

**В. Ф. Евдокимов, А. А. Кучаев^{*}, Е. И. Петрушенко,
Г. И. Касьян^{**}, А. В. Волков^{**}**

Институт проблем моделирования в энергетике НАН Украины им. Г. Е. Пухова, Киев

^{*}Физико-технологический институт металлов и сплавов НАН Украины, Киев

^{**}АО “Донецкий электрометаллургический завод”, Донецк

ДВУМЕРНАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ В КРИСТАЛЛИЗАТОРЕ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПЕРЕМЕШИВАТЕЛЕМ

Разработана двумерная интегральная модель распределения вихревых токов (ВТ) и электродинамических усилий (ЭДУ) для промышленного электромагнитного перемешивателя (ЭМП) явнополюсного исполнения, который установлен снаружи кристаллизатора сортовой машины непрерывного литья заготовок (МНЛЗ). В данной работе сплошное сечение магнитопровода ЭМП с явно выраженными полюсами заменяется ярмом кольцевого сечения и сечениями шести полюсных наконечников, изолированными друг от друга. Такая система представляет собой кристаллизатор с неявнополюсным ЭМП, у которого между ярмом и кристаллизатором расположены шесть полюсных наконечников. Модель реализуется с помощью блочного алгоритма, в основе которого лежит разложение результирующего распределения вихревых токов (ВТ) в сечении системы на сумму двух симметричных составляющих (СС), что позволяет существенно сократить объем компьютерных вычислений.

Ключевые слова: интегральная модель, вихревые токи, симметричные составляющие, блочный метод, парное исключение, электромагнитный перемешиватель, кристаллизатор, электродинамические усилия, МНЛЗ, сталь.

Розроблена двовимірна інтегральна модель розподілу вихрових струмів і електродинамічних зусиль для промислового електромагнітного перемішувача (ЕМП) явнополюсного виконання, який встановлений зовні кристалізатора сортової МБЛЗ. В даній роботі суцільний переріз магнітопроводу ЕМП з явно вираженими полюсами замінюється ярмом кільцевого перерізу і перерізами шести полюсних наконечників, які ізольовані один від одного. Така система представляє собою кристалізатор з неявнополюсним ЕМП, у якого між ярмом і кристалізатором розташовано шість полюсних наконечників. Модель реалізується за допомогою блокового алгоритму, в основі якого лежить розкладання результирующего розподілу вихрових струмів (ВТ) в перерізі системи на суму двох симетричних складових, що дозволяє суттєво скоротити об'єм комп'ютерних обчислень.

Ключові слова: інтегральна модель, вихрові струми, симетричні складові, блоковий метод, парне виключення, електромагнітний перемішувач, кристалізатор, електродинамічні зусилля, МБЛЗ, сталь.

2D integral model of distribution of eddy currents and electromagnetic forces for industrial electromagnetic stirrer of salient-pole performance, which is installed outside of the mould of billet continuous casters, is developed. In the given paper the continuous section of magnetic core of salient-pole electromagnetic stirrer is replaced by isolated from each other by the yoke of circular section and sections of six pole tips. Such system is mould with non-salient-pole electromagnetic stirrer at which between a yoke and mould six pole tips are located. For this system a model will be realized by a block algorithm in the basis of which lies decomposition the resulting eddy currents distribution in the section of the system to the amount of two symmetrical components. The model is implemented using a block algorithm, which is based on the decomposition of the resulting distribution of eddy currents in the cross section of system on the sum of two symmetrical components. This allows significantly reduce the amount of computing.

Keywords: integral model, eddy currents, symmetrical components, block method, pairwise elimination, electromagnetic stirrer, mould, electromagnetic forces, continuous caster, steel.

В сталеплавильном производстве нашли широкое применение такие системы электромагнитного воздействия на жидкий металл, как ЭМП для сортовых, слябовых МНЛЗ, установок ковш-печь и электродуговых печей, устройства электромагнитного торможения для слябовых МНЛЗ. В частности, ЭМП позволяют ускорить процессы производства и разливки стали, улучшить качество поверхности и сердцевины слитка, уменьшить количество прорывов. ЭДУ, которые приводят в движение сталь при этом виде перемешивания, возникают в результате взаимодействия ВТ, индуцированных в жидкой стали, и вращающегося или бегущего магнитного поля статора ЭМП [1-3].

Для выбора параметров ЭМП для МНЛЗ такие фирмы, как АВВ (Швеция, Канада), Daniell Rotelec (Франция), АХК ВНИИметмаш выполняют физическое и математическое моделирование процессов, протекающих в жидкой стали [4-7].

Характерной особенностью электромагнитных процессов в системе кристаллизатор МНЛЗ-ЭМП являются сильные магнитные поля рассеивания. Для их учета при применении метода конечных элементов (МКЭ) или метода конечных разностей (МКР) необходимо выбирать диаметр расчетной области, который в несколько раз больше, чем диаметр моделируемой системы. Существенно осложняется расчет поля по МКЭ и МКР в этих устройствах вследствие скачков проводимости и магнитной проницаемости среды в расчетной области. По МКЭ магнитное поле рассчитывается во всех узлах сетки, покрывающей расчетную область, в то время как необходимости в столь полной информации нет. Действительно, для определения поля скоростей в объеме жидкого металла необходимо знать распределение ЭДУ только в этом объеме. Метод интегральных уравнений (МИУ) лишен указанных недостатков.

