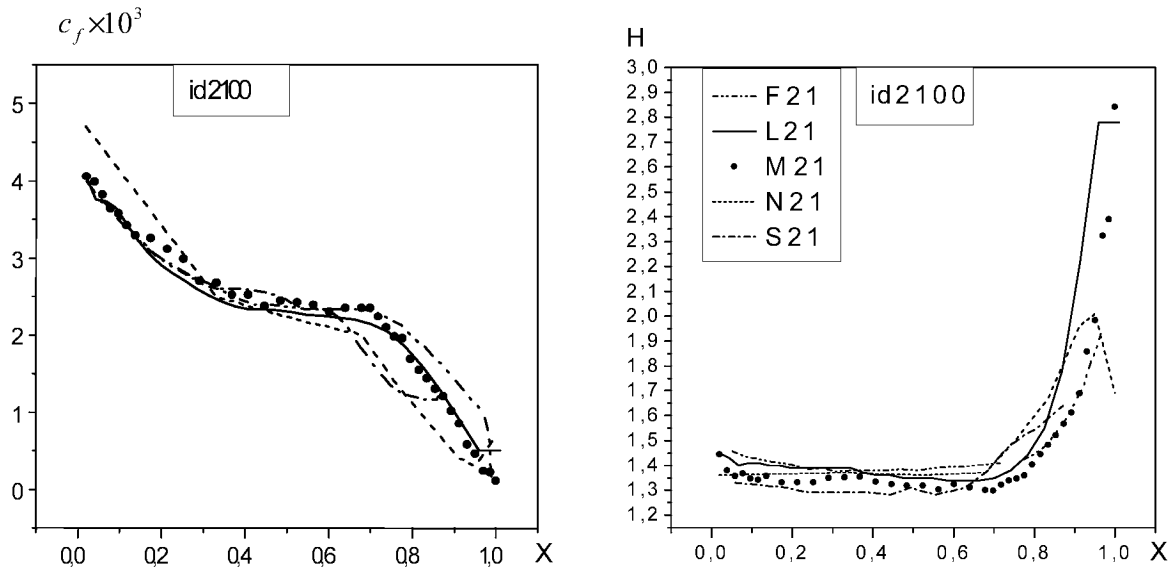


Рис. 4. Сравнение расчетных параметров  $C_f$  и  $N$  с экспериментом и расчетами других авторов

При проведении расчетов с использованием формулы (5) для кинетической энергии использовались приближенно-аналитические зависимости вида  $E = R \operatorname{th}(\chi_1 y^+) \operatorname{th}^{1/2}(\operatorname{sh}^2(\chi_2 y^+))$  в переходной и вязкой зонах,  $E = R$  в логарифмической зоне. Здесь

$$R = \begin{cases} \frac{v_*^2}{\sqrt{C_1}}(1 + p^+ y^+) & \text{при } p^+ > 0, \\ \frac{v_*^2}{\sqrt{C_1}} & \text{при } p^+ = 0, \\ \frac{v_*^2}{\sqrt{C_1}(1 - p^+ y^+)} & \text{при } p^+ < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt{C_1} = 0.2578(1 + 0.2456(1 - \operatorname{th}(0.4y^+) - 0.0592\operatorname{th}(40\bar{y}))).$$

Во внешней области пограничного слоя принималось  $E = 4.2\tau/\rho$ .

Расчет выполнялся по двухшаговой схеме. На первом шаге значения  $E$  брались из предыдущего сечения и рассчитывались параметры динамического пограничного слоя. На втором шаге по приведенным формулам и рассчитанным параметрам определялись значения кинетической энергии  $E$ . Оказалось, что для равновесных пограничных слоев удовлетворительные результаты могут быть получены при постоянных модельных коэффициентах, а для неравновесных – при учете влияния градиента давления на модельный коэффициент внешней области  $\chi$  и малых чисел Рейнольдса

на коэффициент Кармана  $k$ . На рис. 4 приведено сравнение расчетных (L21) параметров  $C_f$  и  $N$  с экспериментальными результатами Г. Шубауэра и П. Клебанова (M21 – крыловой профиль с переходом течения от отрицательного градиента давления к положительному) и расчетами Федяевского, Гиневского, Колесникова (F21); Новожилова (N21); Сингала и Сполдинга (S21).

На рис. 5, 6 приведены результаты сравнения профилей температуры и чисел Нуссельта с экспериментами и расчетами по эмпирическим формулам.

## ВЫВОДЫ

Построенные модели и методы расчета позволяют достоверно прогнозировать развитие течения в динамическом и тепловом пограничных слоях; пристенных струях; пограничных слоях со скольжением; трубах и каналах; в следах за телами, одно из которых размещено в пограничном слое другого и, что особенно важно, правдоподобно предсказывать возможный отрыв.

1. Плетчер Р. Х. Достижения в области исследования турбулентной вынужденной конвекции // Тр. амер. общ-ва инж.-мех. Современ. машиностр. Сер. А. – 1989. – N 6. – С. 12–31.
2. Мовчан В. Т. Приближенный метод вычисления профилей напряжения трения и скорости в турбулентном потоке с положительным градиентом да-



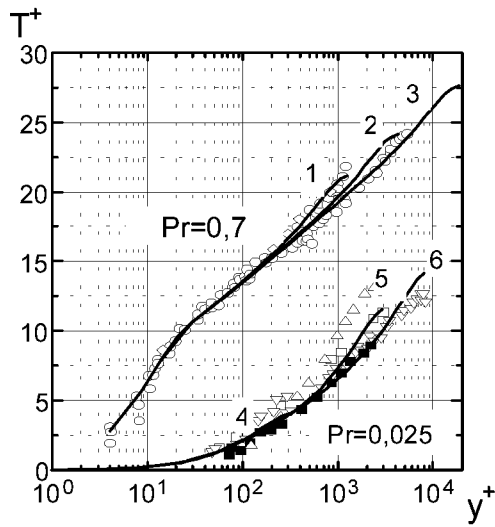


Рис. 5. Сравнение профилей температуры для воздуха  $Pr=0.7$  и жидких металлов  $Pr=0.025$  :