С помощью этих уравнений магнитное поле в системе кристаллизатор-ЭМП моделируется в два этапа: на первом – решается система интегро-дифференциальных уравнений с дополнительными условиями, на втором – по полученному распределению ВТ вычисляется магнитное поле в сечении заготовки, то есть в той области, в которой необходимо знать распределение ЭДУ. Возможность моделирования магнитного поля в локальной области (в данном случае в сечении заготовки) – важное преимущество предложенной модели по сравнению с конечно-разностными и конечно-элементными моделями.

В работах [8, 9] разработана двумерная интегро-дифференциальная модель распределения ВТ и ЭДУ в системе кристаллизатор-ЭМП МНЛЗ. В работе [10] предложен блочный алгоритм реализации этой модели. В упомянутых работах рассматривался ЭМП с неявно выраженными полюсами. Однако, при непрерывной разливке стали широкое применение нашли ЭМП с явно выраженными полюсами.

В настоящей работе поставлена цель обобщить блочный алгоритм, разработанный в [10], на случай ЭМП с явно выраженными полюсами. Суть предлагаемого обобщения состоит в следующем. Сплошное сечение магнитной системы ЭМП с явно выраженными полюсами, изображенное на рис. 1, представляется в виде следующих изолированных друг от друга элементов: ярма кольцевого сечения и шести полюсных наконечников, причем, таким образом, чтобы железо ярма и полюсов было ограничено линиями, совпадающими с координатными линиями цилиндрической системы координат (рис. 2, 3).

В основе разработанного алгоритма лежит разложение электромагнитного поля в сечении системы на СС. Показано, что результирующее распределение синусоидальных ВТ, которые индуцируются в массивных проводниках системы трехфазными токами обмотки ЭМП, представляет собой сумму двух СС. Для каждой СС получена система интегральных уравнений (СИУ), которая существенно проще исходной СИУ для результирующего распределения ВТ, поскольку областью определения в ней есть не все сечение, а его часть, которая лежит в первом квадранте.

Для каждой СС рассчитывается распределение ВТ, токов намагниченности (ТН), вектора магнитной индукции (ВМИ). Суммируя полученные ВТ, ТН и ВМИ, находим

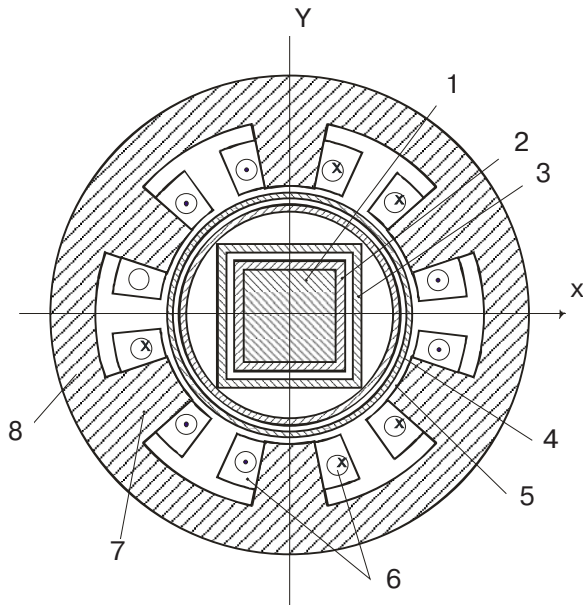
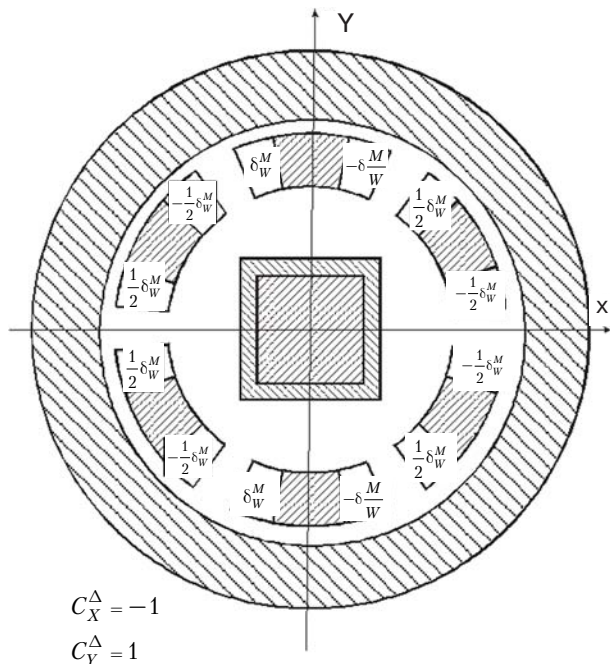


Рис. 1. Конструкция системы кристаллизатор-ЭМП: 1 – заготовка; 2 – гильза; 3 – обечайка; 4 – наружный корпус кристаллизатора; 5 – защитный кожух ЭМП; 6 – обмотка ЭМП; 7 – полюсной наконечник; 8 – ярмо ЭМП

объясняется тем, что матрица исходной САУ содержит много нулевых элементов (46 нулевых элементов при общем числе элементов 100). Исключить их из вычислительного процесса при применении стандартных программ, реализующих блочный



$$C_X^\Delta = -1$$

$$C_Y^\Delta = 1$$

Рис. 2. Распределение плотности токов в обмотках ЭМП для первой симметричной составляющей электромагнитного поля

результатирующие распределения этих величин. По полученным ВТ и ВМИ в сечении заготовки находим ЭДУ. При расчете для каждой СС распределение ВТ, ТН и ВМИ учитывается то обстоятельство, что одна из составляющих сечения есть кольцо, внутренняя и наружная границы которого являются окружностями. Интегральное уравнение (ИУ) для плотности ТН в этом случае упрощается и имеет аналитическое решение, равное правой части уравнения. При решении системы алгебраических уравнений (САУ), аппроксимирующей СИУ, предлагается предварительно упростить ее путем последовательного парного исключения векторов-столбцов плотностей ТН и к полученной таким образом САУ применить блочный метод Гаусса. Такой подход позволяет существенно уменьшить число операций для получения решения. Это

возможным. В результате блочный метод Гаусса применяется к САУ, матрица которой содержит четыре нулевых элемента (при общем числе элементов 16). Разработанная модель распределения синусоидальных ВТ и ЭДУ в системе кристаллизатор МНЛЗ–явнополюсный ЭМП может быть использована как для квадратных, так и круглых заготовок при совпадении осей сечений обмоток с осью симметрии сечения заготовки.

Конструктивное исполнение системы. На рис. 1 показано сечение системы плоскостью xOy декартовой системы координат xyz . Как и в работе [4], здесь описывается алгоритм на примере упрощенной системы кристаллизатор-ЭМП, в которой отсутствуют обечайка, корпус и арматура. Сечение обмотки пло-

скостью xOy будем обозначать D_W . В обмотке ЭМП шесть одинаковых катушек. Каждая фаза состоит из двух катушек, соединенных последовательно. Сечение обмотки i -й фазы обозначим через D_W^i ($i = 1, 2, 3$ – номера фаз). Оно состоит из четырех сечений D_W^{ij} ($j = 1, 2, 3, 4$). Причем, сечения D_W^{i1} и D_W^{i2} принадлежат первой катушке i -й фазы, сечения D_W^{i3} и D_W^{i4} – второй катушке i -й фазы (рис. 1). С учетом способа намотки положительное направление тока выбирается по оси z в сечениях $D_W^{11}, D_W^{13}, D_W^{21}, D_W^{23}, D_W^{31}, D_W^{33}$.

Рассматривается режим тока, то есть считаются заданными токи в витках катушек обмотки. Предполагается, что фазные токи образуют симметричную трехфазную систему. При принятых положительных направлениях токов комплексные амплитуды фазных токов в витках катушек первой, второй и третьей фаз равны

$$\dot{I}_1 = I_m; \quad \dot{I}_2 = I_m e^{-j\frac{2}{3}} = I_m \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad \dot{I}_3 = I_m e^{j\frac{2}{3}} = I_m \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

где I_m – амплитуда фазных токов.

В модели используются комплексные амплитуды средней плотности токов δ_W^{ij} в частях сечений катушек, которые выражаются через комплексные амплитуды заданных токов в витках катушек, число витков в катушках и площадь S сечения D_W^{ij} .

Здесь $\delta_W^M = \frac{I_m W}{S}$; W – число витков в катушке; S – площадь сечения D_W^{ij} .

Обозначим: D_s – сечение заготовки; D_g – сечение гильзы; $D_c = D_g \cup D_s$ – сечение всех массивных проводников; D_M – сечение сплошного магнитопровода ЭМП с явно выраженными полюсами; D_{MC} – сечение кольцевого яра; D_{M0} – сечение полюсов; L^- – окружность радиуса R^- , которая является внутренней границей сечения кольцевого яра D_{MC} ; L^+ – окружность радиуса R^+ , которая является внешней границей сечения кольцевого яра D_{MC} ; D^- – область, ограниченная контуром L^- ; D^+ – неограниченная область, окружающая магнитопровод, внутренней границей которой является окружность L^+ ; $L^0 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 L^{0ij}$ – граница сечений шести полюсов, где L^{0ij} – граница j -го полюса i -й фазы; $D = D_W \cup D_c$ – сечение обмоток и массивных проводников.

Граница между заготовкой и гильзой – идеально проводящая. Удельные проводимости материалов заготовки γ_s , гильзы γ_g считаем заданными. Проводимость материала магнитопровода γ_M полагается равной нулю. Магнитная проницаемость материала магнитопровода $\mu_M = \text{const}$ задана. Частота f токов в обмотках ЭМП может изменяться в интервале $3 \leq f \leq 6$ Гц.

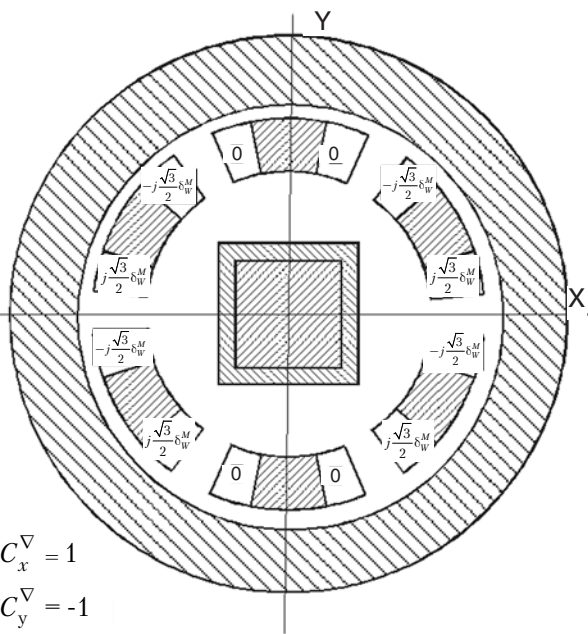


Рис. 3. Распределение плотности токов в обмотках ЭМП для второй симметричной составляющей электромагнитного поля