символы - опытные данные,

- 1 - расчет для  $Re_d = 5 \cdot 10^4$ , 2 - расчет для  $Re_d = 2 \cdot 10^5$ ,  
 3 - расчет для  $Re_d = 10^6$ , 4 - расчет для  $Re_d = 10^4$ ,  
 5 - расчет для  $Re_d = 1.3 \cdot 10^5$ , 6 - расчет для  $Re_d = 4 \cdot 10^5$

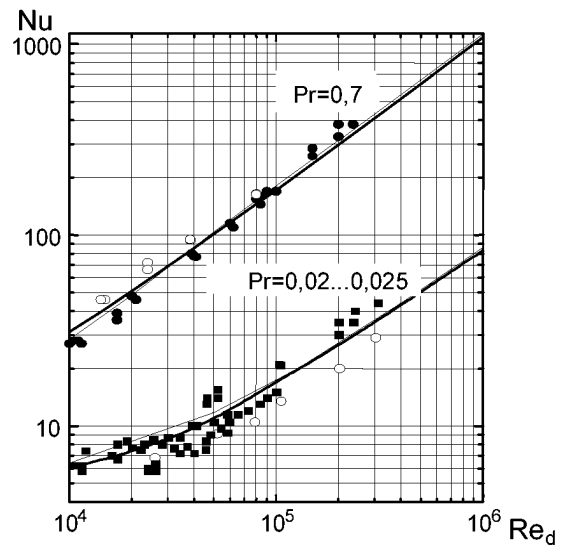


Рис. 6. Сравнение чисел Нуссельта:

- жирные - расчеты по модели,  
 тонкие - расчеты по эмпирическим формулам  $Nu = 0.018Re_d^{0.8}$  для  $Pr=0.7$  и  $Nu = 4.3 + Re_d^{0.8}$  для  $Pr=0.02$ ,  
 ●, ■, ○ - опытные данные соответственно Лоуна, Слейшера и др.

- вления // Гидромеханика.- 1975.- Вып. 31.- С. 25-28.
3. Мовчан В. Т. Приближенно-аналитическое исследование турбулентного градиентного пограничного слоя // ПМТФ.- 1982.- N 3.- С. 102-111.
  4. Мовчан В. Т. Плоская пристенная струя и ее исследование // Гидромеханика.- 1982.- Вып. 46.- С. 73-80.
  5. Мовчан В. Т., Мамчук В. И. О численном исследовании турбулентного пограничного слоя при положительном градиенте давления // Бионика.- 1982.- N 16.- С. 53-58.
  6. Шквар Е. А. К учету влияния шероховатости обтекаемой поверхности // ПМТФ.- 1986.- N 6.- С. 57-63.
  7. Movchan V. T., Shkvar E. A. Modeling of Turbulent Near-Wall Shear Flows Properties // AGARD Report 827 "High Speed Body Motion in Water".- Kyiv, 1997.- P. 10-1-10-7.
  8. Мовчан В. Т., Романюк Л. А. Моделивання турбулентних прилежових шарів при від'ємних градієнтах тиску // Вісн. КМУЦА.- 1998.- N 1.- С. 264-267.
  9. Агеев С. Е., Мовчан В. Т., Мхитарян А. М., Шквар Е. А. Моделирование двухфазных течений с поверхностью раздела фаз // ПМТФ.- 1990.- N 6.- С. 101-108.
  10. Мамчук В. І. Математичне моделювання турбулентних пристінних струменів та шарів // Прикл. аеродинам.- К.: КМУГА, 1997.- С. 69-74.
  11. Мамчук В. І. Модель турбулентності та результати розрахунків плоских турбулентних пристінних струменів // Вісн. КМУЦА.- 1998.- N 1.- С. 291-294.
  12. Шквар К. О., Мамчук В. І., Моїсєнко М. Ю. Математичне моделювання турбулентних пристінних струменів на шостках циліндрах у випадку осесиметричного обтікання // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформатика.- 1998.- Вып. 1.- С. 264-268.
  13. Лунис М. Алгебраическая модель для расчета теплообмена в турбулентном пограничном слое // Прикл. аеродинам.- К.: КМУГА, 1997.- С. 39-46.
  14. Лунис М. Конвективный теплообмен при полностью развитом турбулентном течении в трубах // Промышл. теплотехн.- 1998.- 20, N 3.- С. 8-13.
  15. Лунис М. Моделирование турбулентного течения в трубе с направленным отсосом (вдувом) // Вісн. КМУЦА.- 1999.- N 1.- С. 188-194.
  16. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.- М.: Наука, 1984.- 285 с.
  17. Тулацуркара Э. Г., Рамжи В., Раджасекар Р. Взаимодействие пограничного слоя со следами тел различной формы // Аэрокосм. техн.- 1990.- N 12.- С. 3-10.
  18. Computation of turbulent boundary layer.- Proc. AFOSR-IFR-Stanford Conf.- Vol. 1. / Ed. Kline S. I., Morcovin M. V., Sovran G., Cockrell D. I.- 1968.- Vol.2. / Ed. Coles D. E., Hirst E. A.- 1969.
  19. Kacker S.C., Whitelaw J. H. Some Propertis of the Two-Dimension, Turbulent Wall Jet in a Moving Stream // Proc. conf. ASME. 1-5 December, 1968, New-York.