Система интегральных уравнений для комплексной амплитуды плотности ВТ в сечении гильзы и заготовки. Система интегро-дифференциальных уравнений и дополнительных условий для мгновенной плотности ВТ в сечении кристаллизатора с ЭМП, приведенная в работе [5], в комплексной форме для рассматриваемой конструкции имеет следующий вид:

уравнения –

$$\begin{aligned} & \frac{\dot{\delta}_g(Q)}{j\omega\lambda\gamma_g} + T_{gg}\dot{\delta}_g + T_{gs}\dot{\delta}_s + T_{gL}\dot{\sigma}_- + T_{gL^+}\dot{\sigma}_+ + \\ & + T_{gL^0}\dot{\sigma}_0 = -T_{gW}\dot{\delta}_W + \frac{1}{j\omega\lambda}\dot{U}_{gs}, \quad Q \in D_g; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & T_{sg}\dot{\delta}_g + \frac{\dot{\delta}_s(Q)}{j\omega\lambda\gamma_s} + T_{ss}\dot{\delta}_s + T_{sL}\dot{\sigma}_- + T_{sL^+}\dot{\sigma}_+ + T_{sL^0}\dot{\sigma}_0 = \\ & = -T_{sW}\dot{\delta}_W + \frac{1}{j\omega\lambda}\dot{U}_{gs} + \frac{1}{j\omega\lambda} \text{pp}_Z |\vec{V}\dot{B}|, \quad Q \in D_s; \end{aligned} \quad (2)$$

$$-P_{Lg}\dot{\delta}_g - P_{Ls}\dot{\delta}_s + \frac{\pi}{\chi}\dot{\sigma}_-(Q) - P_{L^+L^+}\dot{\sigma}_+ - P_{L^0L^0}\dot{\sigma}_0 = P_{LW}\dot{\delta}_W, \quad Q \in L; \quad (3)$$

$$-P_{L^+g}\dot{\delta}_g - P_{L^+s}\dot{\delta}_s - P_{L^+L}\dot{\sigma}_- + \frac{\pi}{\chi}\dot{\sigma}_+(Q) - P_{L^+L^0}\dot{\sigma}_0 = P_{L^+W}\dot{\delta}_W, \quad Q \in L^+; \quad (4)$$

$$-P_{L^0g}\dot{\delta}_g - P_{L^0s}\dot{\delta}_s - P_{L^0L}\dot{\sigma}_- - P_{L^0L^+}\dot{\sigma}_+ + \frac{\pi}{\chi}\dot{\sigma}_0(Q) - P_{L^0L^0}\dot{\sigma}_0 = P_{L^0W}\dot{\delta}_W, \quad Q \in L^0; \quad (5)$$

дополнительные условия –

$$\dot{I}_{s+g} = \int_{D_s \cup D_g} \dot{\delta}(M) ds_M = 0. \quad (6)$$

Здесь $\lambda = \mu_0/2\pi$; $\chi = \frac{\mu_M - \mu_0}{\mu_M + \mu_0}$; $\dot{B}(Q)$ – вектор магнитной индукции; $\vec{V}(Q)$ – вектор

скорости в жидкой фазе заготовки; $\dot{\delta}_g, \dot{\delta}_s, \dot{\sigma}_-, \dot{\sigma}_+, \dot{\sigma}_0$ – искомые плотности вихревых токов в гильзе, заготовке и плотности токов намагниченности на контурах L, L^+, L^0 .

Операторные выражения, входящие в уравнения (1)-(5), имеют вид

$$T_{gs}\dot{\delta}_s = \int_{D_s} \dot{\delta}(M) \ln \frac{1}{r_{QM}} ds_M, \quad Q \in D_g;$$

$$P_{Lg}\dot{\delta}_g = \int_{D_g} \dot{\delta}(M) \frac{\cos(\vec{n}_Q, \vec{r}_{QM})}{r_{QM}} ds_M, \quad Q \in L^-;$$

$$P_{L^+} \dot{\sigma}_+ = \int_{L^+} \dot{\sigma}(M) \frac{\cos(\bar{n}_Q, \hat{r}_{QM})}{r_{QM}} dl_M, \quad Q \in L,$$

где \bar{n}_Q – нормаль в точке Q , положительное направление которой принято из железа в воздух; \hat{r}_{QM} – радиус-вектор, направленный из точки Q в точку M ; r_{QM} – расстояние между точками Q и M .

Катушки в рассматриваемом ЭМП расположены так, что ось симметрии первой катушки совпадает с осью симметрии сечения гильзы и заготовки. Нетрудно показать при этом, что если сечение заготовки квадратное, то $\dot{U}_{gs} = 0$ [8].

Разложение ВТ в сечении гильзы и заготовки на сумму двух СС, у каждой из которых оси x и y являются осями симметрии. Представим комплексные амплитуды средних плотностей токов в сечениях катушек в виде суммы двух составляющих, одна из которых является вещественной частью, а вторая – мнимой, то есть $\delta_W^{ij} = \dot{\Delta}_W^{ij} + \dot{\nabla}_W^{ij}$ в D_W^{ij} .

Решение системы (1)-(5) при вещественных составляющих токов $\dot{\Delta}_W^{ij}$ в сечениях катушек D_W^{ij} обозначим: $\dot{\Delta}_g, \dot{\Delta}_s, \dot{\theta}_-, \dot{\theta}_+, \dot{\theta}_0$ – (первая подзадача).

Решение системы (1)-(5) при мнимых составляющих токов $\dot{\nabla}_W^{ij}$ в сечениях катушек D_W^{ij} обозначим: $\dot{\nabla}_g, \dot{\nabla}_s, \dot{\xi}_-, \dot{\xi}_+, \dot{\xi}_0$ – (вторая подзадача).

Введем обозначения: M – точка с координатами x_M, y_M ; M_x – точка с координатами $-x_M, y_M$; M_y – точка с координатами $x_M, -y_M$; M_{xy} – точка с координатами $-x_M, -y_M$.

Имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_W(M) &= -\dot{\Delta}_W(M_x), \quad \dot{\Delta}_W(M) = \dot{\Delta}_W(M_y), \quad \dot{\Delta}_W(M) = -\dot{\Delta}_W(M_{xy}), \\ \dot{\nabla}_W(M) &= \dot{\nabla}_W(M_x), \quad \dot{\nabla}_W(M) = -\dot{\nabla}_W(M_y), \quad \dot{\nabla}_W(M) = -\dot{\nabla}_W(M_{xy}). \end{aligned} \quad (7)$$

В распределении вихревых токов в сечениях массивных проводников имеются те же соотношения симметрии, что и в распределении токов по сечению обмотки. Запишем их, например, для комплексных амплитуд плотности вихревых токов $\dot{\Delta}_g$ и для $\dot{\nabla}_g$

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_g(M) &= -\dot{\Delta}_g(M_x), \quad \dot{\Delta}_g(M) = \dot{\Delta}_g(M_y), \quad \dot{\Delta}_g(M) = -\dot{\Delta}_g(M_{xy}), \\ \dot{\nabla}_g(M) &= -\dot{\nabla}_g(M_x), \quad \dot{\nabla}_g(M) = -\dot{\nabla}_g(M_y), \quad \dot{\nabla}_g(M) = -\dot{\nabla}_g(M_{xy}). \end{aligned} \quad (8)$$

Преобразовывая уравнения (1)-(5) с учетом соотношений (7), (8), мы сужаем расчетную область в этих уравнениях до частей сечений элементов, лежащих в первом квадранте.

Аппроксимация СИУ первой подзадачи алгебраическими системами по методу полного осреднения. Разобьем части сечения обмотки D_{W1} , гильзы D_{g1} , заготовки D_{s1} , внутреннего L^{-1} и внешнего L^{+1} контуров кольца магнитопровода, контуров полюсов L^{01} , лежащих в 1 квадранте, на элементы. Для разбиения D_{W1} , L^{-1} , L^{+1} используются ортогональные сетки в цилиндрической системе координат. Для разбиения D_{g1} , D_{s1} – ортогональные сетки в прямоугольной системе координат. Сечение обмотки равномерными ортогональными цилиндрическими сетками

разбивается на элементы. Применяя метод полного осреднения [4], получим САУ, аппроксимирующие СИУ первой подзадачи.

Преобразование комплексной САУ первой подзадачи в вещественную. Представим векторы-столбцы комплексных амплитуд неизвестных величин, входящих в уравнения первой подзадачи, в алгебраической форме

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Delta}}_{g1} &= \bar{\Delta}_{g1}^{\text{Re}} + j\bar{\Delta}_{g1}^{\text{Im}}, & \dot{\bar{\Delta}}_{s1} &= \bar{\Delta}_{s1}^{\text{Re}} + j\bar{\Delta}_{s1}^{\text{Im}}, & \dot{\bar{\theta}}_{-1} &= \bar{\theta}_{-1}^{\text{Re}} + j\bar{\theta}_{-1}^{\text{Im}}, \\ \dot{\bar{\theta}}_{+1} &= \bar{\theta}_{+1}^{\text{Re}} + j\bar{\theta}_{+1}^{\text{Im}}, & \dot{\bar{\theta}}_{01} &= \bar{\theta}_{01}^{\text{Re}} + j\bar{\theta}_{01}^{\text{Im}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя выражения (9) в САУ первой подзадачи и приравнивая в полученных таким образом уравнениях последовательно вещественные и мнимые части слева и справа, приходим к следующей вещественной САУ:

$$A\bar{X} = \bar{F}, \quad (10)$$

где A – блочная матрица, размерностью 10×10 ;

$\bar{X} = (\bar{\Delta}_{g1}^{\text{Im}}, \bar{\Delta}_{g1}^{\text{Re}}, \bar{\Delta}_{s1}^{\text{Im}}, \bar{\Delta}_{s1}^{\text{Re}}, \bar{\theta}_{-1}^{\text{Im}}, \bar{\theta}_{-1}^{\text{Re}}, \bar{\theta}_{+1}^{\text{Im}}, \bar{\theta}_{+1}^{\text{Re}}, \bar{\theta}_{01}^{\text{Im}}, \bar{\theta}_{01}^{\text{Re}})$ – блочный вектор-столбец искомых неизвестных;

$\bar{F} = (-T_{g1W1}^{\Delta} \bar{\Delta}_{W1}^{\text{Re}}, 0, -T_{s1W1}^{\Delta} \bar{\Delta}_{W1}^{\text{Re}}, 0, 0, P_{L1W1}^{\Delta} \bar{\Delta}_{W1}^{\text{Re}}, 0, P_{L^+1W1}^{\Delta} \bar{\Delta}_{W1}^{\text{Re}}, 0, P_{L^01W1}^{\Delta} \bar{\Delta}_{W1}^{\text{Re}})$ – блочный вектор-столбец правых частей.

Преобразование САУ (10) путем последовательного парного исключения из нее векторов-столбцов ТН. САУ (10) можно решить блочным методом Гаусса. Вместе с тем, матрица A является сильно разреженной ($\approx 40\%$ нулевых матриц). Трудности учета разреженности при использовании стандартных программ, реализующих блочный метод Гаусса, приводят к избыточным вычислениям. Сократить число нулевых матриц и уменьшить при этом порядок блочной матрицы можно путем исключения из САУ (10) пары векторов-столбцов, например, $\bar{\Delta}_{g1}^{\text{Im}}$ и $\bar{\Delta}_{g1}^{\text{Re}}$ или $\bar{\Delta}_{s1}^{\text{Im}}$ и $\bar{\Delta}_{s1}^{\text{Re}}$, или $\bar{\theta}_{-1}^{\text{Im}}$ и $\bar{\theta}_{-1}^{\text{Re}}$, или $\bar{\theta}_{+1}^{\text{Im}}$ и $\bar{\theta}_{+1}^{\text{Re}}$, или $\bar{\theta}_{01}^{\text{Im}}$ и $\bar{\theta}_{01}^{\text{Re}}$.

Исключение первой пары требует разрешения системы первого и второго блочных уравнений САУ (10) относительно этих векторов-столбцов. Исключение второй пары требует разрешения системы третьего и четвертого блочных уравнений САУ (10) относительно этих векторов-столбцов. Значительно проще выражаются пары векторов-столбцов $\bar{\theta}_{-1}^{\text{Im}}$ и $\bar{\theta}_{-1}^{\text{Re}}$ или $\bar{\theta}_{+1}^{\text{Im}}$ и $\bar{\theta}_{+1}^{\text{Re}}$, или $\bar{\theta}_{01}^{\text{Im}}$ и $\bar{\theta}_{01}^{\text{Re}}$ через остальные искомые векторы-столбцы. Используя пятое и шестое уравнения САУ (10), найдем векторы-столбцы $\bar{\theta}_{-1}^{\text{Im}}$ и $\bar{\theta}_{-1}^{\text{Re}}$.

Подставляя полученные выражения для $\bar{\theta}_{-1}^{\text{Im}}$ и $\bar{\theta}_{-1}^{\text{Re}}$ в остальные уравнения системы (10), получим следующую блочную САУ:

$$B\bar{Y} = \bar{\Phi}, \quad (11)$$

где B – блочная матрица, размерностью 8×8 ; $\bar{Y} = (\bar{\Delta}_{g1}^{\text{Im}}, \bar{\Delta}_{g1}^{\text{Re}}, \bar{\Delta}_{s1}^{\text{Im}}, \bar{\Delta}_{s1}^{\text{Re}}, \bar{\theta}_{+1}^{\text{Im}}, \bar{\theta}_{+1}^{\text{Re}}, \bar{\theta}_{01}^{\text{Im}}, \bar{\theta}_{01}^{\text{Re}})$ – блочный вектор-столбец искомых неизвестных; $\bar{\Phi} = (\bar{\Phi}_1, 0, \bar{\Phi}_3, 0, 0, \bar{\Phi}_6, 0, \bar{\Phi}_8)$ – блочный вектор-столбец правых частей САУ.

Из уравнений пять и шесть системы (11) найдем выражения для $\bar{\theta}_{+1}^{Im}$ и $\bar{\theta}_{+1}^{Re}$.

Подставляя полученные выражения для $\bar{\theta}_{+1}^{Im}$ и $\bar{\theta}_{+1}^{Re}$ в остальные уравнения системы (11), получим следующую блочную САУ:

$$C\bar{Z} = \bar{\Psi}, \quad (12)$$

где C – блочная матрица размерностью 6×6 ; $\bar{Z} = (\bar{\Delta}_{g1}^{Im}, \bar{\Delta}_{g1}^{Re}, \bar{\Delta}_{s1}^{Im}, \bar{\Delta}_{s1}^{Re}, \bar{\Delta}_{01}^{Im}, \bar{\Delta}_{01}^{Re})$ – блочный вектор-столбец искомым неизвестных;

$\bar{\Psi} = (\bar{\Psi}_1, 0, \bar{\Psi}_3, 0, 0, \bar{\Psi}_6)$ – блочный вектор-столбец правых частей,

где

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1 &= \bar{\Phi}_1 + B_{16} B_{66}^{-1} \bar{\Phi}_6, \quad \bar{\Psi}_2 = 0, \quad \bar{\Psi}_3 = \bar{\Phi}_3 + B_{36} B_{66}^{-1} \bar{\Phi}_6, \\ \bar{\Psi}_4 &= 0, \quad \bar{\Psi}_5 = 0, \quad \bar{\Psi}_6 = \bar{\Phi}_6 + B_{86} B_{66}^{-1} \bar{\Phi}_6. \end{aligned} \quad (13)$$

Из уравнений пять и шесть системы (12) найдем выражения для $\bar{\theta}_{01}^{Im}$ и $\bar{\theta}_{01}^{Re}$.

Подставляя полученные выражения для $\bar{\theta}_{01}^{Im}$ и $\bar{\theta}_{01}^{Re}$ в остальные уравнения системы (12), получим следующую блочную САУ:

$$D\bar{\Omega} = \bar{G}, \quad (14)$$

где D – блочная матрица размерностью 4×4 ; $\bar{\Omega} = (\bar{\Delta}_{g1}^{Im}, \bar{\Delta}_{g1}^{Re}, \bar{\Delta}_{s1}^{Im}, \bar{\Delta}_{s1}^{Re})$ – блочный

вектор-столбец искомым неизвестных; $\bar{G} = (\bar{G}_1, 0, \bar{G}_3, 0)$ – блочный вектор-столбец правых частей,

где $\bar{G}_1 = \bar{\Psi}_1 - C_{16} C_{66}^{-1} \bar{\Psi}_6$; $\bar{G}_2 = 0$; $\bar{G}_3 = \bar{\Psi}_3 - C_{36} C_{66}^{-1} \bar{\Psi}_6$; $\bar{G}_4 = 0$. (15)

Алгоритм решения САУ (10) комбинированным методом: последовательным парным исключением из нее векторов-столбцов ТН и решением, полученной САУ, блочным методом Гаусса.

Полученную САУ можно решить блочным методом Гаусса. Матрица является сильно разреженной. Сократить число нулевых матриц и уменьшить при этом порядок блочной матрицы можно исключением из САУ векторов-столбцов комплексных амплитуд плотностей ТН.

Таким образом, алгоритм решения САУ (10) следующий: 1 – вычисляются блоки матрицы B ; 2 – правые части САУ (11) по формулам для блочного вектора-столбца правых частей САУ; 3 – блоки матрицы C ; 4 – правые части САУ (12) по формулам (13); 5 – блоки матрицы D ; 6 – правые части САУ (14) по формулам (15); 7 – полученная САУ (14) решается блочным методом Гаусса, следует отметить, что матрица D имеет 16 блоков, из которых всего лишь четыре нулевые, на этом прямой ход решения САУ (10) заканчивается, далее выполняется обратный ход; 8 – по полученному решению САУ (10) вычисляются векторы-столбцы $\bar{\theta}_{01}^{Im}$ и $\bar{\theta}_{01}^{Re}$; 9 – по полученному решению САУ (15), векторам-столбцам $\bar{\theta}_{01}^{Im}$ и $\bar{\theta}_{01}^{Re}$ вычисляются векторы-столбцы $\bar{\theta}_{+1}^{Im}$ и $\bar{\theta}_{+1}^{Re}$; 10 – по полученному решению САУ (14), векторам-столбцам $\bar{\theta}_{01}^{Im}$ и $\bar{\theta}_{01}^{Re}$, и $\bar{\theta}_{+1}^{Im}$ и $\bar{\theta}_{+1}^{Re}$ вычисляются векторы-столбцы $\bar{\theta}_{-1}^{Im}$ и $\bar{\theta}_{-1}^{Re}$. На этом обратный ход решения САУ (10) заканчивается.

Векторно-матричные выражения для вычисления комплексных амплитуд проекций ВМИ на оси x и y в сечении D_{s1} . После расчета распределения ВТ и ТН рассчитывается распределение комплексных амплитуд проекций ВМИ на оси x и y

в сечении D_{s1} . Исходными при этом являются выражения комплексных амплитуд проекций ВМИ на оси x и y в заготовке с учетом симметрии относительно осей x и y в распределении первой СС ВТ, индуцируемых токами первой обмотки.

Восстановление распределения первой СС ВТ в сечении заготовки D_s и гильзы D_g , комплексной амплитуды плотности ТН по L^-, L^+, L^0 комплексных амплитуд проекций ВМИ в сечении D_s . После расчета ВТ и ТН вычисляется распределение комплексных амплитуд проекций ВМИ на оси x и y в сечении заготовки, лежащей в первом квадранте. Далее производится восстановление распределения первой СС ВТ в сечении заготовки, гильзы, комплексной амплитуды плотности ТН по внутреннему контуру, ограничивающему сечение магнитопровода, комплексных амплитуд проекций ВМИ в сечении заготовки по полученному решению СИУ. Для восстановления распределения комплексной амплитуды плотности первой СС ВТ во всем сечении заготовки D_s и гильзы D_g , комплексной амплитуды плотности ТН по L, L^+, L^0 , полученному решению СИУ (10) $\dot{\Delta}_{s1}$ в D_{s1} , $\dot{\Delta}_{g1}$ в D_{g1} , $\dot{\theta}_{-1}$ в L^{-1} , $\dot{\theta}_{+1}$ в L^{+1} , $\dot{\theta}_{01}$ в L^{01} используем равенства (7), (8), с помощью которых были получены СИУ для первой СС ВТ, а именно

$$\dot{\Delta}_g(M) = -\dot{\Delta}_g(M_x) = \dot{\Delta}_g(M_y) = -\dot{\Delta}_g(M_{xy}),$$

$$\dot{\Delta}_s(M) = -\dot{\Delta}_s(M_x) = \dot{\Delta}_s(M_y) = -\dot{\Delta}_s(M_{xy}),$$

$$\dot{\theta}_-(M) = -\dot{\theta}_-(M_x) = \dot{\theta}_-(M_y) = -\dot{\theta}_-(M_{xy}).$$

Для восстановления распределения комплексных амплитуд проекций ВМИ во всем сечении заготовки D_s по полученному распределению $\dot{B}_{x1}^\Delta(M)$ и $\dot{B}_{y1}^\Delta(M)$ в D_{s1} используем равенства

$$\dot{B}_x^\Delta(M) = -\dot{B}_x^\Delta(M_x) = \dot{B}_x^\Delta(M_y) = -\dot{B}_x^\Delta(M_{xy}),$$

$$\dot{B}_y^\Delta(M) = \dot{B}_y^\Delta(M_x) = \dot{B}_y^\Delta(M_y) = \dot{B}_y^\Delta(M_{xy}).$$

Выводы

Разбиение сечения магнитопровода ЭМП с явно выраженными полюсами на составляющие простой формы, в частности, выделение кольца, уже на этапе формулировки задачи позволяет существенно упростить интегральное уравнение для токов намагниченности на границах кольца.

При решении САУ, аппроксимирующей СИУ, предлагается предварительно упростить ее путем последовательного парного исключения векторов-столбцов плотностей ТН. Такой подход позволяет существенно уменьшить число нулевых блоков в матрице САУ. Действительно, матрица исходной САУ содержит 46 нулевых элементов при общем числе элементов 100. После исключения векторов-столбцов плотностей ТН приходим к САУ, матрица которой содержит 4 нулевых элемента при общем числе элементов 16. Для решения этой САУ применяется блочный метод Гаусса.



Список литературы

1. *Eidem M., Hackl H., Kollberg S., Tallback G.* The Use of EMS and EMBR in Steelmaking // Int. Conference: The 21st Century Steel Industry of Russia and CIS, Moscow, 6–10 June. – 1994. – P. 231–238.
2. *Beitelman L.* Continuous Casting of Steel Billets with an in Mold Dual-Coil Electromagnetic Stirring System // Int. Congress Electromagn. Process of Materials, Paris, May 26–29, 1997. – Paris, 1997. – Vol. 2. – P. 335–341.
3. *Favre E., Kunstreich S., Nove M.* The Mechanism of Mould Electromagnetic Stirring // Steel Times International. – 1998. – № 9.
4. *Ilegbusi O.J., Szekely J.* Three-Dimensional Velocity Fields for Newton and Non-Newtonian Metals Produced by a Rotating Magnetic Field // ISIJ Int. – 1989. – Vol. 29, № 6. – P. 462–468.
5. *Partinen J. K., Saluja N., Szekely J.* Experimental and Computational Investigation of Rotary Electromagnetic Stirring in a Woods Metal System // ISIJ Int. – 1994. – Vol. 34, № 9. – P. 707–714.
6. *Natarajan T. T., El-Kaddah N.* Finite Element Analysis of Electromagnetically Driven Flow in Sub-mold Stirring of Steel Billets and Slabs // ISIJ Int. – 1998. – Vol. 38, № 7. – P. 707–714.
7. *Kunstreich S., Nove M.* In Mold Double Stirring System in Continuous Casting: Effect of Two Counter Rotating Magnetic Fields // Int. Congress Electromagn. Process of Materials, Paris, May 26–29, 1997. – Paris, 1997. – Vol. 2. – P. 355–365.
8. Двумерная интегро-дифференциальная модель распределения вихревых токов и электродинамических усилий в системе кристаллизатор-индукционный перемешиватель машины непрерывного литья заготовок / В. Л. Найдек, В. И. Дубоделов, Кучаев А. А. и др. // Электронное моделирование. – 2004. – № 1. – С. 30–52.
9. *Евдокимов В.Ф., Петрушенко Е.И.* Интегральные уравнения для симметричных составляющих синусоидальных вихревых токов в сечении системы кристаллизатор–индукционный перемешиватель // Там же. – 2005. – Т. 27, № 1. – С. 73–96.
10. Блочный алгоритм реализации двумерной интегральной модели распределения синусоидальных вихревых токов и электродинамических усилий в кристаллизаторе с индукционным перемешивателем / В. И. Дубоделов, В. Ф. Евдокимов, И. П. Кондраченко, А. А. Кучаев и др. // Там же. – 2005. – Т. 27, № 4. – С. 57–74.

Поступила 11.02.2010

Вниманию авторов!

В соответствии с требованиями ВАКа все статьи, поступающие в редакции научных журналов, должны обязательно проходить рецензирование, иметь аннотации и ключевые слова на русском, украинском и английском языках. Объем статьи – не более 10 стр., рисунков – не более 5.

Статьи в редакции поступают как на бумажном, так и электронном носителе. Для текстовых материалов желательно использовать формат **doc**. Для графических материалов – формат **jpeg**. Графические материалы необходимо сохранять в отдельных файлах. Фотографии, рисунки, графики и чертежи должны быть черно-белыми, четкими и контрастными.